10

Probabilidades de muerte y supervivencia sobre varias cabezas

10.1 Introducción

Comenzamos ahora el estudio de los seguros sobre varias cabezas. En esta lección se tratan las probabilidades de muerte y supervivencia relativas a grupos de varias cabezas. Considerando el grupo de varias cabezas como una unidad, es posible hacer un planteamiento de su estudio paralelo al realizado para el caso de una cabeza en cuanto a la notación empleada y los resultados obtenidos.

Ahora bien, es importante definir cuándo se considera extinguido el grupo. Siguiendo las definiciones habituales en la literatura actuarial, distinguiremos entre grupos que se extinguen al primer fallecimiento, grupos que se extinguen al último fallecimiento y grupos que se extinguen a un fallecimiento determinado.

El objetivo es expresar las probabilidades relativas a los distintos tipos de grupos en función de probabilidades de supervivencia de grupos que se extinguen al primer fallecimiento ya que éstas, aceptando la hipótesis de independencia de las vidas residuales de las cabezas del grupo, se pueden calcular sin dificultad como producto de las correspondientes probabilidades de cada una de las cabezas, para lo que pueden emplearse las tablas de mortalidad habituales.

Finalizaremos este capítulo tratando los grupos compuestos de grupos de cabezas individuales y con el estudio de los órdenes de fallecimiento, esto es, el estudio de las probabilidades de que dentro de un grupo los fallecimientos acaezcan en un orden determinado.

10.2 Grupos que se extinguen al primer fallecimiento

10.2.1 Introducción

Trataremos en primer lugar los grupos que se extinguen al primer fallecimiento. Para este tipo de grupos siguiendo el estudio de las probabilidades de muerte y supervivencia para una cabeza, definimos las variables aleatorias vida residual y número completo de años de vida hasta la muerte, cuya distribución de probabilidad se puede obtener a partir de las de las cabezas individuales. Las probabilidades de muerte y supervivencia para el grupo se obtienen con facilidad, así como el tanto instantáneo de mortalidad (que en este caso resulta ser la suma de los tantos instantáneos de cada una de las cabezas) y las esperanzas de vida. Aunque en la actualidad no poseen tanto interés debido a las grandes posibilidades de cálculo de los modernos computadores, nos referiremos a los métodos de cálculo abreviado para los casos en que la mortalidad de cada cabeza siga la ley de Gompertz o Makeham.

Dado un grupo de n cabezas de edades $x_1, x_2, ..., x_n$. Se considera extinguido este grupo al primer fallecimiento, esto es, en el momento de fallecer uno cualquiera de sus miembros. El grupo esta "vivo" mientras están vivos todos sus miembros, refieriéndonos a él mediante

$$u = x_1 x_2 \, ... \, x_n$$

10.2.2 Probabilidades de muerte y supervivencia

Consideremos el citado grupo de n cabezas que se extingue al primer fallecimiento.

Definamos en primer lugar la variable aleatoria **vida residual** o **tiempo de vida hasta la muerte** de $u = x_1 x_2 \, ... \, x_n$, que representaremos mediante T_u. Supondremos conocidas las distribuciones de probabilidad de la vida residual de cada componente del grupo y aceptaremos su independencia. Es claro que

$$T_u = mín(T_{x_1}, ..., T_{x_n})$$

La función de distribución de T_u

$$G_u(t) = P(T_u \leq t) = 1 - P(T_u > t) = 1 - P(T_{x_1} > t, ..., T_{x_n} > t)^* =$$

$$= 1 - (\, _tp_{x_1} \cdot .... \, _tp_{x_n})$$

Tenemos, por tanto, que la probabilidad de que este grupo se extinga antes de t años es

$$_tq_u = \, _tq_{x_1 x_2 \, ... \, x_n} = G_u(t) = 1 - (\, _tp_{x_1} \cdot .... \, _tp_{x_n}) \qquad (10.1)$$

Siendo la probabilidad de que el grupo sobreviva t años más

$$_tp_u = \, _tp_{x_1 x_2 \, ... \, x_n} = 1 - \, _tq_{x_1 x_2 \, ... \, x_n} = \, _tp_{x_1} \cdot .... \, _tp_{x_n} \qquad (10.2)$$

La función de densidad de T_u, para un grupo de dos cabezas $u = x_1 x_2$ es,

$$g_u(t) = \frac{d}{dt}(G_u(t)) = \frac{d}{dt}(1 - \, _tp_{x_2} \, _tp_{x_2}) =$$

*Haciendo uso de la hipótesis de independencia.

$$= - \, {}_tp_{x_1} \left(-{}_tp_{x_2} \; \mu_{x_2+t}\right) - \; {}_tp_{x_2} \left(-{}_tp_{x_1} \; \mu_{x_1+t}\right) =$$

$$= \; {}_tp_{x_1} \; {}_tp_{x_2} \; (\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t}) \tag{10.3}$$

Recordemos que

$$\frac{d}{dt}({}_tp_x) = -{}_tp_x \; \mu_{x+t}$$

Es fácil probar, por inducción, que cuando $u = x_1x_2 \; ... \; x_n$, la función de densidad de la vida residual del grupo es

$$g_u(t) = (\; {}_tp_{x_1} \; ..... \; {}_tp_{x_n}) \; (\mu_{x_1+t} + ... + \mu_{x_n+t}) \tag{10.4}$$

Consideremos ahora la variable aleatoria K_u, *número completo de años de vida hasta la muerte* del grupo. Ciertamente

$$P(K_u = k) = P(k < T_u \leq k+1) = \; {}_{k+1}q_{x_1x_2 \; ... \; x_n} - \; {}_kq_{x_1x_2 \; ... \; x_n} =$$

$$= \; {}_kp_{x_1x_2 \; ... \; x_n} - \; {}_{k+1}p_{x_1x_2 \; ... \; x_n} = \; {}_kp_{x_1x_2 \; ... \; x_n} - \; {}_kp_{x_1x_2 \; ... \; x_n} \; p_{x_1+k \; x_2+k \; ... \; x_n+k} =$$

$$= \; {}_kp_{x_1x_2 \; ... \; x_n} \; q_{x_1+k \; x_2+k \; ... \; x_n+k}$$

Así

$$_{k/}q_{x_1x_2 \; ... \; x_n} = \; {}_kp_{x_1x_2 \; ... \; x_n} \; q_{x_1+k \; x_2+k \; ... \; x_n+k} \tag{10.5}$$

Hagamos notar que para los grupos que se extinguen al primer fallecimiento se verifican las siguientes relaciones análogas a las referidas a una cabeza:

1.-

$${}_{s+t}p_{x_1x_2 \; ... \; x_n} = \; {}_sp_{x_1x_2 \; ... \; x_n} \; {}_tp_{x_1+s \; x_2+s \; ... \; x_n+s} \tag{10.6}$$

En efecto

$${}_{s+t}p_{x_1x_2 \; ... \; x_n} = \; {}_{s+t}p_{x_1} \; {}_{s+t}p_{x_2} \cdots\cdots \; {}_{s+t}p_{x_n} =$$

$$= \; {}_sp_{x_1} \; {}_tp_{x_1+s} \; {}_sp_{x_2} \; {}_tp_{x_2+s} \cdots\cdots \; {}_sp_{x_n} \; {}_tp_{x_n+s} =$$

$$= \; {}_sp_{x_1} \; {}_tp_{x_1+s} \; {}_sp_{x_2} \; {}_tp_{x_2+s} \; \cdots\cdots \; {}_sp_{x_n} \; {}_tp_{x_n+s} =$$

$$= \; {}_sp_{x_1x_2 \; ... \; x_n} \; {}_tp_{x_1+s \; x_2+s \; ... \; x_n+s}$$

2.-

$$\text{s/t} \quad {}_{s+t}q_{x_1x_2 \; ... \; x_n} = \; {}_sp_{x_1x_2 \; ... \; x_n} \; {}_tq_{x_1+s \; x_2+s \; ... \; x_n+s} \tag{10.7}$$

cuya prueba dejamos al lector.

10.2.3 Tanto instantáneo de mortalidad

El tanto instantáneo de mortalidad para un grupo de n cabezas que se extingue al primer fallecimiento resulta ser la suma de los tantos instantáneos de cada una de las cabezas. En efecto,

$$\mu_{x_1+t\ \dots\ x_n+t} = \mu_{u+t} = \frac{g_u(t)}{1-G_u(t)} = \frac{(\ _tp_{x_1}\ \dots\dots\ _tp_{x_n})\ (\mu_{x_1+t} + \dots + \mu_{x_n+t})}{_tp_{x_1}\ \dots\dots\ _tp_{x_n}} =$$

$$= \mu_{x_1+t} + \dots + \mu_{x_n+t} \tag{10.8}$$

10.2.4 Esperanza de vida

En cuanto a las expresiones de las esperanzas de vida completa y abreviada, basta trasladar los cálculos realizados para el caso de una cabeza (véase apartado 1.5).

Para $u = x_1x_2\ \dots\ x_n$, la esperanza matemática de T_u se denomina **esperanza de vida completa** de u y se representa por $\overset{o}{e}_u$ o bien $\overset{o}{e}_{x_1x_2\ \dots\ x_n}$, siendo

$$\overset{o}{e}_u = E(T_u) = \int_0^{+\infty} t\ g_u(t)\ dt = \int_0^{+\infty}\ _tp_u\ dt \tag{10.9}$$

esto es,

$$\overset{o}{e}_{x_1x_2\ \dots\ x_n} = \int_0^{+\infty}\ _tp_{x_1x_2\ \dots\ x_n}\ dt \tag{10.10}$$

Asimismo

$$Var(T_u) = E(T_u^2) - (E(T_u))^2 = 2\int_0^{+\infty} t\ _tp_u dt - \left(\int_0^{+\infty}\ _tp_u dt\right)^2$$

En el caso discreto **la esperanza de vida abreviada**, esperanza matemática de K_u, es

$$e_u = E(K_u) = \sum_{k=0}^{\infty} k\ P(K_u = k) = \sum_{k=0}^{\infty}\ _{k+1}p_u$$

esto es,

$$e_{x_1x_2\ \dots\ x_n} = \sum_{k=0}^{\infty}\ _{k+1}p_{x_1x_2\ \dots\ x_n} \tag{10.11}$$

Asimismo

$$Var(K_u) = E(K_u^2) - E(K_u)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\ _{k+1}p_u - \left(\sum_{k=0}^{\infty}\ _{k+1}p_u\right)^2$$

10.2.5 Cálculos abreviados. Leyes de Gompertz y Makeham

Aunque actualmente no presenta problema alguno obtener las probabilidades de muerte y supervivencia sobre varias cabezas, tradicionalmente se utilizaron algunos procedimientos que permitían una necesaria simplificación para su cálculo. A continuación nos referiremos a dos de ellos, relativos a probabilidades para grupos que se extinguen al primer fallecimiento.

1.- Aceptemos la hipótesis de que cada una de las cabezas del grupo sigue la misma ley de mortalidad de **Gompertz**, esto es, que el tanto instantáneo viene dado por

$$\mu_x = B\ c^x \quad x \geq 0, B > 0, c > 1$$

Considerando el grupo $u = x_1 x_2 \ ...\ x_n$, sabemos que el tanto instantáneo de mortalidad es

$$\mu_{u+t} = \mu_{x_1+t} + ... + \mu_{x_n+t} = B\ c^{x_1+t} + ... + B\ c^{x_n+t} = B\ c^t(c^{x_1} + ... + c^{x_n})$$

Supongamos que existe una única cabeza de edad α cuyo tanto instantáneo de mortalidad es precisamente la suma de los tantos de cada una de las cabezas del grupo. Supuesto que la mortalidad de dicha cabeza sigue también la misma ley de Gompertz,

$$\mu_{\alpha+t} = B\ c^{\alpha+t} = B\ c^t(c^\alpha)$$

resolviendo la ecuación

$$c^\alpha = c^{x_1} + ... + c^{x_n}$$

podremos encontrar el valor de α (**edad gompertziana**).

A la hora de realizar los cálculos actuariales se sustituye el grupo u por la cabeza (α).

2.- Si cada una de las cabezas del grupo sigue la ley de **Makeham**,

$$\mu_x = A + B\ c^x \quad x \geq 0, B > 0, c > 1, A > -B$$

Ahora será

$$\mu_{u+t} = \mu_{x_1+t} + ... + \mu_{x_n+t} = n\ A + B\ c^t(c^{x_1} + ... + c^{x_n})$$

Si consideramos un grupo de n cabezas de la misma edad $w = \alpha\alpha\ ...\ \alpha$ y que siguen la misma ley de Makeham, tenemos

$$\mu_{w+t} = \mu_{\alpha+t} + ... + \mu_{\alpha+t} = A + B\ c^{\alpha+t} + ... + A + B\ c^{\alpha+t} = nA + B\ c^t(nc^\alpha)$$

Ahora hemos de hallar la edad α para la cual ambos grupos poseen el mismo tanto instantáneo; ésta es la solución de la ecuación

$$nc^{\alpha} = c^{x_1} + ... + c^{x_n}$$

En este caso la simplificación en los cálculos se produce al sustituir el grupo u por otro w cuyas n cabezas poseen la misma edad.

10.2.6 Estimación de las probabilidades de muerte y supervivencia mediante las tablas de mortalidad

La obtención de las probabilidades de muerte y supervivencia para grupos que se extinguen al primer fallecimiento es sencilla. Así,

$$_tp_{x_1x_2\ ...\ x_n} = {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2} .....\ {}_tp_{x_n} = \frac{l_{x_1+t}}{l_{x_1}}\ \frac{l_{x_2+t}}{l_{x_2}} ......\frac{l_{x_n+t}}{l_{x_2}}$$

donde los correspondientes l_{x_i} se obtienen de la tabla de mortalidad aplicable a la correspondiente cabeza.

Para dar expresiones análogas a las de las probabilidades sobre una cabeza se suele definir

$$l_{x_1x_2\ ...\ x_n} = l_{x_1}\ l_{x_2} .....l_{x_2}$$

y

$$d_{x_1x_2\ ...\ x_n} = l_{x_1x_2\ ...\ x_n} - l_{x_1+1\ x_2+1\ ...\ x_n+1}$$

De esta forma

$$_tp_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \frac{l_{x_1+t\ x_2+t\ ...\ x_n+t}}{l_{x_1x_2\ ...\ x_n}}$$

$$_tq_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \frac{l_{x_1x_2\ ...\ x_n} - l_{x_1+t\ x_2+t\ ...\ x_n+t}}{l_{x_1x_2\ ...\ x_n}}$$

y

$$_{t/}q_{x_1x_2\ ...\ x_n} = \frac{d_{x_1+t\ x_2+t\ ...\ x_n+t}}{l_{x_1x_2\ ...\ x_n}} = \frac{l_{x_1+t\ x_2+t\ ...\ x_n+t} - l_{x_1+t+1\ x_2+t+1\ ...\ x_n+t+1}}{l_{x_1x_2\ ...\ x_n}}$$

10.3 Grupos que se extinguen al último fallecimiento

10.3.1 Introducción

Tratemos ahora las probabilidades referidas a grupos que se extinguen al último fallecimiento. El esquema de su estudio es similar al del caso anterior. Si para dos cabezas su estudio es relativamente sencillo, para el caso general la determinación de las probabilidades de muerte y supervivencia es más compleja recurriéndose a las conocidas fórmulas de inclusión-exclusión del cálculo de probabilidades (nos permiten expresar las probabilidades buscadas en función de las correspondientes a grupos que se extinguen al primer fallecimiento y de las cabezas individuales).

Consideremos un grupo de n cabezas de edades $x_1 x_2 \dots x_n$ cuyas vidas residuales son variables aleatorias independientes.

Se considera extinguido este grupo al último fallecimiento, esto es, en el momento de fallecer el último de sus miembros. El grupo esta "vivo", por tanto, mientras está vivo alguno de sus miembros. Escribiremos en este caso,

$$u = \overline{x_1 x_2 \dots x_n}$$

10.3.2 Probabilidades de muerte y supervivencia

En este caso la *vida residual* del grupo verifica

$$T_u = máx(T_{x_1}, \dots, T_{x_n})$$

y la función de distribución de T_u

$$G_u(t) = P(T_u \leq t) = P(T_{x_1} \leq t, \dots, T_{x_n} \leq t) = \ {}_tq_{x_1} \cdots\cdots \ {}_tq_{x_n}$$

por tanto, la probabilidad de que este grupo se extinga antes de t años es

$${}_tq_u = \ {}_tq_{\overline{x_1 x_2 \dots x_n}} = \ {}_tq_{x_1} \cdots\cdots \ {}_tq_{x_n} \tag{10.12}$$

siendo la probabilidad de que el grupo sobreviva t años más

$${}_tp_u = \ {}_tp_{\overline{x_1 x_2 \dots x_n}} = 1 - \ {}_tq_{x_1} \cdots\cdots \ {}_tq_{x_n} \tag{10.13}$$

Las probabilidades de muerte y supervivencia para este tipo de grupos es posible expresarlas en función de las probabilidades referidas a grupos que se extinguen al primer fallecimiento

Basta recordar la conocida fórmula del cálculo de probabilidades relativos a la unión de sucesos (véase por ejemplo DeGroot (1988) págs. 35 y ss):

Siendo $A_1, \dots, A_n$ n sucesos cualesquiera de un espacio muestral, se verifica:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i, A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i, A_j, A_k) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} P(A_1, \dots, A_n)$$

En nuestro caso A_i representa el suceso de que la i-ésima cabeza alcance con vida la edad $x_i + t$. Por tanto,

$$P(A_1, .., A_m) = {}_tp_{x_1x_2\ \dots\ x_n} = {}_tp_{x_1} \cdots {}_tp_{x_m}$$

Es habitual escribir

$$S_m = \sum {}_tp_{x_{i_1}\ \dots\ x_{i_m}} \tag{10.14}$$

esto es, la suma de las probabilidades de vivir t años más de los $\binom{n}{m}$ grupos de m cabezas que se extinguen al primer fallecimiento que se pueden formar con las n cabezas del grupo inicial. Por tanto,

$${}_tp_{\overline{x_1x_2\ \dots\ x_n}} = S_1 - S_2 + S_3 + \dots + (-1)^{n-1}S_n \tag{10.15}$$

Ejemplo 13 *Calculemos la probabilidad de que el grupo* $u = \overline{x_1x_2x_3x_4}$ *sobreviva t años más.*

De acuerdo con (10.15),

$${}_tp_{\overline{x_1x_2x_3x_4}} = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$$

donde

$$S_1 = {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_3} + {}_tp_{x_4}$$

$$S_2 = {}_tp_{x_1x_2} + {}_tp_{x_1x_3} + {}_tp_{x_1x_4} + {}_tp_{x_2x_3} + {}_tp_{x_2x_4} + {}_tp_{x_3x_4}$$

$$S_3 = {}_tp_{x_1x_2x_3} + {}_tp_{x_1x_2x_4} + {}_tp_{x_2x_3x_4} + {}_tp_{x_1x_3x_4}$$

y

$$S_4 = {}_tp_{x_1x_2x_3x_4}$$

El cálculo de la función de densidad T_u no es excesivamente complejo y conduce a una expresión en función de densidades de grupos que se extinguen al primer fallecimiento. En efecto,

$$g_u(t) = \frac{d}{dt}(G_u(t)) = \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_{\overline{x_1x_2\ \dots\ x_n}}) \tag{10.16}$$

Basta sustituir ${}_tp_{\overline{x_1x_2\ \dots\ x_n}}$ por la expresión dada anteriormente y derivar, recordando que

$$\frac{d}{dt}({}_tp_{x_1x_2\ \dots\ x_n}) = -\ {}_tp_{x_1x_2\ \dots\ x_n}\ (\mu_{x_1+t} + \dots + \mu_{x_n+t}) = -g_{x_1x_2\ \dots\ x_n}(t)$$

Ejemplo 14 *La densidad de la vida residual del grupo ~~el grupo~~ $u = \overline{x_1 x_2 x_3}$ es*

$$g_u(t) = \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_{\overline{x_1x_2x_3}}) =$$

$$= \frac{d}{dt}(\ {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_3} - {}_tp_{x_1x_2} - {}_tp_{x_1x_3} - {}_tp_{x_2x_3} + {}_tp_{x_1x_2x_3}) =$$

$$= {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t} + {}_tp_{x_2}\ \mu_{x_2+t} + {}_tp_{x_3}\ \mu_{x_3+t} -$$

$$- {}_tp_{x_1x_2}(\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t}) - {}_tp_{x_1x_3}(\mu_{x_1+t} + \mu_{x_3+t}) -$$

$$- {}_tp_{x_2x_3}(\mu_{x_2+t} + \mu_{x_3+t}) + {}_tp_{x_1x_2x_3}(\mu_{x_1+t} + \mu_{x_2+t} + \mu_{x_3+t})$$

Ciertamente es sencillo dar una expresión general para la función de densidad de T_u análoga a la dada para la probabilidad de supervivencia. En el epígrafe siguiente lo haremos en un contexto más general.

Refirámonos finalmente a la variable aleatoria K_u, **número completo de años de vida hasta la muerte del grupo**. Ciertamente

$$_{k/}q_{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}} = P(K_u = k) = P(k < T_u \leq k+1) = {}_{k+1}q_{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}} - {}_kq_{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}} =$$

$$= {}_kp_{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}} - {}_{k+1}p_{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}} \tag{10.17}$$

y sustituyendo obtendremos la expresión buscada.

Ejemplo 15 *Calculemos $_{k/}q_{\overline{x_1x_2x_3}}$.*

$$_{k/}q_{\overline{x_1x_2x_3}} = {}_kp_{\overline{x_1x_2x_3}} - {}_{k+1}p_{\overline{x_1x_2x_3}} =$$

$$= (\ {}_kp_{x_1} + {}_kp_{x_2} + {}_kp_{x_3} - {}_kp_{x_1x_2} - {}_kp_{x_1x_3} - {}_kp_{x_2x_3} + {}_kp_{x_1x_2x_3}) -$$

$$-(\ {}_{k+1}p_{x_1} + {}_{k+1}p_{x_2} + {}_{k+1}p_{x_3} - {}_{k+1}p_{x_1x_2} - {}_{k+1}p_{x_1x_3} - {}_{k+1}p_{x_2x_3} + {}_{k+1}p_{x_1x_2x_3}) =$$

$$= {}_{k/}q_{x_1} + {}_{k/}q_{x_2} + {}_{k/}q_{x_3} - {}_{k/}q_{x_1x_2} - {}_{k/}q_{x_1x_3} - {}_{k/}q_{x_2x_3} + {}_{k/}q_{x_1x_2x_3}$$

Tampoco en este caso sería difícil dar una fórmula general.

10.3.3 Esperanza de vida

Para $u = \overline{x_1 x_2 \ldots x_n}$ la esperanza matemática de T_u se denomina **esperanza de vida completa** de u y se representa mediante $\overset{o}{e}_u$ o bien $\overset{o}{e}_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}}$, siendo

$$\overset{o}{e}_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}} = E(T_u) = \int_0^{+\infty} {}_t p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}} \, dt \tag{10.18}$$

y sustituyendo ${}_t p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}}$ de acuerdo a (10.15), podremos expresar esta esperanza en función de esperanzas de vida de grupos que se extinguen al primer fallecimiento.

Ejemplo 16 *Calculemos* $\overset{o}{e}_{\overline{x_1 x_2 x_3}}$

$$\overset{o}{e}_{\overline{x_1 x_2 x_3}} = \int_0^{+\infty} {}_t p_{\overline{x_1 x_2 x_3}} \, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} ({}_t p_{x_1} + {}_t p_{x_2} + {}_t p_{x_3} - {}_t p_{x_1 x_2} - {}_t p_{x_1 x_3} - {}_t p_{x_2 x_3} + {}_t p_{x_1 x_2 x_3}) \, dt =$$

$$= \overset{o}{e}_{x_1} + \overset{o}{e}_{x_2} + \overset{o}{e}_{x_3} - \overset{o}{e}_{x_1 x_2} - \overset{o}{e}_{x_1 x_3} - \overset{o}{e}_{x_2 x_3} + \overset{o}{e}_{x_1 x_2 x_3}$$

De igual forma procederíamos para la **esperanza de vida abreviada**, esperanza matemática de K_u, que es

$$e_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}} = E(K_u) = \sum_{k=0}^{\infty} k \ P(K_u = k) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1} p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}} \tag{10.19}$$

Ejemplo 17 *Calculemos* $e_{\overline{x_1 x_2}}$.

$$e_{\overline{x_1 x_2}} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1} p_{\overline{x_1 x_2}} = \sum_{k=0}^{\infty} ({}_{k+1} p_{x_1} + {}_{k+1} p_{x_2} - {}_{k+1} p_{x_1 x_2}) =$$

$$= e_{x_1} + e_{x_2} - e_{x_1 x_2}$$

10.4 Grupos que se extinguen a un fallecimiento determinado

10.4.1 Introducción

Nos referiremos a continuación a los grupos que se extinguen a un fallecimiento determinado. Consideraremos aquellos grupos que existen o "están vivos" solamente cuando sobrevive un número determinado de cabezas y aquellos que se consideran vivos cuando sobrevive al menos dicho número.

Para el segundo tipo, supuesto un grupo de n cabezas si exigimos la supervivencia de al menos una nos encontramos con un grupo que se extingue al último fallecimiento y si exigimos la supervivencia de n estamos ante un grupo que se extingue al primer fallecimiento. De esta forma los resultados de los dos epígrafes anteriores son un caso particular de los que obtendremos en este.

Dado un grupo de n cabezas de edades $x_1, x_2, ..., x_n$, cuando se considera que el grupo existe o "está vivo" si **viven exáctamente** m de sus miembros, escribiremos

$$u = \overline{x_1 x_2 \ldots x_n}^{[m]}$$

Para este tipo de grupos el interés se centra solamente en las probabilidades de supervivencia ya que la situación de extinto de estos grupos es ciertamente extraña: el grupo comienza su existencia cuando se produce la $n-m$ muerte y se extingue con el fallecimiento de una nueva cabeza.

Cuando se considera que el grupo "está vivo" si **viven al menos** m de sus miembros escribiremos

$$u = \overline{x_1 x_2 \ldots x_n}^{m}$$

En este caso el grupo se encuentra inicialmente vivo y se extingue con el $n-m+1$ fallecimiento.

Lógicamente cuando $m = n$,

$$\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}^{n} = x_1 x_2 \ldots x_n$$

y cuando $m = 1$

$$\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}^{1} = \overline{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

10.4.2 Probabilidades de muerte y supervivencia

Los siguientes resultados cuya demostración puede encontrarse en el capítulo 18 del texto de Bowers et al (1997) y también en los textos clásicos de Neil (1977) capítulo 7, Jordan (1967) capítulo 10 ó Levi (1973) vol II capítulo 1.17, que utilizan para su prueba el tradicional "método de las Z", permiten el cálculo de las probabilidades de muerte y supervivencia para los grupos antes indicados.

Su objetivo es expresar las probabilidades referidas a estos grupos en función de las correspondientes a grupos que se extinguen al primer fallecimiento. Enunciémoslos:

1.- Siendo

$$ {}_tp_{\overset{[m]}{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}}} $$

la probabilidad de que dentro de t años vivan exáctamente m cabezas, se verifica que

$$ {}_tp_{\overset{[m]}{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}}} = \sum_{j=m}^{n}(-1)^{j-m}\binom{j}{m}\,S_j \tag{10.20} $$

2.- Siendo ahora

$$ {}_tp_{\overset{m}{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}}} $$

la probabilidad de que dentro de t años vivan al menos m cabezas, se verifica que

$$ {}_tp_{\overset{m}{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}}} = \sum_{j=m}^{n}(-1)^{j-m}\binom{j-1}{m-1}\,S_j \tag{10.21} $$

Como casos particulares tenemos:

- Cuando $m = n$, $u = x_1x_2\,\dots\,x_n$ (el grupo se extingue al primer fallecimiento).

$$ {}_tp_{\overset{n}{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}}} = {}_tp_{x_1x_2\,\dots\,x_n} = S_n $$

- Cuando $m = 1$, $u = \overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}$ (el grupo se extingue al último fallecimiento),

$$ {}_tp_{\overset{1}{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}}} = {}_tp_{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\,S_j $$

Ejemplo 18 *Calculemos la probabilidad de que de un grupo de cuatro cabezas de edades x_1, x_2, x_3 y x_4 estén vivas exáctamente dos de ellas dentro de t años,*

$$ {}_tp_{\overset{[2]}{\overline{x_1x_2\,\dots\,x_n}}} $$

De acuerdo a (10.20)

$$ {}_tp_{\overset{[2]}{\overline{x_1x_2x_3x_4}}} = \sum_{j=2}^{4}(-1)^{j-2}\binom{j}{2}\,S_j = S_2 - \binom{3}{2}S_3 + \binom{4}{2}S_4 = $$

$$ = (\,{}_tp_{x_1x_2} + {}_tp_{x_1x_3} + {}_tp_{x_1x_4} + {}_tp_{x_2x_3} + {}_tp_{x_2x_4} + {}_tp_{x_3x_4})- $$

$$ -3(\,{}_tp_{x_1x_2x_3} + {}_tp_{x_1x_2x_4} + {}_tp_{x_2x_3x_4} + {}_tp_{x_1x_3x_4}) + 6\,{}_tp_{x_1x_2x_3x_4} $$

Ejemplo 19 *Calculemos la probabilidad de que de un grupo de cuatro cabezas de edades x_1, x_2, x_3 y x_4 estén vivas al menos dos de ellas dentro de t años,*

$$_tp_{\overline{x_1x_2x_3x_4}^{\,2}}$$

De acuerdo a (10.21)

$$_tp_{\overline{x_1x_2x_3x_4}^{\,2}} = \sum_{j=2}^{4}(-1)^{j-m}\binom{j-1}{2-1}S_j = S_2 - \binom{2}{1}S_3 + \binom{3}{1}S_4 =$$

$$= (\,_tp_{x_1x_2} + \,_tp_{x_1x_3} + \,_tp_{x_1x_4} + \,_tp_{x_2x_3} + \,_tp_{x_2x_4} + \,_tp_{x_3x_4}) -$$

$$-2(\,_tp_{x_1x_2x_3} + \,_tp_{x_1x_2x_4} + \,_tp_{x_2x_3x_4} + \,_tp_{x_1x_3x_4}) + 3\,_tp_{x_1x_2x_3x_4}$$

Finalmente, para el grupo

$$u = \overline{x_1x_2\ \dots\ x_n}^{\,m}$$

estudiemos la variable aleatoria vida residual T_u obteniendo su función de densidad. Ciertamente,

$$g_u(t) = \frac{d}{dt}(1 -\,_tp_{\overline{x_1x_2\ \dots\ x_n}^{\,m}}) = -\frac{d}{dt}(\,_tp_{\overline{x_1x_2\ \dots\ x_n}^{\,m}}) =$$

$$= \sum_{j=m}^{n}(-1)^{j-m}\binom{j-1}{m-1}(-S_j^{'}) \tag{10.22}$$

donde al ser

$$S_j = \sum \,_tp_{x_{i_1}\ \dots\ x_{i_j}}$$

resulta

$$-S_j^{'} = \sum(\,_tp_{x_{i_1}\ \dots\ x_{i_j}})\,(\mu_{x_{i_1}+t} + \dots + \mu_{x_{i_j}+t})$$

esto es, la suma de las funciones de densidad de la vida residual de los $\binom{n}{j}$ grupos de j cabezas que se extinguen al primer fallecimiento que se pueden formar con las n cabezas del grupo inicial.

Los dos casos particulares son:

- Cuando $m = n$, es $u = x_1x_2\ \dots\ x_n$, y

$$g_u(t) = (-S_n^{'})$$

- Cuando $m = 1$, es $u = \overline{x_1 x_2 \ldots x_n}$, y

$$g_u(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \, (-S_j')$$

Asimismo en cuanto al **número completo de años de vida hasta la muerte** K_u tenemos

$$P(K_u = k) = \; _{k/}q_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}^{\;m}} = \; _kp_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}^{\;m}} - \; _{k+1}p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_n}^{\;m}}$$

y sustituyendo las probabilidades de supervivencia según (10.21) se obtiene la probabilidad buscada en función de las correspondientes a grupos que se extinguen al primer fallecimiento.

10.5 Grupos compuestos

Hasta aquí hemos considerado grupos de cabezas individuales. En este epígrafe nos referiremos a grupos compuestos a su vez por grupos de cabezas individuales para los que calcularemos las probabilidades de muerte y supervivencia, expresándolas mediante las correspondientes a grupos que se extinguen al primer fallecimiento. Veamos algunos ejemplos:

1. Sea $u = vw$ con

$$v = x_1 x_2 \quad y \quad w = \overline{x_3 x_4}$$

Ciertamente u es un grupo que se extingue al primer fallecimiento, bien sea el del grupo v o el de w. A su vez v, formado por dos cabezas de edades x_1 y x_2, se extingue al primer fallecimiento mientras que w formado por dos cabezas de edades x_3 y x_4, se extingue al último fallecimiento.

Es claro que u está vivo mientras que las dos cabezas que forman v y al menos una de las que forma w lo estén.

Calculemos la probabilidad de que u sobreviva t años más,

$$_tp_u$$

Es claro que

$$_tp_u = \; _tp_{vw} = \; _tp_v \; _tp_w$$

A su vez

$$_tp_v = \; _tp_{x_1 x_2} = \; _tp_{x_1} \; _tp_{x_2}$$

y

$$ {}_tp_w = {}_tp_{\overline{x_3x_4}} = {}_tp_{x_3} + {}_tp_{x_4} - {}_tp_{x_3x_4} $$

Por tanto

$$ {}_tp_u = {}_tp_{x_1x_2:\overline{x_3x_4}} = ({}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2})({}_tp_{x_3} + {}_tp_{x_4} - {}_tp_{x_3}\ {}_tp_{x_4}) = $$

$$ = {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2}\ {}_tp_{x_3} + {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2}\ {}_tp_{x_4} - {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2}\ {}_tp_{x_3}\ {}_tp_{x_4} $$

2. Sea ahora $u = \overline{vw}$ con

$$ v = x_1x_2 \quad y \quad w = \overline{x_3x_4} $$

Calculemos la probabilidad de que u sobreviva t años más,

$$ {}_tp_u $$

Ciertamente

$$ {}_tp_u = {}_tp_{\overline{vw}} = {}_tp_v +_t p_w - {}_tp_{vw} $$

y recordando el caso anterior

$$ {}_tp_v = {}_tp_{x_1x_2} = {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2} $$

$$ {}_tp_w = {}_tp_{\overline{x_3x_4}} = {}_tp_{x_3} + {}_tp_{x_4} - {}_tp_{x_3x_4} $$

$$ {}_tp_{vw} = {}_tp_{x_1x_2:\overline{x_3x_4}} = {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2}\ {}_tp_{x_3} + {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2}\ {}_tp_{x_4} - {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2}\ {}_tp_{x_3}\ {}_tp_{x_4} $$

Por tanto

$$ {}_tp_u = {}_tp_{\overline{x_1x_2:\overline{x_3x_4}}} = {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_3} + {}_tp_{x_4} - {}_tp_{x_3x_4} - $$

$$ - {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2}\ {}_tp_{x_3} - {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2}\ {}_tp_{x_4} + {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2}\ {}_tp_{x_3}\ {}_tp_{x_4} $$

3. Sea $u = \overline{vw}$ con

$$ v = x_1x_2 \quad y \quad w = x_3x_4 $$

Calculemos ${}_tp_u$. Ciertamente

$$ {}_tp_u = {}_tp_{\overline{vw}} = {}_tp_v +_t p_w - {}_tp_{v:w} $$

Y recordando el caso anterior

$$ {}_tp_v = {}_tp_{x_1x_2} = {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2} $$

$$ {}_tp_w = {}_tp_{x_3x_4} = {}_tp_{x_3}\ {}_tp_{x_4} $$

$$ {}_tp_{\overline{vw}} = {}_tp_{\overline{x_1x_2:x_3x_4}} = {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_3}\ {}_tp_{x_4} - {}_tp_{x_1}\ {}_tp_{x_2}\ {}_tp_{x_3}\ {}_tp_{x_4} $$

10.6 Ordenes de fallecimiento (funciones contingentes).

Conculimos este capítulo estudiando las probabilidades de que dentro de un grupo de varias cabezas no sólo se produzca el fallecimiento de alguna o varias de ellas sino que además acaezcan en determinado orden.

Con la finalidad de fundamentar sólidamente el procedimiento de cálculo, consideremos en primer lugar un grupo de dos cabezas de edades x_1 y x_2 con vidas residuales independientes (así la densidad conjunta es igual al producto de las densidades de cada una de las cabezas).

Consideremos las siguientes probabilidades:

1.- Probabilidad de que x_1 fallezca antes que x_2, que representaremos como ${}_{\infty}q_{\overset{1}{x_1}x_2}$.

Ciertamente ésta no es más que la probabilidad de que $T_{x_1} \leq T_{x_2}$.

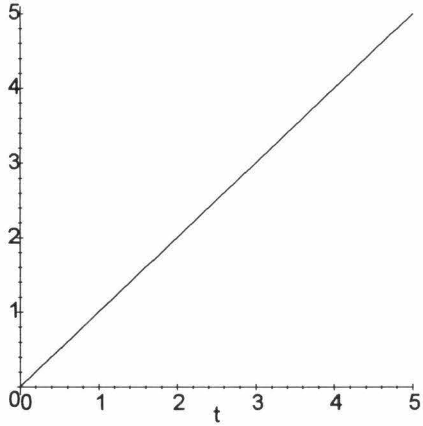

Figura 1

Si nos fijamos en la figura 1, en la que en el eje de abcisas (letra t) se representa la vida residual x_1 y en el de ordenadas la de x_2, el suceso del cual queremos calcular la probabilidad es el que se corresponde con el conjunto

$$A = \{(t, s) \in R^2 / \ 0 \leq t < \infty, \ t \leq s < \infty\}$$

Así

$${}_{\infty}q_{\overset{1}{x_1}x_2} = \iint\limits_{A} {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ {}_sp_{x_2}\ \mu_{x_2+s}\ ds\ dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_t^\infty {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ {}_sp_{x_2}\ \mu_{x_2+s}\ ds\ dt = \int_0^\infty {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ (\int_t^\infty {}_sp_{x_2}\ \mu_{x_2+s}\ ds)\ dt =$$

$$= \int_0^\infty {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ {}_tp_{x_2}\ dt = \int_0^\infty {}_tp_{x_1:x_2}\ \mu_{x_1+t}\ dt$$

Hagamos notar que para Δt cercano a cero, ${}_tp_{x_1x_2}\ \mu_{x_1+t}\ \Delta t$ puede interpretarse como la probabilidad de que x_1 y x_2 vivan t años más por la probabilidad de que x_1 fallezca en el intervalo $(t, t+\Delta t)$. Razonando en estos términos es claro que la última integral representa la probabilidad ${}_\infty q_{\overset{1}{x_1}x_2}$.

2.- Probabilidad de que x_1 fallezca antes que x_2, pero antes de que transcurran n años ${}_nq_{\overset{1}{x_1}:x_2}$.

Ahora

$$A = \{(t, s) \in R^2/\ 0 \leq t \leq n,\ t \leq s < \infty\}$$

y, por tanto,

$${}_nq_{\overset{1}{x_1}x_2} = \int_0^n \int_t^\infty {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ {}_sp_{x_2}\ \mu_{x_2+s}\ ds\ dt = \int_0^n {}_tp_{x_1:x_2}\ \mu_{x_1+t}\ dt$$

Notemos que en este caso no es necesario que fallezca x_2.

3.- Probabilidad de que x_2 fallezca después que x_1, pero antes de que transcurran n años ${}_nq_{x_1\overset{2}{x_2}}$.

Ahora

$$A = \{(t, s) \in R^2/\ 0 \leq s \leq n,\ 0 \leq t \leq s\}$$

Por tanto

$${}_nq_{x_1\overset{2}{x_2}} = \int_0^n (\int_0^s {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ {}_sp_{x_2}\ \mu_{x_2+s}\ dt)\ ds = \int_0^n {}_sp_{x_2}\ \mu_{x_2+s}\ (\int_0^s {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ dt)\ ds =$$

$$= \int_0^n {}_tq_{x_1}\ {}_tp_{x_2}\ \mu_{x_2+t}\ dt$$

Es claro que

$${}_nq_{x_1\overset{2}{x_2}} = \int_0^n (1 - {}_tp_{x_1})\ {}_tp_{x_2}\ \mu_{x_2+t}\ dt = {}_nq_{x_2} - {}_nq_{x_1\overset{1}{x_2}}$$

Con la finalidad de facilitar los cálculos se trata de expresar estas probabilidades en función de las probabilidades dependientes del primer fallecimiento ya que estas últimas pueden ser obtenidas bien aceptando alguna de las leyes de mortalidad de Gompertz o Makeham (véase ejercicio 2) o recurriendo a alguna técnica numérica de integración.

Veamos algunos ejemplos para más de dos cabezas. Ahora, dada la dificultad de establecer las probabilidades mediante integrales múltiples, razonaremos en términos infinitesimales.

1. Para un grupo de tres cabezas de edades x_1, x_2 y x_3, calculemos

$$ {}_nq_{x_1\overset{2}{x_2}x_3} $$

esto es, la probabilidad de que antes de n años fallezca x_2 en segundo lugar.

Lógicamente, ha de fallecer x_2 cuando esté viva una sola de las cabezas del grupo x_1x_3. Así,

$$ {}_nq_{x_1\overset{2}{x_2}x_3} = \int_0^n {}_tp_{\overline{\underset{[1]}{x_1:x_3}}}\; {}_tp_{x_2}\, \mu_{x_2+t}\, dt = \int_0^n ({}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_3} - 2\, {}_tp_{x_1:x_3})\, {}_tp_{x_2}\, \mu_{x_2+t}\, dt = $$

$$ = \int_0^n {}_tp_{x_1}\, {}_tp_{x_2}\, \mu_{x_2+t}\, dt + \int_0^n {}_tp_{x_3}\, {}_tp_{x_2}\, \mu_{x_2+t}\, dt - 2\int_0^n {}_tp_{x_1:x_3}\, {}_tp_{x_2}\, \mu_{x_2+t}\, dt = $$

$$ = {}_nq_{x_1\overset{1}{x_2}} + {}_nq_{\overset{1}{x_2}x_3} - 2\, {}_nq_{x_1\overset{1}{x_2}x_3} $$

2. Para un grupo de tres cabezas de edades x_1, x_2 y x_3, calculemos

$$ {}_nq_{x_1\overset{3}{x_2}x_3} $$

esto es, la probabilidad de que antes de n años fallezca x_2 en tercer lugar.

Ahora x_3 ha de fallecer cuando x_1 y x_2 hayan fallecido, por ello,

$$ {}_nq_{x_1\overset{3}{x_2}x_3} = \int_0^n {}_tq_{x_1}\, {}_tq_{x_3}\, {}_tp_{x_2}\, \mu_{x_2+t}\, dt = \int_0^n (1 - {}_tp_{x_1})\,(1 - {}_tp_{x_3})\, {}_tp_{x_2}\, \mu_{x_2+t}\, dt = $$

$$ = \int_0^n {}_tp_{x_2}\, \mu_{x_2+t}\, dt - \int_0^n {}_tp_{x_1}\, {}_tp_{x_2}\, \mu_{x_2+t}\, dt - $$

$$ - \int_0^n {}_tp_{x_3}\, {}_tp_{x_2}\, \mu_{x_2+t}\, dt + \int_0^n {}_tp_{x_1:x_3}\, {}_tp_{x_2}\, \mu_{x_2+t}\, dt = $$

$$ = {}_nq_{x_1} - {}_nq_{x_1\overset{1}{x_2}} + {}_nq_{\overset{1}{x_2}x_3} + {}_nq_{x_1\overset{1}{x_2}x_3} $$

3. Consideremos ahora un grupo de cuatro cabezas de edades x_1, x_2, x_3, x_4, y calculemos

$$ {}_nq_{\overset{1}{x_1}:\overline{x_2x_3x_4}} $$

esto es, la probabilidad de que antes de n años fallezca x_1 previamente a la extinción del grupo $\overline{x_2x_3x_4}$.

Tenemos

$$ {}_nq_{\overset{1}{x_1}:\overline{x_2x_3x_4}} = \int_0^n {}_tp_{\overline{x_2x_3x_4}}\ {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ dt = $$

$$ = \int_0^n (\ {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_4} - {}_tp_{x_2:x_3} - {}_tp_{x_2:x_4} - {}_tp_{x_3:x_4} + {}_tp_{x_2:x_3:x_4})\ {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ dt = $$

$$ = {}_nq_{\overset{1}{x_1}x_2} + {}_nq_{\overset{1}{x_1}x_3} + {}_nq_{\overset{1}{x_1}x_4} - {}_nq_{\overset{1}{x_1}x_2x_3} - {}_nq_{\overset{1}{x_1}x_2x_4} - {}_nq_{\overset{1}{x_1}x_3x_4} + {}_nq_{\overset{1}{x_1}x_2x_3x_4} $$

4. Para un grupo de tres cabezas de edades x_1, x_2 y x_3,calculemos

$$ {}_nq_{\underset{1}{x_1}\overset{2}{x_2}x_3} $$

esto es, la probabilidad de que antes de n años fallezca (x_2) en segundo lugar habiendo fallecido (x_1) previamente.

$$ {}_nq_{\underset{1}{x_1}\overset{2}{x_2}x_3} = \int_0^n {}_tq_{x_1}\ {}_tp_{x_2x_3}\ \mu_{x_2+t}\ dt = \int_0^n (1 - {}_tp_{x_1})\ {}_tp_{x_2x_3}\ \mu_{x_2+t}\ dt = $$

$$ = {}_nq_{\overset{1}{x_2}x_3} - {}_nq_{x_1\overset{1}{x_2}x_3} $$

10.7 Ejercicios

1.- Pruebe que

$$ {}_nq_{x_1\overset{2}{x_2}} \leq {}_nq_{\overset{1}{x_1}x_2} $$

Solución:

Basta tener en cuenta que una expresión alternativa para ${}_nq_{x_1\overset{2}{x_2}}$ es

$$ {}_nq_{x_1\overset{2}{x_2}} = \int_0^n (\int_t^n {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ {}_sp_{x_2}\ \mu_{x_2+s}\ ds)\ dt = $$

$$ = \int_0^n {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t} (\int_t^n {}_sp_{x_2}\ \mu_{x_2+s}\ ds)\ dt = \int_0^n {}_tp_{x_1}\ \mu_{x_1+t}\ (\ {}_tp_{x_2} - {}_np_{x_2})\ dt = $$

$$ = {}_nq_{\overset{1}{x_1}:x_2} - {}_np_{x_1}\ {}_np_{x_2} $$

2.- Calcule ${}_nq_{\overset{1}{x_1}x_2}$ cuando la mortalidad de cada una de las cabezas sigue la ley de Gompertz o de Makeham.

Solución:

Sabemos que

$$ {}_nq_{\overset{1}{x_1}x_2} = \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ \mu_{x_1+t}\ dt $$

y recordando los resultados del apartado 10.2.5, tenemos:

a) En el caso de que la mortalidad de ambas cabezas siga una ley de Gompertz con el mismo parámetro,

$$
\begin{aligned}
{}_nq_{\overset{1}{x_1}x_2} &= \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ \mu_{x_1+t}\ dt = \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ B\ c^{x_1+t}\ dt = \\
&= \frac{c^{x_1}}{c^{x_1}+c^{x_2}} \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ B\ (c^{x_1}+c^{x_2})\ c^t\ dt = \\
&= \frac{c^{x_1}}{c^{x_1}+c^{x_2}} \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ (B\ c^{x_1+t}+B\ c^{x_2+t})\ dt = \\
&= \frac{c^{x_1}}{c^{x_1}+c^{x_2}} \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ (\ \mu_{x_1+t}+\ \mu_{x_2+t})\ dt = \frac{c^{x_1}}{c^{\alpha}}\ {}_nq_{\alpha}
\end{aligned}
$$

donde α es la solución de la ecuación

$$c^{\alpha} = c^{x_1} + c^{x_2}$$

b) En el caso de que la mortalidad de ambas cabezas siga una ley de Makeham con los mismo parámetros.

$$
\begin{aligned}
{}_nq_{\overset{1}{x_1}:x_2} &= \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ \mu_{x_1+t}\ dt = \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ (A+B\ c^{x_1+t})\ dt = \\
&= A \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ dt + \frac{c^{x_1}}{c^{x_1}+c^{x_2}} \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ B\ (c^{x_1}+c^{x_2})\ c^t\ dt - \\
&\quad - \frac{2\ A\ c^{x_1}}{c^{x_1}+c^{x_2}} \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ dt + \frac{2\ A\ c^{x_1}}{c^{x_1}+c^{x_2}} \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ dt = \\
&= A\ (1-\frac{2\ c^{x_1}}{c^{x_1}+c^{x_2}}) \int_0^n {}_tp_{x_1:x_2}\ dt + \frac{c^{x_1}}{c^{x_1}+c^{x_2}} \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ (2\ A+B\ (c^{x_1}+c^{x_2})\ c^t)\ dt = \\
&= A\ (1-\frac{c^{x_1}}{c^{\alpha}})\ \overset{o}{e}_{\alpha:\alpha:\overline{n}|} + \frac{c^{x_1}}{2\ c^{\alpha}}\ {}_nq_{\alpha:\alpha}
\end{aligned}
$$

donde α es la solución de la ecuación

$$2\ c^{\alpha} = c^{x_1} + c^{x_2}$$

Notemos que

$$\int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ (2\ A+B\ (c^{x_1}+c^{x_2}))\ c^t\ dt = \int_0^n {}_tp_{x_1x_2}\ (\ \mu_{x_1+t}+\ \mu_{x_2+t})dt$$

3.-De las tablas GKM80 y GKF80 se obtienen los siguientes datos

x	$l_x\ (GKM80)$	x	$l_x\ (GKF80)$
40	967843.22	35	978042.28
41	965692.86	36	976831.86
42	963325.27	37	975611.02
43	960712.63	38	974379.79
44	957826.14	39	973136.60
45	954636.15	40	971872.23
46	951112.19	41	970570.36
47	947223.18	42	969213.25
48	942937.51	43	967781.84

Para un varón de 40 años y una mujer de 35, calcule las siguientes probabilidades:

a)

$${}_5p_{40:35}$$

b)

$${}_7q_{40:35}$$

c)

$${}_{4/}q_{40:35}$$

d)

$${}_5p_{\overline{40:35}}$$

e)

$${}_7q_{\overline{40:35}}$$

f)

$${}_{4/}q_{\overline{40:35}}$$

Solución:

En a), b) y c) hemos de calcular probabilidades para un grupo de dos cabezas $40:35$ (que se extingue al primer fallecimiento). Elementalmente,

a)

$${}_5p_{40:35} = {}_5p_{40}\ {}_5p_{35} = \frac{954636.15}{967843.22}\ \frac{971872.23}{978042.28} = 0.98013163$$

b)

$${}_7q_{40:35} = 1 - {}_7p_{40:35} = 1 - {}_7p_{40}\ {}_7p_{35} =$$

$$= 1 - \frac{947223.18}{967843.22}\frac{969213.25}{978042.28} = 0.03014006$$

c)

$$_{4/}q_{40:35} = {}_4p_{40:35}\ q_{44:39} = \frac{957826.14}{967843.22}\frac{973136.60}{978042.28}(1 - \frac{954636.15}{957826.14}\frac{971872.23}{973136.60}) =$$

$$= 0.0045545588$$

d)

$$_5p_{\overline{40:35}} = 1 - {}_5q_{\overline{40:35}} = 1 - {}_5q_{40}\ {}_5q_{35} = 1 - (1 - {}_5p_{40})(1 - {}_5p_{35}) =$$

$$1 - (1 - \frac{954636.15}{967843.22})\ (1 - \frac{971872.23}{978042.28}) = 0.9801316$$ 0,959814

e)

$$_7q_{\overline{40:35}} = {}_7q_{40}\ {}_7q_{35} = (1 - {}_7p_{40})\ (1 - {}_7p_{35}) =$$

947223,18 969213,25

$$(1 - \frac{954636.15}{967843.22})\ (1 - \frac{971872.23}{978042.28}) = 0.00240054$$

f)

$$_{4/}q_{\overline{40:35}} = {}_4p_{\overline{40:35}} - {}_5p_{\overline{40:35}} = {}_{4/}q_{40} + {}_{4/}q_{35} - {}_{4/}q_{40:35} = 0.000034172$$

ya que

$$_{4/}q_{40} = \frac{l_{44} - l_{45}}{l_{40}} = \frac{957826.14 - 954636.15}{967843.22} = 0.003295978$$

$$_{4/}q_{35} = \frac{l_{39} - l_{40}}{l_{35}} = \frac{973136.60 - 971872.23}{978042.28} = 0.001292755$$

y

$$_{4/}q_{40:35} = 0.0045545588$$

4.- Siendo ahora dos varones de 40 y 42 años y una mujer de 35, calcule

a)

$$_5p_{\overline{40:42:35}}$$

b)

$$_5p_{\overline{40:42:35}}^{[2]}$$

c)

$$ {}_{5}p^{\;2}_{\overline{40:42:35}} $$

Solución:

Calculemos en primer lugar, usando la tabla GKM80, las probabilidades

$$ {}_{5}p_{40} = \frac{l_{45}}{l_{40}} = \frac{954636.15}{967843.22} = 0.9863541225 $$

y

$$ {}_{5}p_{42} = \frac{l_{47}}{l_{42}} = \frac{947223.18}{963325.27} = 0.9832848878 $$

y usando la GKF80 la probabilidad

$$ {}_{5}p_{35} = \frac{l_{40}}{l_{35}} = \frac{971872.23}{978042.28} = 0.9936914281 $$

Siendo

$$ S_1 = {}_{5}p_{40} + {}_{5}p_{42} + {}_{5}p_{35} = 2.963330438 $$

$$ S_2 = {}_{5}p_{40}\;{}_{5}p_{42} + {}_{5}p_{40}\;{}_{5}p_{35} + {}_{5}p_{40}\;{}_{5}p_{35} = 2.927080503 $$

y

$$ S_3 = {}_{5}p_{40}\;{}_{5}p_{42}\;{}_{5}p_{35} = 0.9637486263 $$

tenemos:

a)

$$ {}_{5}p_{\overline{40:42:35}} = S_1 - S_2 + S_3 = 0.9999985613 $$

b)

$$ {}_{5}p^{\;[2]}_{\overline{40:42:35}} = S_2 - 3S_3 = 0.035834624 $$

c)

$$ {}_{5}p^{\;2}_{\overline{40:42:35}} = S_2 - 2S_3 = 0.999583250 $$

Notemos que

$$ {}_{5}p^{\;2}_{\overline{40:42:35}} = {}_{5}p^{\;[2]}_{\overline{40:42:35}} + {}_{5}p^{\;[3]}_{\overline{40:42:35}} $$

donde

$$ {}_{5}p^{\;[3]}_{\overline{40:42:35}} = {}_{5}p_{40:42:35} = {}_{5}p_{40}\;{}_{5}p_{42}\;{}_{5}p_{35} = 0.9637486263 $$

5.- Sean dos cabezas de 30 y 50 años cuyas leyes de mortalidad vienen dadas por los tantos de mortalidad

$$\mu_x = \frac{1}{100-x} \quad y \quad \mu_x = \frac{1}{110-x}$$

respectivamente.

a) Calcúlense las esperanzas de vida $\overset{o}{e}_{30:50}$ **y** $\overset{o}{e}_{\overline{30:50}}$.

b) Calcule ${}_{\infty}q_{\overset{1}{30}:50}$

Solución:

a) Notemos que los tantos dados se corresponden con la ley de De Moivre. De ésta sabemos que si

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}$$

entonces

$$_tp_x = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

Sabemos por (10.9) que

$$\overset{o}{e}_{30:50} = \int_0^\infty t\ g_{30:50}(t)\ dt = \int_0^\infty {}_tp_{30:50}\ dt = \int_0^\infty {}_tp_{30}\ {}_tp_{50}\ dt =$$

$$= \int_0^{60} (1 - \frac{t}{70})\ (1 - \frac{t}{60})\ dt = 21.42$$

Es razonable haber tomado el extremo superior del intervalo de integración $mín(100-30, 110-50) = 60$ ya que el grupo se extingue al primer fallecimiento y con toda seguridad para un valor de t mayor o igual a 60 la segunda cabeza habrá fallecido y por ello también el grupo.

Asimismo por (10.18)

$$\overset{o}{e}_{\overline{30:50}} = \int_0^\infty {}_tp_{\overline{30:50}}\ dt = \int_0^\infty {}_tp_{30} + {}_tp_{50} - {}_tp_{30:50}\ dt =$$

$$= \overset{o}{e}_{30} + \overset{o}{e}_{50} - \overset{o}{e}_{30:50} = 35 + 30 - 21.42 = 43.58$$

ya que

$$\overset{o}{e}_{30} = \int_0^{70} (1 - \frac{t}{70})\ dt = 35$$

y

$$\overset{o}{e}_{50} = \int_0^{60} (1 - \frac{t}{60})\ dt = 30$$

b) Ciertamente

$$
{}_{\infty}q_{\overset{1}{30}:50} = \int_0^{60} {}_tp_{50}\ {}_tp_{30}\ \mu_{30+t}\ dt = \int_0^{60} (1 - \frac{t}{60})\ \frac{1}{70}\ dt =
$$

$$
= \int_0^{60} \frac{1}{70}\ dt - \int_0^{60} \frac{t}{4200}\ dt = 0.42857
$$