

Instituto de Ciencias del Seguro

**INVESTIGACIONES  
EN SEGUROS  
Y GESTIÓN DE RIESGOS:  
RIESGO 2009**

Antonio Heras, José Luis Vilar  
y Montserrat Guillén  
Editores

PONENCIAS DEL III CONGRESO “RIESGO 2009”

18 y 19 de junio  
Madrid (España)



FUNDACIÓN MAPFRE no se hace responsable del contenido de esta obra, ni el hecho de publicarla implica conformidad o identificación con la opinión del autor o autores.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin el permiso escrito del autor o del editor.

© 2009, FUNDACIÓN MAPFRE  
Carretera de Pozuelo 52  
28220 Majadahonda. Madrid

[www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro)  
[publicaciones.ics@mapfre.com](mailto:publicaciones.ics@mapfre.com)

ISBN: 978-84-9844-158-1  
Depósito Legal SE-3326-2009

## PRESENTACIÓN

FUNDACIÓN MAPFRE desarrolla actividades de interés general para la sociedad en distintos ámbitos profesionales y culturales, así como acciones destinadas a la mejora de las condiciones económicas y sociales de las personas y sectores menos favorecidos de la sociedad. En este marco, el Instituto de Ciencias del Seguro de FUNDACIÓN MAPFRE promueve y desarrolla actividades educativas y de investigación en los campos del seguro y de la gerencia de riesgos.

En el área educativa, su actuación abarca la formación académica de postgrado y especialización, desarrollada en colaboración con la Universidad Pontificia de Salamanca, así como cursos y seminarios para profesionales, impartidos en España e Iberoamérica. Estas tareas se extienden hacia otros ámbitos geográficos mediante la colaboración con instituciones españolas y de otros países, así como a través de un programa de formación a través de Internet.

El Instituto promueve ayudas a la investigación en las áreas científicas del riesgo y del seguro y mantiene un Centro de Documentación especializado en seguros y gerencia de riesgos, que da soporte a sus actividades.

Asimismo, el Instituto también promueve y elabora informes periódicos y monografías sobre el seguro y la gerencia de riesgos, con objeto de contribuir a un mejor conocimiento de dichas materias. En algunos casos estas obras sirven como referencia para quienes se inician en el estudio o la práctica del seguro, y en otros como fuentes de información para profundizar en materias específicas.

Dentro de estas actividades se encuadra la publicación de este cuaderno que recoge los textos presentados en la III Reunión de Investigación en Seguros y Gestión de Riesgos, RIESGO 2009, celebrada en Madrid los días 18 y 19 de junio.



## ÍNDICE

PRÓLOGO .....	1
Antonio Heras, José Luis Vilar y Montserrat Guillén	
Índice de autores .....	5
I. METODOLOGÍA .....	13
Ponencia 1. Eva Boj, M <sup>a</sup> Mercé Claramunt, Anna Esteve y Josep Fortiana <i>Credit Scoring basado en distancias: coeficientes de influencia de los predictores</i> .....	15
Ponencia 2. Catalina Bolancé y Montserrat Guillén <i>Estimación núcleo transformada para aproximar el riesgo de pérdida</i> .....	23
Ponencia 3. Z. Díaz, E. del Pozo y M.J. Segovia <i>Revisión de métodos de Inteligencia Artificial aplicados a la predicción de quiebras de empresas españolas de seguros</i> .....	47
Ponencia 4. M.P. Fernández-Sánchez, Emilio Gómez-Deniz y A. Hernández- Bastida <i>Modelo colectivo de riesgo Poisson-Lindley y exponencial para riesgo operacional</i> .....	79
Ponencia 5. V.I. García, Emilio Gómez Deniz y F.J. Vázquez-Polo <i>Una generalización de la distribución normal con aplicaciones en la Teoría del Riesgo Colectivo</i> .....	95

Ponencia 6. Emilio Gómez-Deniz, Enrique Calderín-Ojeda y José María Sarabia <i>La clase de distribuciones continuas Gamma Generalizada Inversa Gaussiana y su aplicación en problemas de tarificación</i> .....	115
Ponencia 7. Antonio Heras, José Luis Vilar, José Antonio Gil y Beatriz Balbás <i>Cálculo de primas recargadas mediante valor en riesgo condicional</i> .....	131
Ponencia 8. A. Hernández-Bastida, M. Martel-Escobar y F. J. Vázquez-Polo <i>Estudio de la sensibilidad de las primas bayesianas en el modelo colectivo compuesto ante alejamientos de la hipótesis de independencia entre los parámetros del modelo</i> .....	147
Ponencia 9. Iván Iturricastillo y J. Iñaki de la Peña Revisión del test de Rachas .....	163
Ponencia 10. J.M. Pérez-Sánchez, Emilio Gómez-Deniz y A. Hernández Bastida <i>Bayes premium in a compound geometric model</i> .....	179
Ponencia 11. José María Sarabia, Faustino Prieto y Emilio Gómez-Deniz <i>Análisis de riesgos con la distribución Pareto Estable Positiva</i> .....	191
II. SEGUROS GENERALES Y REASEGURO .....	207
Ponencia 12. Mercedes Ayuso, Lluís Bermúdez y Miguel Santolino <i>Factores influyentes en el coste de liquidación de los daños personales derivados de accidentes de circulación ante la futura reforma del baremo</i> .....	209
Ponencia 13. Alejandro Balbás, Beatriz Balbás y Antonio Heras <i>Estudio de la optimalidad de los contratos de reaseguro respecto a las medidas generales del riesgo</i> .....	229

Ponencia 14. Edinson Caicedo Cerezo <i>Implicaciones del uso generalizado del modelo de regresión logística en la detección de fraude en seguros de automóviles</i> .....	247
Ponencia 15. Montserrat Guillén y Ana María Pérez-Marín <i>Riesgo de negocio en asegurados con múltiples contratos</i> .....	281
Ponencia 16. Julio Hernández y Piedad Tolmos <i>Un análisis comparativo de una SVM y un modelo Logit en un problema de clasificación de asegurados</i> .....	317
Ponencia 17. M.M. Mármol, M.M. Claramunt y A. Castañer <i>Efectos de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral en la probabilidad de ruina del asegurador</i> .....	331
Ponencia 18. M.A. Pons y F.J. Sarrasi <i>Descripción dinámica de la solvencia de la cuenta de experiencia en un reaseguro Finite Risk</i> .....	345
Ponencia 19. J.R. Sánchez y José Luis Vilar <i>Bayesian approach and Quasi-Likelihood functions applied to loss reserving</i> .....	375
Ponencia 20. Piedad Tolmos <i>Selección de factores de riesgo mediante árboles de clasificación: influencia de la variable Bonus-Malus</i> .....	395
III. GESTIÓN DE RIESGOS .....	413
Ponencia 21. Raquel Balbás <i>Valoración y cobertura de derivados de volatilidad</i> .....	415
Ponencia 22. Lluís Bermúdez, Faustino Prieto y José María Sarabia <i>Valoración de derivados de crédito mediante distribuciones multivariantes tipo Marshall-Olkin</i> .....	441

Ponencia 23. Ricardo Cao, Juan M. Vilar and Andrés Devia <i>Applications of survival analysis to credit risk modeling</i> .....	451
Ponencia 24. Pierre Devolder e Inmaculada Domínguez <i>Equity risk and liability duration: a solvency point of view</i> .....	465
Ponencia 25. Pablo Durán, Luis A. Otero y Sara Fernández <i>Análisis del riesgo de tipos de interés en Solvencia II: modelos internos frente al modelo estándar</i> .....	481
Ponencia 26. Pablo Durán, Luis A. Otero y Alfonso Rodríguez <i>Análisis comparativo del Riesgo de Spread: modelos internos frente al modelo estándar QIS4</i> .....	511
Ponencia 27. Aurea Grané and Helena Veiga <i>Outliers and the estimation of minimum capital risk requirements</i> ...	541
Ponencia 28. Enrique José Jiménez, José Manuel Feria y José Luis Martín <i>El umbral de la pérdida operacional: una revisión crítica a la propuesta regulatoria</i> .....	547
Ponencia 29. M <sup>a</sup> Dolores Oliver, Ana I. Irimia y Filippo di Pietro <i>Un enfoque no parametrico para avanzar en la medición del riesgo operacional en entidades financieras de tamaño medio</i> .....	567
Ponencia 30. Luis A. Otero, Pablo Durán, David Rodeiro y Milagros Vivel <i>La determinación de las necesidades de capital a través de modelos Internos frente al modelo estándar propuesto en Solvencia II (QIS4): Implicaciones para el sector asegurador español</i> .....	607
Ponencia 31. M <sup>a</sup> Victoria Rivas y Javier Montoya <i>Modelo dinámico de gestión y cuantificación del riesgo operacional en el marco de Solvencia II</i> .....	643

IV. DEPENDENCIA Y ENVEJECIMIENTO .....	665
Ponencia 32. J. E. Devesa, M.M. Devesa, I. Domínguez, B. Encinas y R. Meneu <i>Análisis por Comunidades Autónomas de la población inmigrante que cotiza en 2005 al sistema de pensiones español</i> .....	667
Ponencia 33. Cruz Ramírez, Paloma Fernández y Carmen Cuéllar <i>Diseño de seguros para la dependencia. Control de riesgos y criterios de selección</i> .....	699
Ponencia 34. Carlos Vidal-Meliá y M <sup>a</sup> del Carmen Boado-Penas <i>El balance actuarial del sistema de reparto. Modelo “sueco” versus “americano”</i> .....	731
COLECCIÓN “Cuadernos de la Fundación” .....	763
Instituto de Ciencias del Seguro	



## PRÓLOGO

La importancia de los métodos cuantitativos en la medición y gestión del riesgo está creciendo de forma espectacular en todo el mundo, y por supuesto también en España. Cualquier observador puede atestiguar el aumento en el número de artículos en revistas científicas dedicados en exclusiva a estos temas. Las especiales características de la recesión económica que estamos padeciendo tanto a nivel mundial como nacional, y entre cuyas causas se incluye en opinión de muchos una deficiente gestión del riesgo, hacen que estos temas tan especializados hayan llegado incluso a ser objeto de conversación a nivel de calle. Términos como “cobertura” y “volatilidad” se vuelven habituales en muchos artículos periodísticos. La importancia del análisis cuantitativo riguroso frente a la mera descripción u opinión se hace cada vez más evidente.

Aunque la universidad española tiene un gran número de investigadores dedicados al estudio del riesgo tanto financiero como actuarial, no hay demasiados congresos a nivel nacional donde puedan discutir sus ideas, particularmente en el último campo. En el año 2005, un grupo de profesores de la Universidad de Barcelona pensó en paliar esta carencia organizando un congreso dedicado en exclusiva al estudio cuantitativo del riesgo, especialmente (aunque no exclusivamente) en el negocio asegurador. El congreso, denominado “Primera Reunión de Investigación en Seguros y Gestión de Riesgos (RIESGO 2005)”, tuvo muy buena acogida y reunió a investigadores de un buen número de universidades en un fructífero intercambio de ideas. Dos años después, un grupo de profesores de la Universidad de Cantabria organizó en Castro-Urdiales la “Segunda Reunión de Investigación en Seguros y Gestión de Riesgos (RIESGO 2007), en donde se mantuvo la buena acogida y el alto nivel de los trabajos discutidos.

El presente libro recoge las ponencias presentadas en la tercera convocatoria del congreso (RIESGO 2009), celebrada en las instalaciones

de la FUNDACIÓN MAPFRE en El Plantío (Madrid) en el mes de junio de 2009. Se trata de treinta y cuatro trabajos que dan una idea precisa del interés que despierta actualmente en España el estudio de los problemas relacionados con los seguros y la gestión del riesgo, y del rigor con el que se están abordando estas investigaciones. Los setenta autores de los trabajos proceden en su mayor parte de universidades españolas, aunque existen también entre ellos investigadores procedentes del mundo empresarial, lo que facilita el necesario y fructífero diálogo entre la universidad y la empresa. Los artículos recogidos en el presente volumen exponen los resultados de investigaciones originales sobre un gran número de temas, que hemos clasificado en cuatro grandes apartados: Metodología, Seguros Generales y Reaseguro, Gestión de Riesgos y Dependencia y Envejecimiento. Se trata de una clasificación que hemos empleado en ediciones anteriores del congreso y que recoge bastante bien el espíritu de los trabajos presentados, aunque, como toda partición, a veces resulte algo caprichosa, ya que algunos de los trabajos podrían clasificarse en más de una categoría.

Queremos agradecer el apoyo recibido de numerosas personas e instituciones que han hecho posible la realización de este proyecto. La Universidad Complutense de Madrid y el Ministerio de Ciencia y Tecnología nos han proporcionado una inestimable ayuda técnica y financiera. Asimismo hemos recibido un gran apoyo del Instituto de Actuarios Españoles y en especial de su presidente, Don Julián Oliver. Y, por supuesto, queremos agradecer especialmente la colaboración desinteresada de la FUNDACIÓN MAPFRE, cediéndonos sus instalaciones y financiando la edición de este libro, así como un premio al mejor artículo presentado en el congreso. Queremos expresar un reconocimiento especial a Don Filomeno Mira, vicepresidente primero de la FUNDACIÓN MAPFRE y presidente del Instituto de Ciencias del Seguro; a D<sup>a</sup> Mercedes Sanz, directora general de dicho Instituto; a Doña María José Albert, decana de la Facultad de Ciencias del Seguro de la Universidad Pontificia de Salamanca; y a Doña Ana Sojo y al resto de los miembros del Departamento de Publicaciones del Instituto.

Queremos agradecer también el trabajo desinteresado de los miembros de los comités científico y organizador del congreso. Creemos

que el esfuerzo realizado ha merecido la pena. Y estamos seguros de que este esfuerzo tendrá continuidad en futuras ediciones de congresos RIESGO que seguirán contribuyendo al desarrollo científico de las disciplinas dedicadas al estudio cuantitativo del riesgo.

Antonio Heras  
José Luis Vilar  
Montserrat Guillén



## ÍNDICE DE AUTORES

**Ayuso Gutiérrez, Mercedes:** Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española, RFA-IREA Universidad de Barcelona. mayuso@ub.edu

**Balbás Aparicio, Beatriz:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad II. Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales. Universidad Rey Juan Carlos. beatriz.balbas@urjc.es

**Balbás Aparicio, Raquel:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid. raquel.balbas@ccee.ucm.es

**Balbás de la Corte, Alejandro:** Departamento de Economía de la Empresa. Universidad Carlos III. alejandro.balbas@uc3m.es

**Bermúdez i Morata, Lluís:** Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial RFA-IREA Universidad de Barcelona. lbermudez@ub.edu

**Boado-Penas, María del Carmen:** Departamento de Fundamentos del Análisis Económico II. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de País Vasco. mcboado@hotmail.com

**Boj del Val, Eva:** Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial. Facultat d'Economia i Empresa. Universitat de Barcelona. evaboj@ub.edu

**Bolancé, Catalina:** Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española, RFA-IREA. Universitat de Barcelona. bolance@ub.edu

**Caicedo Cerezo, Edinson:** Departamento de Contabilidad y Finanzas. Grupo de Investigación en Solvencia y Riesgo Financiero –GISRF. Universidad del Valle. Colombia.  
edcaiced@univalle.edu.co

**Calderín-Ojeda, Enrique:** Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

**Cao Abad, Ricardo:** Departamento de Matemáticas. Universidade da Coruña. rcao@udc.es

**Castañer, Ana:** Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial. Facultat d'Economia i Empresa. Universitat de Barcelona. acastaner@ub.edu

**Claramunt Bielsa, M<sup>a</sup> Mercé:** Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial. Facultat d'Economia i Empresa. Universitat de Barcelona. mmclaramunt@ub.edu

**Cuéllar Hervás, Carmen:** Actuaria de Seguros. Consultora de Vida y Pensiones. cacuher@telefonica.net

**De La Peña Esteban, J. Iñaki:** Departamento de Economía Financiera I. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea. jinaki.delapena@ehu.es

**Del Pozo García, Eva María:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid. epozo@ccee.ucm.es

**Devesa Carpio, J. Enrique:** Departament d'Economía Financera y Actuarial. Facultad de Economía. Universidad de Valencia.  
Enrique.Devesa@uv.es;

**Devesa Carpio, Mar:** Departament d'Economía Financera y Actuarial. Facultad de Economía. Universidad de Valencia.  
Mar.Devesa@uv.es

**Devia Rivera, Andrés:** Departamento de Matemáticas. Universidade da Coruña. [adevia@udc.es](mailto:adevia@udc.es)

**Devolder Pierre:** Institute of Actuarial Science. Université Catholique de Louvain (UCL) Belgium. [Pierre.Devolder@uclouvain.be](mailto:Pierre.Devolder@uclouvain.be)

**Díaz Martínez, Zuleyka:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid. [zuleyka@ccee.ucm.es](mailto:zuleyka@ccee.ucm.es)

**di Pietro, Filippo:** Departamento de Economía Financiera y Dirección de Operaciones. Universidad de Sevilla. [fdi@us.es](mailto:fdi@us.es)

**Domínguez Fabián, Inmaculada:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad. Facultad de Estudios Empresariales. Universidad de Extremadura. [idomingu@unex.es](mailto:idomingu@unex.es)

**Durán Santomil, Pablo:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad. Facultad de Ciencias Económicas e Empresariales Universidade de Santiago de Compostela. [pablo.duran@usc.es](mailto:pablo.duran@usc.es)

**Encinas Goenechea, Borja:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad. Facultad de Estudios Empresariales. Universidad de Extremadura. [bencinas@unex.es](mailto:bencinas@unex.es)

**Esteve Gómez, Anna:** Centre d'Estudis Epidemiològics sobre les Infeccions de Transmissió Sexual i Sida de Catalunya (CEEISCAT). Hospital Universitari Germans Trias i Pujol. CIBER Epidemiología y Salud Pública (CIBERESP). [aeg.ceescat.germanstrias@gencat.net](mailto:aeg.ceescat.germanstrias@gencat.net)

**Feria Domínguez, José Manuel:** Departamento de Dirección de Empresas, Universidad Pablo de Olavide. [jmferdom@upo.es](mailto:jmferdom@upo.es)

**Fernández Giménez, Paloma:** Manager Life & Health Underwriting Swiss Re Ibérica. [paloma\\_fernandez@swissre.com](mailto:paloma_fernandez@swissre.com)

**Fernández López, Sara:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad. Facultad de Ciencias Económicas e Empresariales. Universidade de Santiago de Compostela. sara.fernandez.lopez@usc.es

**Fernández-Sánchez, Pilar:** Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Granada. pilarfs@ugr.es

**Fortiana Gregori, Josep:** Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística. Facultat de Matemàtiques. Universitat de Barcelona. fortiana@ub.edu

**García García, Victoriano José:** Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Cádiz. vgarcia@uca.es

**Gil Fana, José Antonio:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid. jagilfan@ccee.ucm.es

**Gómez-Déniz, Emilio:** Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Las Palmas de Gran Canaria. egomez@dmc.ulpgc.es.

**Grané, Aurea:** Departamento de Estadística. Universidad Carlos III de Madrid. aurea.grane@uc3m.es

**Guillén, Montserrat:** Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española, RFA-IREA. Universitat de Barcelona. mguillen@ub.edu

**Heras Martínez, Antonio:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid. aheras@ccee-ucm.es

**Hernández-Bastida, Agustín:** Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Granada. bastida@ugr.es

**Hernández March, Julio:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad II. Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales. Universidad Rey Juan Carlos de Madrid. julio.hernandez.march@urjc.es,

**Irimia Diéguez, Ana Isabel:** Departamento de Economía Financiera y Dirección de Operaciones. Universidad de Sevilla. anairimia@us.es

**Iturricastillo Plazaola, Iván:** Departamento Economía Financiera I. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea. ivan.iturricastillo@ehu.es

**Jiménez Rodríguez, Enrique José:** Departamento de Dirección de Empresas, Universidad Pablo de Olavide. ejimenez@upo.es

**Mármol, Maite:** Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial. Facultat d'Economia i Empresa. Universitat de Barcelona. mmarmol@ub.edu

**Martel-Escobar, Carmen:** Departamento de Métodos Cuantitativos. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. mmartel@dmc.ulpgc.es

**Martín Marín, José Luis:** Departamento de Dirección de Empresas, Universidad Pablo de Olavide. jlmartin@upo.es

**Meneu, Robert:** Departament de Matemàtiques per a l'Economia i l'Empresa. Facultat de Economía. Universidad de Valencia. robert.meneu@uv.es

**Montoya Martín, Javier:** Risk Practice Manager SAS Spain.

**Oliver Alfonso, María Dolores:** Departamento de Economía Financiera y Dirección de Operaciones. Universidad de Sevilla. moliver@us.es

**Otero González, Luis A.:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad. Facultade de Ciencias Económicas e Empresariais. Universidade de Santiago de Compostela. luis.otero@usc.es

**Pérez-Marín, Ana María:** Departamento de Econometría. RFA-IREA. Universidad de Barcelona. [amperez@ub.edu](mailto:amperez@ub.edu)

**Pérez- Sánchez, José María:** Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa. Universidad de Granada. [josemag@ugr.es](mailto:josemag@ugr.es)

**Pons Cardell, M.A.:** Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Facultad de Economía y Empresa. Universitat de Barcelona. [mapons@ub.edu](mailto:mapons@ub.edu)

**Prieto, Faustino:** Departamento de Economía. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Cantabria. [faustino.prieto@unican.es](mailto:faustino.prieto@unican.es)

**Ramírez Pérez, Cruz:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad II. Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales. Universidad Rey Juan Carlos. [cruz.ramirez@urjc.es](mailto:cruz.ramirez@urjc.es)

**Rivas López, María Victoria:** C.E.S Felipe II-Universidad Complutense de Madrid (Campus Aranjuez). [mvrivas@cesfelipesecondo.com](mailto:mvrivas@cesfelipesecondo.com)

**Rodeiro Pazos, David:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad. Universidade de Santiago de Compostela. [efdavid@usc.es](mailto:efdavid@usc.es)

**Rodríguez Sandiás, Alfonso:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad. Facultade de Ciencias Económicas e Empresariais Universidade de Santiago de Compostela. [alfonso.rodriquez.sandias@usc.es](mailto:alfonso.rodriquez.sandias@usc.es)

**Sanchez, José Ramiro:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid. [actrsanchez@gmail.com](mailto:actrsanchez@gmail.com)

**Santolino Prieto, Miguel:** Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española, RFA-IREA Universidad de Barcelona. [msantolino@ub.edu](mailto:msantolino@ub.edu)

**Sarabia Alegría, José María:** Departamento de Economía. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Cantabria. sarabiaj@unican.es

**Sarrasí Vizcarra, Francisco Javier:** Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Facultad de Economía y Empresa. Universitat de Barcelona. sarrasi@ub.edu

**Segovia, María Jesús:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid. mjsegovia@ccee.ucm.es

**Tolmos Rodríguez-Piñero, Piedad:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad II. Facultad de Ciencias Jurídicas y Sociales. Universidad Rey Juan Carlos de Madrid. piedad.tolmos@urjc.es

**Vázquez Polo, Francisco José:** Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Las Palmas de Gran Canaria. fjvpolo@dmc.ulpgc.es

**Veiga, Helena:** Departamento de Estadística. Universidad Carlos III de Madrid. mhveiga@est-econ.uc3m.es

**Vidal-Meliá, Carlos:** Departamento de Economía Financiera y Actuarial Facultad de Economía. Universidad de Valencia. carlos.vidal@uv.es

**Vilar Fernández, Juan M.,** Departamento de Matemáticas, Universidade da Coruña. eijvilar@udc.es

**Vilar Zanón, José Luis:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid. jlvilarz@ccee.ucm.es

**Vivel Búa, Milagros:** Departamento de Economía Financiera y Contabilidad. Facultade de Ciencias Económicas e Empresariais Universidade de Santiago de Compostela.



# I. METODOLOGÍA



## Ponencia 1

### **CREDIT SCORING BASADO EN DISTANCIAS: COEFICIENTES DE INFLUENCIA DE LOS PREDICTORES**

Eva Boj del Val, M<sup>a</sup> Mercè Claramunt Bielsa,  
Anna Esteve Gómez y Josep Fortiana Gregori

#### **RESUMEN**

La predicción basada en distancias es especialmente adecuada para el problema del *credit scoring*. Se trata de métodos no paramétricos que permiten de modo natural una mezcla de variables numéricas y categóricas como predictores y dan lugar a una relación indirecta, esencialmente no lineal, entre estos predictores y la respuesta. En este trabajo definimos coeficientes de influencia de los factores potenciales de riesgo que permiten interpretar y cuantificar la importancia de éstos.

**Palabras Clave:** Predicción basada en distancias; Coeficientes de influencia; Importancia relativa de los factores de riesgo; *Credit scoring*.

#### **1. INTRODUCCIÓN**

El *credit scoring* constituye un problema de clasificación, pues dado un conjunto de observaciones cuya pertenencia a una determinada clase es conocida *a priori*, se busca una regla que permita clasificar nuevas observaciones en dos grupos: los que con alta probabilidad podrán hacer frente a sus obligaciones crediticias, y los que, por el contrario, resultarán fallidos. Para ello se debe realizar un análisis de las características del solicitante y de las características de la operación, que permitirá inducir las reglas que posteriormente se aplicarán a nuevas solicitudes, determinando así su clasificación.

En este trabajo proponemos como herramienta alternativa en el problema del *credit scoring* la utilización de la predicción basada en distancias. Cabe notar, que ésta es especialmente adecuada para dicho problema, ya que se trata de una metodología no paramétrica que permite de modo natural una mezcla de variables numéricas y categóricas. Por otro lado, da lugar a una relación indirecta, esencialmente no lineal, entre los predictores y la respuesta. La metodología multivariante de predicción basada en distancias detallada en el apartado 2 es de análisis discriminante. Algunas referencias en las se utiliza análisis discriminante en el problema del *credit scoring* son Artís *et al.* (1994), Bonilla *et al.* (2003), Hand y Henley (1997), Trias *et al.* (2005 y 2008)

El apartado 3, lo dedicamos a la construcción adaptativa de métricas. Las familias de métricas nos permiten construir una matriz de distancias para un grupo (de pagados o de impagados) de forma paramétrica, en función de conjuntos de variables. En el riesgo de crédito es natural agrupar los predictores en conjuntos de características provenientes de la misma fuente. Por ejemplo: Conjunto 1. Características del crédito (duración, importe, propósito,...); Conjunto 2. Características sociales del creditor (antigüedad en la residencia actual, edad, situación marital/sexo, si es o no trabajador extranjero,...); Conjunto 3. Características económicas del creditor (situación actual de la cuenta corriente, cuenta de ahorros, antigüedad en el puesto laboral, cuota del crédito en porcentaje de la renta disponible, número de personas mantenidas, propiedades, otros planes periódicos, vivienda, tipo de trabajo,...); Conjunto 4. Relación del creditor con el banco (número de créditos activos en el banco, historial crediticio, si hay o no otras personas en el crédito,...). Observamos como las características son una mezcla de variables cuantitativas, categóricas y binarias.

En el apartado 4, proponemos un estadístico de bondad de ajuste y unos coeficientes de influencia que nos permitirán interpretar y cuantificar la importancia relativa de todos estos factores potenciales de riesgo. Con ello conseguimos una herramienta de decisión para incluir o no un predictor en el modelo final.

## 2. PREDICCIÓN BASADA EN DISTANCIAS

Los métodos de análisis discriminante funcionan bien con variables cuantitativas o cuando se conoce la densidad de los datos, pero a menudo las variables son binarias, categóricas o mixtas, como es el caso del riesgo de crédito. Puesto que siempre es posible definir una distancia entre observaciones, es posible dar una versión del análisis discriminante utilizando sólo distancias, al que denominamos *Análisis Discriminante Basado en Distancias*. Nos referimos a Cuadras (1989, 1992), Cuadras *et al.* (1997) y Boj *et al.* (2009) para un detalle teórico y práctico.

Supongamos que disponemos de un conjunto de  $n$  individuos, pertenecientes a  $g$  grupos conocidos  $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_g$  de tamaños  $n_1, \dots, n_g$  siendo el total de individuos  $n = n_1 + \dots + n_g$ . Sean  $\delta_1, \dots, \delta_g$ ,  $g$  funciones de distancia con la *propiedad euclídea* en el sentido del Escalado Métrico Multidimensional (ver Borg y Groenen (2005)). Estas funciones pueden o no coincidir para cada población. A partir de los predictores observados  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)$  calculamos las matrices de distancias euclídeas entre las muestras de cada población:

$$\Delta_\alpha^{(2)} = \left( \delta_{ij}^2(\alpha) \right) \text{ de tamaño } n_\alpha \times n_\alpha \text{ para } \alpha = 1, \dots, g.$$

Las estimaciones de las variabilidades geométricas son:

$$\hat{V}_\alpha = \frac{1}{2n_\alpha^2} \sum_{i=1}^{n_\alpha} \delta_{ij}^2(\alpha) \text{ para } \alpha = 1, \dots, g.$$

Sea  $\omega$  un nuevo individuo a clasificar en una de las  $g$  poblaciones, y sean  $\delta_i^{(2)}(\alpha)$  para  $i = 1, \dots, n_\alpha$  y para  $\alpha = 1, \dots, g$  las distancias al cuadrado de este nuevo individuo a los  $n_\alpha$  individuos de la población  $\Omega_\alpha$ , calculadas a partir de los predictores originales  $\mathbf{Z}$ . Las estimaciones de las funciones de proximidad son:

$$\hat{f}_\alpha(\omega) = \frac{1}{n_\alpha} \sum_{i=1}^{n_\alpha} \delta_i^2(\alpha) - \hat{V}_\alpha \text{ para } \alpha = 1, \dots, g.$$

La regla basada en distancias consiste en asignar al nuevo individuo  $\omega$  a la población  $\Omega_\alpha$  tal que

$$\hat{f}_\alpha(\omega) = \min_{1 \leq \beta \leq g} \{\hat{f}_\beta(\omega)\}.$$

Esta regla sólo depende de distancias entre observaciones y clasifica a  $\omega$  en la población más próxima.

Finalmente, las probabilidades de los individuos las estimamos como:

$$\hat{\pi}_\alpha(\omega) = \frac{e^{-\hat{f}_\alpha(\omega)}}{\sum_{i=1}^g e^{-\hat{f}_i(\omega)}} \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, g.$$

### 3. CONSTRUCCIÓN ADAPTATIVA DE MÉTRICAS

Nos centramos ahora en el cálculo de una matriz de distancias de un grupo concreto,  $\Delta_\alpha^{(2)}$  de tamaño  $n_\alpha \times n_\alpha$  (siendo  $\alpha = 1, \dots, g$ ). Supongamos que tenemos 4 conjuntos de variables como en el ejemplo de la introducción. Para cada conjunto de variables calculamos la matriz de distancias euclídea asociada  $\Delta_\alpha^{(2)}[s]$  con  $s = 1, 2, 3, 4$  de tamaño  $n_\alpha \times n_\alpha$ . Si construimos la matriz del grupo como la suma pitagórica de las matrices de los conjuntos,

$$\Delta_\alpha^{(2)} = \sum_{s=1}^4 \Delta_\alpha^{(2)}[s],$$

asumimos implícitamente el supuesto de independencia entre predictores, posiblemente inadecuado para este tipo de datos. Una manera de incluir la dependencia, es utilizar familias de métricas adaptativas dependientes de parámetros (ver Esteve (2003) para mayor detalle).

Un tipo de familias son las que se obtienen como combinación lineal convexa de las diferentes matrices:

$$\Delta_{\alpha}^{(2)}(\lambda) = \sum_{s=1}^4 \lambda_s \Delta_{\alpha}^{(2)}[s],$$

cumpliendo los parámetros  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$ . Mediante esta familia somos capaces de ponderar *a priori* cada uno de los conjuntos de variables. Adicionalmente, podemos estudiar la importancia de los predictores dentro de los conjuntos y sus interacciones (intra-grupos), todo ello dependiendo de la definición de distancia utilizada.

En el caso de querer modelar la no independencia de un conjunto con otro (inter-grupos) debemos añadir más parámetros. Con este fin, podemos utilizar el repertorio de distancias:

$$G_{\alpha}(C) = \sum_{s=1}^4 G_{\alpha}[s] + \sum_{s \neq l} G_{\alpha}[s]^{1/2} C_l^s G_{\alpha}[l]^{1/2},$$

siendo  $G_{\alpha}[s]$  la matriz de productos escalares de la métrica asociada a la distancia  $\Delta_{\alpha}^{(2)}[s]$  y  $C_l^s$  matrices de parámetros de tamaño  $n_{\alpha} \times n_{\alpha}$ .

#### 4. IMPORTANCIA RELATIVA DE LOS FACTORES DE RIESGO

Definimos un estadístico que nos permite estudiar la importancia relativa de los factores de riesgo de manera individual. El estadístico, a diferencia de la simple probabilidad de mala clasificación, nos estima una bondad de ajuste fina, es decir, sin saltos bruscos frente a variaciones en los predictores. Finalmente, definimos los coeficientes de influencia basados en el estadístico anterior, que constituirán un criterio para decidir si incluir o no los predictores  $Z_1, \dots, Z_p$  uno a uno en el modelo.

*Estadístico de Bondad de Ajuste:*

$$W = \sum_{\alpha=1}^g W_{\alpha}$$

siendo  $W_{\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha}} \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \left[ \min_{\beta \neq \alpha} \hat{f}_{\beta}(i) - \hat{f}_{\alpha}(i) \right]$

o bien  $\tilde{W}_{\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha}} \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \left[ \hat{\pi}_{\alpha}(i) - \max_{\beta \neq \alpha} \hat{\pi}_{\beta}(i) \right]$ .

*Coefficientes de Influencia:*

Para predictores cuantitativos:  $\beta_j = \left. \frac{\partial W}{\partial Z_j} \right|_{Z_0}$  para  $j = 1, \dots, p$ .

Para predictores categóricos o binarios:  $\beta_j = \left. \frac{\Delta W}{\Delta Z_j} \right|_{Z_0}$  para  $j = 1, \dots, p$ .

## AGRADECIMIENTOS

Trabajo financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia, proyecto número MTM2006-09920.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artís, M, Guillén, M. Martínez, J.M. (1994). A model for credit scoring: an application of discriminant analysis. *QÜESTIÓ*, 18:3, 385–395.

Bonilla, M., Olmeda, I., Puertas, R. (2003). Modelos paramétricos y no paramétricos en problemas de credit scoring. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 32:118, 833–869

Boj, E., Claramunt, M. M., Grané, A., Fortiana, J. (2009). Projection error term in Gower's interpolation. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139, 1867–878.

Borg, I., Groenen, P.J.F. (2005). *Modern Multidimensional Scaling: Theory and Applications*. Second ed. Springer, New York.

Cuadras, C.M. (1989). Distance analysis in discrimination and classification using both continuous and categorical variables. In: Y. Dodge (Ed.), *Statistical Data Analysis and Inference*, pp. 459–473. Elsevier Science Publishers B. V. (North.Holland), Amsterdam.

Cuadras, C.M (1992). Some examples of distance based discrimination. *Biometrical Letters*, 29, 3–20.

Cuadras, C. M., Fortiana, J., Oliva, F. (1997). The proximity of an individual to a population with applications in discriminant analysis. *Journal of Classification*, 14, 117–136.

Esteve, A. (2003). *Distancias estadísticas y relaciones de dependencia entre conjuntos de variables*. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.

Hand, D., Henley, W. (1997). Statistical classification in consumer credit scoring: a review. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society)*, 160 :3, 523–541.

Trias, R., Carrascosa, F., Fernández, D., Parés, LI., Nebot, G. (2005): *Riesgo de Créditos: Conceptos para su medición, Basilea II, Herramientas de Apoyo a la Gestión*. AIS Group - Financial Decisions. [www.ais-int.com](http://www.ais-int.com)

Trias, R., Carrascosa, F., Fernández, D., Parés, LI., Nebot, G. (2008). *El método RDF (Risk Dynamics into the Future). El nuevo estándar de stress testing de riesgo de crédito*. AIS Group - Financial Decisions. [www.ais-int.com](http://www.ais-int.com)

## Ponencia 2

### ESTIMACIÓN NÚCLEO TRANSFORMADA PARA APROXIMAR EL RIESGO DE PÉRDIDA

Catalina Bolancé y Montserrat Guillén

#### RESUMEN

Las medidas de riesgo permiten aproximar la probabilidad de ocurrencia de grandes pérdidas, así como su propia magnitud. La definición y propiedades de medidas de riesgo han sido ampliamente estudiadas en la literatura existente, en general suponiendo que la pérdida es una variable aleatoria cuya distribución se supone paramétrica (por ejemplo, Normal o t de Student).

En la práctica también se suele utilizar la función de distribución empírica de la pérdida a partir de la observación de datos, pero se tendrán algunos inconvenientes: i) la distribución no tiene una forma alisada y por tanto, no se podrá calcular de forma directa el riesgo para cualquier valor de la pérdida; ii) depende muy directamente de la información muestral, por tanto, cuando las pérdidas analizadas posean fuerte asimetría a la derecha o positiva, el cálculo del riesgo se realiza a partir de muy pocos datos, reduciéndose la precisión de dicha estimación.

La ventaja de la estimación paramétrica frente a la no paramétrica, es que la primera proporciona una expresión generalmente simple para algunas medidas de riesgo. Sin embargo, no se sabe si las grandes pérdidas se distribuyen de forma análoga a la cola de una Normal o una t de Student. Ante ello, la aproximación no paramétrica y, concretamente, la estimación núcleo puede ser una alternativa muy válida.

La estimación núcleo clásica de la función de distribución es un simple alisamiento de la distribución empírica, por este motivo, la falta de precisión de la estimación en las grandes pérdidas a causa de la falta de información muestral, vuelve a presentarse. La estimación núcleo transformada es una alternativa que mejora los resultados obtenidos con la estimación núcleo clásica. Esta aproximación consiste en transformar la variable con una función cóncava que simetrice los datos originales y en obtener la estimación núcleo clásica de la variable transformada. En este trabajo proponemos una nueva estimación núcleo transformada, basada en una doble transformación, que permite mejorar la estimación de medidas de riesgo tales como el VaR y el TVaR.

**Palabras clave:** estadística no paramétrica, medidas de riesgo, asimetría, estimación núcleo.

## 1. INTRODUCCIÓN

En una aproximación paramétrica, se supone una distribución conocida para la variable aleatoria que mide la pérdida y se obtiene expresiones relativamente sencillas para los estadísticos de cuantificación del riesgo.

Si no se realizan supuestos paramétricos, suele utilizarse la función de distribución empírica a partir de la observación de datos sobre pérdidas para el cálculo del valor en riesgo (VaR) o el valor en riesgo condicional (TVaR). Esta aproximación presenta numerosas desventajas, en especial cuando el interés se sitúa en los valores más extremos. La distribución empírica tiene forma escalonada y, por tanto, no proporciona valor de la pérdida único para cualquier nivel de probabilidad. En la mayoría de casos, cuando las pérdidas analizadas poseen fuerte asimetría a la derecha o positiva, el cálculo de las cuantiles más elevadas se realiza a partir de un número de datos reducido, lo que se traduce en una importante pérdida de precisión de la estimación.

La ventaja de la estimación paramétrica frente a la no paramétrica es que la primera proporciona una expresión generalmente simple para

algunas medidas de riesgo. Sin embargo, en la mayoría de situaciones puede plantearse la duda de si las grandes pérdidas se distribuyen de forma análoga a la cola de una Normal o una *t* de Student. La utilización de la teoría de los valores extremos, que se justifica por su adecuación a este problema, adolece también de un gran inconveniente. No existe un criterio objetivo para decidir el inicio de la cola, o para delimitar de forma robusta el conjunto de datos que se emplearán para aplicar las distribuciones de valores extremos. Es decir, la elección del umbral a partir del cual se consideran extremas las observaciones es altamente subjetivo y posee excesiva influencia en la obtención de los resultados. Ante ello, la aproximación no paramétrica y, concretamente, la estimación núcleo puede ser una alternativa muy válida.

La estimación núcleo clásica de la función de distribución es un simple alisamiento de la distribución empírica y por este motivo, la pérdida de precisión de la estimación en las grandes pérdidas a causa de la falta de información muestral, vuelve a producirse. La estimación núcleo transformada es una alternativa que mejora los resultados obtenidos con la estimación núcleo clásica. Esta aproximación consiste en transformar la variable con una función cóncava que simetrice los datos originales y, posteriormente, obtener la estimación núcleo clásica de la variable transformada. En este trabajo proponemos una nueva estimación núcleo transformada, basada en una doble transformación, que permite mejorar la estimación de medidas de riesgo como veremos en el estudio de simulación.

Sea  $X$  una variable aleatoria que toma valores positivos y cuya función de distribución es  $F_X(\cdot)$ .<sup>1</sup> Asumimos que  $X_i, i = 1, \dots, n$  son las pérdidas observadas, que se suponen independientes e igualmente distribuidas. Sea  $H$  la medida de riesgo definida por Hardy (2006):

$$H = \int_0^{\infty} g(1 - F_X(x)) dx,$$

---

<sup>1</sup> Definimos las variable aleatoria positiva aunque en algunos de los métodos que describimos esta condición no es necesaria.

donde  $g(\cdot)$  es una función creciente, de modo que  $g(0) = 0$  y  $g(1) = 1$ . Para el caso particular del valor en riesgo (VaR),  $g(\cdot)$  se toma como:

$$g(1 - F(x)) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq (1 - F_X(x)) \leq (1 - \alpha) \\ 1 & \text{if } (1 - \alpha) < (1 - F_X(x)) \leq 1 \end{cases}$$

El valor de  $H$  refleja el papel fundamental que posee la estimación de la función de distribución de la pérdida, en general, para calcular cualquier medida de riesgo y, en particular, para el cálculo del VaR. Es conocido que, si  $F_X$  es continua, el resultado de la función  $H$  cuando  $g$  se corresponde con la definición anterior, equivale a:

$$VaR(x, \alpha) = \inf \{x, F_X(x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha).$$

La función de distribución empírica asociada a la pérdida equivale a:

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x), \quad (1)$$

donde  $I(\cdot)$  es una función que toma valor uno si se cumple la condición entre paréntesis.

Para obtener la función de distribución basada en la normal hemos de estimar, a partir de los datos, los parámetros de posición y de escala  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ . En consecuencia, la función de distribución estimada es:

$$\Phi_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u - \hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) du \quad (2)$$

De forma similar, sustituyendo la densidad de la Normal por la de la  $t$  de Student, puede estimarse la función de distribución basada en la  $t$ , aunque en este caso también tendremos que determinar los grados de libertad de la distribución.

Cuando la distribución de las pérdidas es muy asimétrica y posee una larga cola a la derecha, como alternativa a la distribución normal, es preferible el ajuste de una Log-Normal. Si  $X$  es una variable aleatoria con distribución Log-Normal,  $LN(X)$  es una variable aleatoria con distribución normal, por tanto, para obtener la función de distribución de una Log-Normal estimamos los parámetros de posición y escala  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ , a partir de los datos transformados en logaritmos, y calculamos.

$$\hat{F}_{LN}(x) = \Phi_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}}(Ln(X)) = \int_{-\infty}^{Ln(x)} \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(LN(u) - \hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) dLN(u) \quad (3)$$

La función de distribución Log-Normal puede ser una buena alternativa cuando las pérdidas poseen mucha asimetría, sin embargo, la forma de su función de densidad, con una cola larga pero muy estrecha, provoca que en muchas ocasiones se subestime el riesgo.

La aproximación paramétrica también pasaría por intentar ajustar a nuestros datos distribuciones más complicadas o, incluso, alguna mixtura de dos distribuciones. La dificultad que ello conlleva es que tanto la estimación de los parámetros como el cálculo de las medidas de riesgo podría complicarse mucho. Una mixtura muy común cuando la distribución de la pérdida es muy asimétrica y, sin embargo, su cola es muy gruesa, es la mixtura de la distribución Log-Normal con la distribución de Pareto. La dificultad surge cuando hay que decidir la forma de la mixtura o el punto de inicio de la cola Pareto .

La estimación núcleo de la función de distribución equivale a la integral de la estimación núcleo de la función de densidad. Sea:

$$\hat{f}_X(x) = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x - X_i}{b}\right),$$

la estimación núcleo de la función de densidad, donde  $k(\cdot)$  es el núcleo, que normalmente coincide con una función de densidad simé-

trica, centrada en el cero y acotada o asintóticamente acotada. Ejemplos de núcleos son el de Epanechnikov:

$$k(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-t^2) & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

y el núcleo Gausiano:

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad -\infty \leq t \leq +\infty.$$

El parámetro  $b$  es la ventana o parámetro de alisamiento, que sirve para controlar el grado de alisamiento de la estimación, es decir, cuanto mayor es el valor de este parámetro más alisada será la estimación de la densidad obtenida.

Integrando la estimación núcleo de la función de densidad y utilizando el cambio de variable  $t = (u - X_i)/b$ , se obtiene la estimación núcleo de la función de distribución:

$$\begin{aligned} \hat{F}_X(x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{u - X_i}{b}\right) du = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^x k\left(\frac{u - X_i}{b}\right) du = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\frac{x - X_i}{b}} k(t) dt = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{b}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

En la expresión anterior  $K(\cdot)$  es la función de distribución asociada a la función de densidad que actúa como núcleo  $k(\cdot)$ . Las propiedades de la estimación núcleo de la función de distribución fueron analizadas por Reiss (1981) y Azzalini (1981). Ambos autores apuntan que cuando  $n \rightarrow \infty$  el error cuadrático medio de  $\hat{F}_X(x)$  se aproxima como:

$$\frac{F_X(x)(1 - F_X(x))}{n} - \frac{bf'(x)\left(1 - \int K^2(t) dt\right)}{n} + b^4 \left(\frac{1}{2} f_X'(x) \int t^2 k(t) dt\right)^2. \quad (5)$$

Los dos primeros términos de la expresión anterior corresponden a la varianza asintótica y el tercer término es el sesgo asintótico al cuadrado.

La estimación núcleo de la función de distribución tiene una expresión similar a la de la función de distribución empírica, sustituyendo el indicador  $I(X_i \leq x)$  por  $K((x - X_i)/b)$ . La diferencia entre una y otra es que la estimación empírica únicamente tiene en cuenta las observaciones muestrales que se sitúan por debajo de  $x$ , sin embargo, la estimación núcleo da más peso a las observaciones que se sitúan por debajo de  $x$  y menos a las que se sitúan por encima. El resultado es que la estimación núcleo de la función de distribución equivale a la empírica alisada y el grado de alisamiento viene controlado por el valor que asignemos a  $b$ . Sin embargo, las variables que miden la pérdida ante una situación de riesgo suelen poseer una fuerte asimetría a la derecha y, también, una cola derecha muy gruesa. Por este motivo, al igual que la distribución empírica, la estimación núcleo definida en (4) no aproxima bien los valores de la función de distribución para las grandes pérdidas.

La estimación núcleo transformada es una alternativa que mejora los resultados obtenidos con la estimación núcleo clásica cuando la variable es muy asimétrica. En el contexto de la estimación núcleo de la función de densidad, se han propuesto diversos métodos de estimación núcleo transformada, trabajos como los de Wand, Marron y Ruppert (1991), Bolancé, Guillén y Nielsen (2003), Clements, Hurn y Lindsay (2003), Buch-Larsen et al. (2005) y Bolancé, Guillén y Nielsen (2008) analizan distintas transformaciones paramétricas. Sin embargo, no son muchos los trabajos que han analizado la estimación núcleo transformada de la función de distribución, un ejemplo es el artículo de Swanepoel y Van Graan (2005).

En nuestro trabajo, partiendo de la idea de que las buenas propiedades de la estimación núcleo transformada de la función de densidad se trasladan a la estimación núcleo de la función de distribución, proponemos una estimación basada en una doble transformación. En la siguiente sección describimos las estimaciones núcleo transformadas

que vamos a comparar con nuestra propuesta, la cual desarrollamos en la sección tercera. En la cuarta sección presentamos los resultados de un ejercicio de simulación. En la sección quinta mostramos una aplicación con datos reales sobre costes de reclamaciones en seguros de automóviles y finalizamos con un apartado de conclusiones.

## 2. ESTIMACIÓN NÚCLEO TRANSFORMADA

Sea  $T(\cdot)$  una transformación cóncava, siendo  $y = T(x)$  y  $Y_i = T(X_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  las pérdidas observadas transformadas, la estimación núcleo de la variable transformada es:

$$\hat{F}_Y(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y - Y_i}{b}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{T(x) - T(X_i)}{b}\right) = \hat{F}_{T(X)}(T(x)). \quad (6)$$

Se demuestra que la estimación núcleo transformada de  $F_X(x)$  equivale a:

$$\hat{F}_X(x) = \hat{F}_{T(X)}(T(x)). \quad (7)$$

Para obtener la estimación anterior es necesario determinar qué transformación utilizar, cuál es la función núcleo y, por último, calcular el valor del parámetro de alisamiento. Sobre la transformación, en este trabajo se analizan algunas alternativas. La selección de una función núcleo u otra afecta muy poco a los resultados, como ya es conocido. Por contra, el valor del parámetro de alisamiento tiene una gran influencia en los resultados. Se han propuesto muchos métodos de cálculo del parámetro de alisamiento en el contexto de la estimación núcleo de la función de densidad (para un amplio resumen de todos ellos véase Wand and Jones, 1995), pero no son muchas las alternativas analizadas en el contexto de la estimación núcleo de la función de distribución.

Un modo sencillo de calcular el parámetro de alisamiento en la estimación núcleo de la función de distribución consiste en adaptar el método basado en la distribución normal descrito en Silverman (1986).

Este método parte de minimización asintótica del error al cuadrado medio integrado (MISE, *Mean Integrated Squared Error*):

$$MISE(\hat{F}_Y(y)) = E\left(\int (F_Y(y) - \hat{F}_Y(y))^2 dy\right).$$

El valor asintótico de MISE es ampliamente conocido por A-MISE (*Asymptotic Mean Integrated Squared Error*). Integrando el error al cuadrado medio asintótico dado en la expresión (5) y teniendo en cuenta que la función de distribución a estimar es  $F_Y$  se obtiene que A-MISE es:

$$n^{-1} \int F_Y(y)(1-F_Y(y))dy - n^{-1}b \int K(t)(1-K(t))dt + \frac{1}{4}k_2b^4 \int (F_Y''(y))^2 dy, \quad (8)$$

donde  $k_2 = \int t^2 k(t)dt \int (F_Y''(y))^2 dy = \int (f_Y'(y))^2 dy$ .

La expresión anterior también puede deducirse sustituyendo el desarrollo de Taylor de  $\hat{F}_Y(y)$  en MISE. Minimizando (8) respecto a  $b$ , obtenemos que el parámetro de alisamiento asintóticamente óptimo es:

$$b^* = \left( \frac{\int K(t)(1-K(t))dt}{k_2 \int (f_Y'(y))^2 dy} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}. \quad (9)$$

Silverman (1986) propone aproximar  $b^*$  sustituyendo los términos que dependen de la función de densidad teórica por el valor que obtendríamos suponiendo que  $f_Y$  es la densidad de una Normal( $\mu, \sigma$ ). Utilizando el núcleo de Epanechnikov definido en la introducción, se obtiene que:

$$b = \sigma \left( \frac{900\sqrt{\pi}}{35} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} = 3.572\sigma n^{-\frac{1}{3}}, \quad (10)$$

en la práctica sustituimos  $\sigma$  por un estimador consistente. Silverman (1986) también propone sustituir sigma por  $R/1.349$  si los datos po-

seen fuerte asimetría, siendo  $R$  el rango intercuartílico. Finalmente, la solución general es calcular el parámetro de alisamiento como:

$$\hat{b} = \text{Min} \left\{ 3.572 \hat{\sigma} n^{-\frac{1}{3}}, 3.572 \frac{R}{1.349} n^{-\frac{1}{3}} \right\}. \quad (11)$$

De todos modos, si trabajamos con la variable transformada, la asimetría casi se elimina, por lo que la propuesta de la expresión (10) será suficiente.

Sarda (1993) y Bowman, Hall y Pryan (1998) también han analizado métodos de selección de ventana basados en la minimización de una función de validación cruzada, con la que suelen aproximarse los valores de MISE en función de  $b$ . Todos estos métodos son largos de implementar y con ninguno de ellos hemos obtenido resultados satisfactorios para nuestros datos. Por último, cabe citar a los métodos *plug-in* que consisten en estimar  $b^*$  sustituyendo  $\int (f_Y'(y))^2 dy$  por una estimación de este funcional, Hall y Marron (1987) y Jones y Seather (1991) analizan la estimación núcleo de funcionales del tipo  $\int (f_Y^{(p)}(y))^2 dy$ , donde  $(p)$  es la  $p$ -ésima derivada. Altman y Léger (1995) analizan un método *plug-in* basado en una expresión de A-MISE que incorpora un término más en el desarrollo de Taylor de  $\hat{F}_Y(y)$ , ello provoca la necesidad de estimar más de un término en la expresión del parámetro de alisamiento óptimo, lo que dificulta enormemente la obtención de los resultados.

Los cambios de variable son la base para la estimación núcleo transformada y es conocido que mejoran la estimación no paramétrica de densidades con fuerte asimetría. Aunque la mayoría de transformaciones se han propuesto en el contexto de la estimación núcleo transformada de la función de densidad, los mecanismos de selección del parámetro de alisamiento tal y como se ha descrito anteriormente, pueden utilizarse en la estimación núcleo transformada de la función de distribución. Las transformaciones que analizamos a continuación se clasifican en paramétricas y no paramétricas y, a su vez, distinguiendo si son función de distribución o no.

En general, el objetivo de la estimación núcleo transformada es que la distribución de la nueva variable sea fácil de estimar mediante la estimación núcleo clásica. Cuanto mayor es el grado de alisamiento de la función mejor puede aproximarse ésta mediante la estimación núcleo clásica. Si  $m$  es la función a estimar, su grado de alisamiento viene dado por  $\int (m''(u))^2 du$ , cuanto menor es el valor de dicha integral mayor es el grado de alisamiento de la función a estimar.

Wand, Marron y Ruppert (1991) sugieren utilizar una familia de transformaciones de potencias con una traslación:

$$T_{\lambda}(x) = \begin{cases} (x + \lambda_1)^{\lambda_2} & \text{si } \lambda_2 \neq 0 \\ LN(x + \lambda_1) & \text{si } \lambda_2 = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

con  $\lambda_1 > -\text{Min}(X_1, \dots, X_n)$  y  $\lambda_2 < 1$ . Posteriormente, Bolancé, Guillén y Nielsen (2003) proponen un método de estimación de  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  para seleccionar la transformación óptima en la estimación núcleo transformada de la función de densidad que consiste en encontrar la transformación con la cual los nuevos valores en la muestra  $T_{\hat{\lambda}}(X_1) = Y_1, \dots, T_{\hat{\lambda}}(X_n) = Y_n$  posean asimetría cero y minimicen una estimación del funcional  $\int (f_Y''(y))^2 dy$ . Como ahora en este trabajo el objetivo es estimar la función de distribución, los parámetros de transformación se seleccionarán minimizando  $\int (f_Y'(y))^2 dy$ . Siguiendo el mismo razonamiento que Bolancé, Guillén y Nielsen (2003), que propusieron utilizar el parámetro de alisamiento que supone que  $\int (f_Y''(y))^2 dy$  es el de la normal (Silverman, 1986), en este trabajo utilizamos su equivalente cuando el objetivo es estimar la función de distribución, y por lo tanto el definido en la expresión (10).

Buch-Larsen et al. (2005) plantean transformar los datos con la función de distribución de una generalización de la distribución de Champnowne (1958):

$$T_{\alpha, M, c}(x) = \frac{(x+c)^{\alpha} - c^{\alpha}}{(x+c)^{\alpha} + (M+c)^{\alpha} - 2c^{\alpha}} \quad \forall x \in \mathfrak{R}_+, \quad (13)$$

cuyos parámetros  $\alpha$ ,  $M$  y  $c$  se estiman por máxima verosimilitud. Para calcular el parámetro de alisamiento, de nuevo, el método que plantean los autores es el basado en la normal. Además del parámetro de alisamiento expresado en (10) en este trabajo también utilizamos un método *plug-in*, que consiste en sustituir en la expresión (9) la estimación de  $\int (f'_Y(y))^2 dy$  propuesta por Jones y Seather (1991).

Finalmente, con el objetivo de estimar la función de distribución, Swanepoel y Van Graan (2005) indican la posibilidad de utilizar una transformación no paramétrica:

$$\hat{F}_{x,d}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{d}\right), \quad (14)$$

resultando la estimación núcleo transformada:

$$\hat{F}_Y(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y - Y_i}{b}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\hat{F}_{x,d}(x) - \hat{F}_{x,d}(X_i)}{b}\right), \quad (15)$$

donde  $d$  y  $b$  son dos parámetros de alisamiento que pueden ser iguales o no. Swanepoel y Van Graan (2005) calculan un mismo valor para ambos parámetros de alisamiento. Sin embargo, hemos comprobado en el ejercicio de simulación que dicho principio no proporciona buenos resultados cuando los datos poseen fuerte asimetría. Nosotros proponemos utilizar la expresión (11) para calcular  $d$  y el método *plug-in* para calcular  $b$ .

### 3. ESTIMACIÓN NÚCLEO DOBLE TRANSFORMADA

La estimación que describimos en esta sección fue estudiada en Bolancé, Guillén y Nielsen (2008) en el contexto de la función de densidad. Aquí el objetivo es estimar la función de distribución y el método se simplifica y permite mejorar los resultados obtenidos con las aproximaciones descritas en la sección anterior.

En la expresión de A-MISE, dada en (8), observamos que para obtener el parámetro de alisamiento asintóticamente óptimo es suficiente con minimizar:

$$\frac{1}{4}k_2b^4 \int (f'_Y(y))^2 dy - n^{-1}b \int K(t)(1-K(t))dt,$$

que se minimiza cuando el funcional  $\int (f'_Y(y))^2 dy$  es mínimo. En este sentido, el método que proponemos se basa en transformar la variable de modo que consigamos que su distribución minimice el funcional anterior.

Terrell (1990) demuestra que la densidad de la *Beta*(3,3) definida en el dominio (-1,1) minimiza  $\int (f'_Y(y))^2 dy$ , entre el conjunto de densidades con varianza conocida. Las funciones de densidad y distribución de la *Beta*(3,3) son:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{15}{16} (1-x^2)^2, -1 \leq x \leq 1, \\ H(x) &= \frac{3}{16} x^5 - \frac{5}{8} x^3 + \frac{15}{16} x + \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{16}$$

La estimación núcleo doble transformada consiste en realizar una primera transformación de los datos, utilizando para ello la función de distribución de la Champernowne generalizada con tres parámetros estimados por máxima verosimilitud,  $T_{\hat{\alpha}, \hat{M}, \hat{c}}(X_1) = Z_1, \dots, T_{\hat{\alpha}, \hat{M}, \hat{c}}(X_n) = Z_n$ , la variable transformada posee una distribución que se sitúa alrededor de una *Uniforme*(0,1). Posteriormente, volvemos a transformar los datos utilizando la inversa de la función de distribución de la *Beta*(3,3),  $H^{-1}(Z_1) = Y_1, \dots, H^{-1}(Z_n) = Y_n$ . El resultado de esta doble transformación tendrá una distribución próxima a la distribución de la *Beta*(3,3). La estimación núcleo transformada resultante es:

$$\hat{F}_Y(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y-Y_i}{b}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{H^{-1}(T_{\hat{\alpha}, \hat{M}, \hat{c}}(x)) - H^{-1}(T_{\hat{\alpha}, \hat{M}, \hat{c}}(X_i))}{b}\right). \tag{17}$$

El parámetro de alisamiento  $b$  lo podemos calcular a partir de la expresión (9) sabiendo que para la  $Beta(3,3)$  definida en (16)  $\int \{f'_Y(y)\}^2 dy = 15/7$ , utilizando el núcleo de Epanechnikov, se obtiene que:

$$b^* = \sqrt[3]{3/n} = 3^{1/3} n^{-1/3}. \quad (18)$$

Dado que, por la falta de información muestral, es en los extremos donde peor es el ajuste de la estimación núcleo, proponemos utilizar un parámetro de alisamiento alternativo basado en la minimización asintótica de WMISE:

$$WMISE(\hat{F}_Y(y)) = E\left(\int (F_Y(y) - \hat{F}_Y(y))^2 y^2 dy\right).$$

Puede calcularse un A-WMISE como:

$$n^{-1} \int F_Y(y)(1-F_Y(y))y^2 dy - n^{-1}b \int f_Y(y)y^2 dy \int K(t)(1-K(t))dt + \frac{1}{4}k_2b^4 \int (f'_Y(y))^2 y^2 dy.$$

El parámetro de alisamiento que minimiza la expresión anterior es:

$$b^* = \left( \frac{\int f_Y(y)y^2 dy \int K(t)(1-K(t))dt}{k_2 \int (f'_Y(y))^2 y^2 dy} \right)^{1/3} n^{-1/3} = \left( \frac{9}{7} \right)^{1/3} n^{-1/3} \quad (19)$$

Una diferencia fundamental con el estimador propuesto en Bolancé, Guillén y Nielsen (2008) para la estimación núcleo de la función de densidad es que para la función de distribución no es necesario el cálculo de un parámetro de corte para evitar la ineficiencia del estimador núcleo transformado en los valores próximos a la frontera del dominio compacto.

## 4. ESTUDIO DE SIMULACIÓN

El estudio de simulación que realizamos compara el funcionamiento de los diferentes métodos de estimación núcleo transformada de la función de distribución en la aproximación del VaR. También calculamos los valores del VaR bajo tres supuestos paramétricos: Normal, t de Student y Log-Normal. Utilizamos 2000 muestras simuladas de tamaño 1000 procedentes de dos distribuciones cuya forma viene dada por la mixtura entre Log-Normal y Pareto. La función de distribución de esta mixtura es:

$$F_x(x) = p \int_{-\infty}^x \frac{1}{u\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(u)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du + (1-p) \left(1 - \left(\frac{\lambda}{x-c}\right)^{\rho}\right)$$

Los parámetros de la Log-Normal son:  $\mu=0$  y  $\sigma=1$  y los de la Pareto:  $\lambda=1$ ,  $\rho=1$  y  $c=-1$ . Se simulan dos mixturas, en la primera  $p=0.7$  y en la segunda  $p=0.3$ .

Se comparan las distintas estimaciones del  $VaR(x, \alpha) = F_X^{-1}(\alpha)$ , para distintos valores de  $\alpha$ : 0.95, 0.99 y 0.995. Para cada simulación se calcula el valor exacto  $VaR(x, \alpha)$  y se compara con el estimado mediante el cálculo de la ratio:

$$Rt(\hat{F}_X) = \frac{\hat{VaR}(x, \alpha)}{VaR(x, \alpha)} = \frac{\hat{F}_X^{-1}(\alpha)}{F_X^{-1}(\alpha)}$$

Los resultados de la simulación con  $p=0.7$  se muestran en las Tablas 1, 2 y 3 para  $\alpha=0.95$ ,  $\alpha=0.99$  y  $\alpha=0.995$ , respectivamente. El parámetro de alisamiento utilizado se identifica haciendo referencia al número de la expresión correspondiente.

En los resultados de la simulación observamos que en la estimación del  $VaR(x, 0.95)$  los resultados de las distintas estimaciones núcleo (EN) son similares. En la estimación de riesgos más extremos:  $VaR(x, 0.99)$  y  $VaR(x, 0.995)$  los resultados de la estimación núcleo doble transformada (ENDT) son los más eficientes, ya que tienen menor dispersión. Hay que tener en cuenta que el tamaño de la muestra

es 1000, por tanto, por tanto el número de datos que la estimación de la distribución empírica utiliza para el cálculo de  $VaR(x, 0.99)$  y  $VaR(x, 0.995)$  es bastante reducido.

**Tabla 1\***

Resultados de la simulación de la mixtura con  $p=0.7$ . Estadísticos descriptivos para  $Rt(\hat{F}_X)$ , con  $\alpha=0.95$ , calculados con las 2000 muestras simuladas de tamaño 1000.

CDF	Ventana	Media	Desviación Típica	Mínimo	Cuartil 1	Cuartil 2	Cuartil 3	Máximo
Empírica		1.0125	0.1051	0.7154	0.9380	1.0048	1.0782	1.5786
Normal		24.5692	224.7236	1.0086	2.5059	4.0019	8.6559	5910.9449
t de Student		31.6063	290.0010	1.2255	3.1456	5.0666	11.0747	7627.8895
Log-Normal		1.1195	0.0902	0.8916	1.0557	1.1131	1.1769	1.5118
ENC	(11)	1.0058	0.1025	0.7159	0.9350	0.9985	1.0683	1.5633
ENTCH	(10)	1.0669	0.0953	0.7869	1.0019	1.0623	1.1266	1.4591
	Plug-in en (9)	1.0062	0.0968	0.7241	0.9407	0.9995	1.0655	1.4707
ENTNP	Plug-in en (9)	1.0046	0.1027	0.7138	0.9338	0.9969	1.0674	1.5623
ENDT	(17)	1.0563	0.0986	0.7753	0.9884	1.0494	1.1179	1.5058
	(19)	1.0337	0.9812	0.7548	0.9667	1.0268	1.0940	1.4945

\* ENC: estimación núcleo clásica; ENTCH: estimación núcleo transformada a partir de la función de distribución Champernowne generalizada; ENTNP: estimación núcleo transformada a partir de la transformación no paramétrica y ENDT: es la estimación núcleo doble transformada.

**Tabla 2**

Resultados de la simulación de la mixtura con  $p=0.7$ . Estadísticos descriptivos para  $Rt(\hat{F}_X)$ , con  $\alpha=0.99$ , calculados con las 2000 muestras simuladas de tamaño 1000.

CDF	Ventana	Media	Desviación Típica	Mínimo	Cuartil 1	Cuartil 2	Cuartil 3	Máximo
Empírica		1.0964	0.3674	0.4789	0.8370	1.0180	1.2732	3.2907
Normal		8.7641	80.4863	0.3341	0.8660	1.3985	3.0661	2117.0253
t de Student		13.9914	128.9757	0.4952	1.3408	2.1915	4.8584	3392.4088
Log-Normal		0.6918	0.0736	0.5094	0.6393	0.6853	0.7378	1.0117
ENC	(11)	1.0836	0.3662	0.4637	0.8258	1.0048	1.2597	3.2739
ENTCH	(10)	$\rightarrow +\infty$						
	Plug-in en (9)	1.1860	0.5192	0.5343	0.8895	1.0676	1.3423	10.4347
ENTNP	Plug-in en (9)	1.2256	0.4399	0.5105	0.9134	1.1263	1.4295	3.5981
ENDT	(17)	1.1905	0.3193	0.6013	0.9656	1.1348	1.3687	2.7681
	(19)	1.1115	0.3078	0.5612	0.8950	1.0569	1.2851	2.7224

**Tabla 3:**

Resultados de la simulación de la mixtura con  $p=0.7$ . Estadísticos descriptivos para  $Rt(\hat{F}_X)$ , con  $\alpha=0.995$ , calculados con las 2000 muestras simuladas de tamaño 1000.

CDF	Ventana	Media	Desviación Típica	Mínimo	Cuartil 1	Cuartil 2	Cuartil 3	Máximo
Empírica		1.2414	0.7643	0.3659	0.7779	1.0358	1.4550	12.0560
Normal		4.8656	44.7269	0.1821	0.4770	0.7730	1.6994	1176.4467
t de Student		8.6162	79.5182	0.2977	0.8173	1.3415	2.9847	2091.5372
Log-Normal		0.4810	0.0559	0.3437	0.4411	0.4758	0.5163	0.7298
ENC	(11)	1.2315	0.7606	0.3586	0.7699	1.0276	1.4442	12.0115
ENoch	(10)	$\rightarrow +\infty$						
	Plug-in en (9)	$\rightarrow +\infty$						
ENTNP	Plug-in en (9)	38.8738	343.6850	0.5168	2.6385	4.8407	11.2908	8842.0378
ENDT	(17)	1.3891	0.6163	0.4905	0.9658	1.2434	1.6476	5.9679
	(19)	1.2182	0.5279	0.4429	0.8480	1.0963	1.4481	4.5502

## 5. ANÁLISIS DE DATOS

La variable sobre la que deseamos calcular el VaR mide el coste de los siniestros asociados a un seguro del automóvil<sup>2</sup>. Los datos proceden de una compañía de seguros española y están referidos a siniestros que ocurrieron en 1997.

Los datos se dividen en dos grupos de edad con distintos niveles de riesgo, los menores de 30 años y los mayores. Los menores de 30 años son 1061 observaciones situadas en el intervalo [1;126.000], el coste medio en este grupo es 402,70. Los mayores de 30 años son 4061, que toman valores en el intervalo [1;17.000] y tienen un coste medio igual a 243,09. Observamos que los datos asociados a los conductores más jóvenes tienen una cola más pronunciada.

Los VaR estimados con los distintos métodos analizados en este trabajo se presentan en las tablas 4, 5 y 6 ,respectivamente, para  $\alpha=0.95$ ,  $\alpha=0.99$  y  $\alpha=0.995$ .

Los resultados corroboran los obtenidos en la simulación. Las figuras 1 y 2 muestran claramente como los resultados obtenidos con nuestra propuesta (ENDT) son los que mejor alisan el comportamiento de la empírica, extrapolarlo de forma coherente los valores del VaR en aquellos tramos donde no hay información muestral.

**Tabla 4:**  
Resultados de la estimación del  $VaR(x, 0.95)$ .

CDF	Ventana	Edad < 30	Edad $\geq$ 30
Empírica		1104.1609	1000.0778
Normal		6900.5360	1401.9410
t de Student		8824.3550	1745.0440
Log-Normal		938.75627	842.1377
ENC	(11)	1116.0850	1002.6023
ENTPT	(10)	1310.2501	1012.5151
ENTCH	(10)	1476.5246	999.8040
	Plug-in en (9)	1186.4622	999.6900
ENTNP	Plug-in en (9)	1114.8393	1002.5635
ENDT	(17)	1315.9718	1011.6847
	(19)	1260.7625	1005.9213

<sup>2</sup> Se expresan en miles de pesetas.

**Tabla 5:**  
Resultados de la estimación del  $Var(x, 0.99)$ .

CDF	Ventana	Edad < 30	Edad $\geq$ 30
Empírica		4596.4856	3000.5715
Normal		9592.7130	1882.0770
t de Student		15204.6500	2882.9370
Log-Normal		2745.5069	2374.7903
ENC	(11)	4594.3258	3006.1758
ENTPT	(10)	5255.2074	3082.4623
ENTCH	(10)	$\rightarrow +\infty$	$\rightarrow +\infty$
	Plug-in en (9)	5749.7722	3035.8465
ENTNP	Plug-in en (9)	4610.8210	3006.1549
ENDT	(17)	6005.9526	3256.1349
	(19)	5241.3221	3107.5668

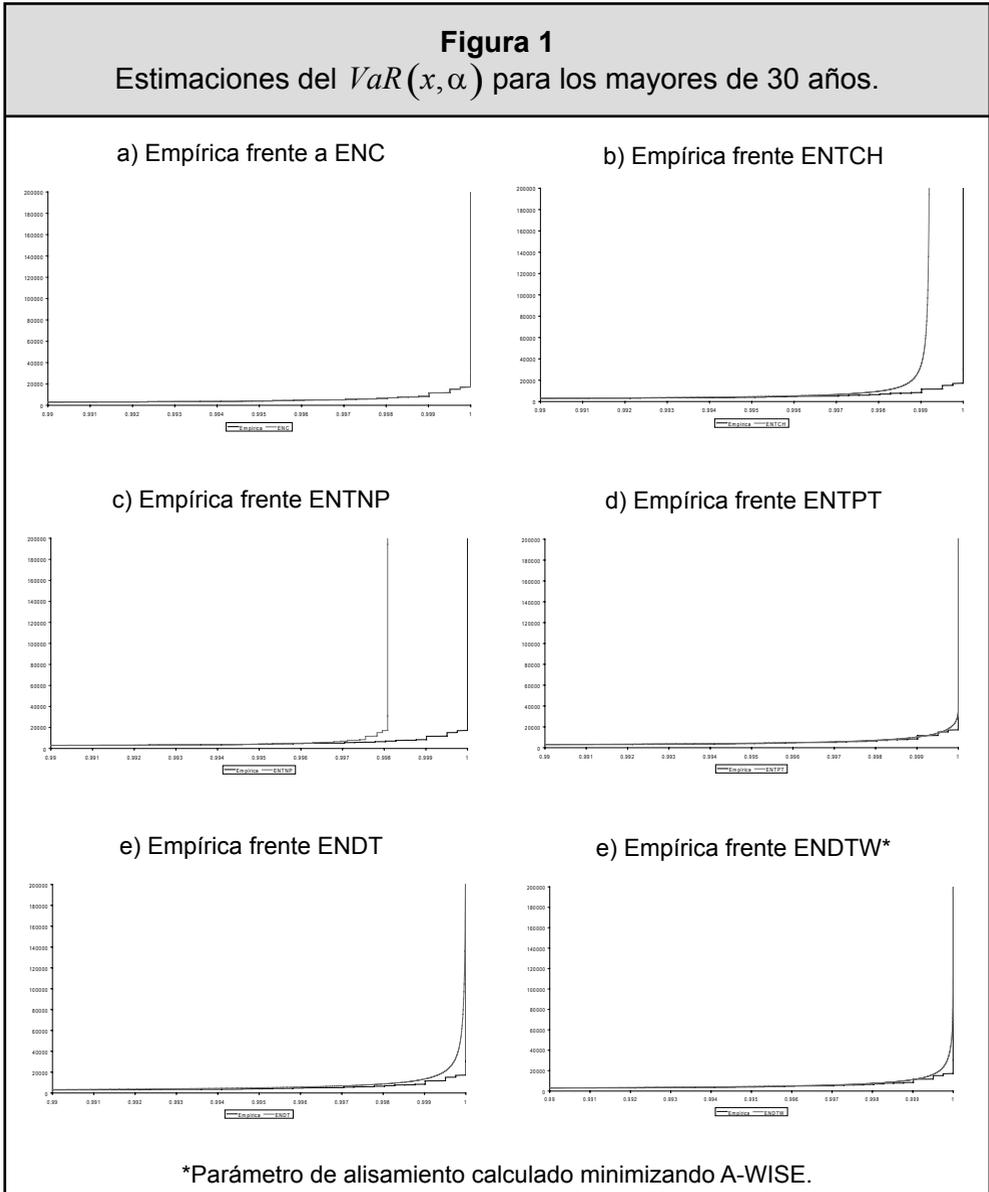
**Tabla 6:**  
Resultados de la estimación del  $Var(x, 0.999)$ .

CDF	Ventana	Edad < 30	Edad $\geq$ 30
Empírica		16421.5741	8376.0242
Normal		12610.3600	2420.2590
t de Student		28739.6600	5296.8350
Log-Normal		4066.6925	3470.9626
ENC	(11)	16401.0659	8394.7112
ENTPT	(10)	36135.0805	10247.3775
ENTCH	(10)	$\rightarrow +\infty$	$\rightarrow +\infty$
	Plug-in en (9)	$\rightarrow +\infty$	33768.7377
ENTNP	Plug-in en (9)	$\rightarrow +\infty$	$\rightarrow +\infty$
ENDT	(17)	63594.4775	13373.3916
	(19)	37375.4977	11182.1758

## 6. Conclusiones

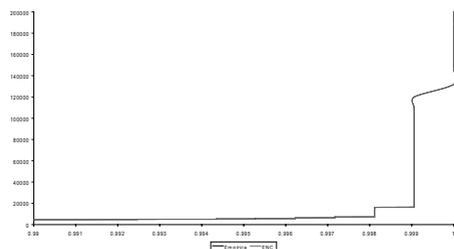
En este trabajo hemos aportado un nuevo método de estimación núcleo de la función de distribución más eficiente que el resto según un estudio de simulación para estimar medidas de riesgo en distribuciones de pérdida con presencia de valores extremos. También hemos observado que el método basado en la transformación de potencias con una traslación, propuesto por Bolancé, Guillén y Nielsen (2003) para estimar la función de densidad, adaptado a la estimación núcleo de la función de distribución proporciona buenos resultados. El resto de aproximaciones no paramétricas analizadas revisten notables inconvenientes para aproximar el valor en riesgo. Por último, las aproxi-

maciones paramétricas utilizadas, que se corresponden con las más comúnmente utilizadas en textos regulatorios sobre solvencia, proporcionan resultados manifiestamente sesgados.

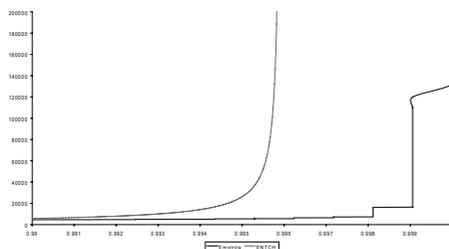


**Figura 2**  
 Estimaciones del  $Var(x, \alpha)$  para los menores de 30 años.

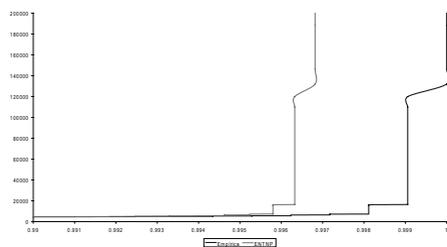
a) Empírica frente a ENC



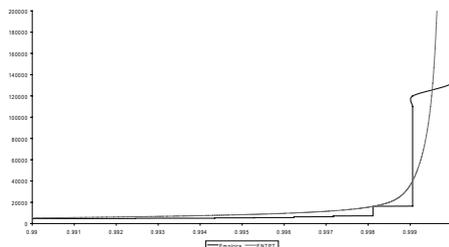
b) Empírica frente ENTCH



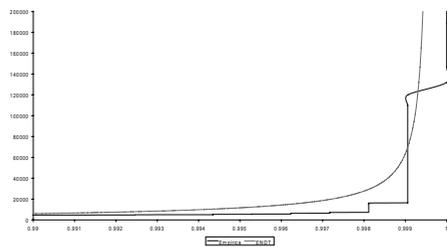
c) Empírica frente ENTNP



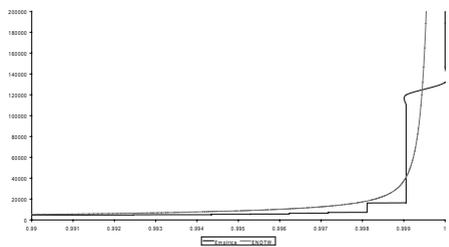
d) Empírica frente ENTPT



e) Empírica frente ENDT



e) Empírica frente ENDTW\*



\*Parámetro de alisamiento calculado minimizando A-WISE.

## **AGRADECIMIENTOS**

Se agradece la ayuda recibida del Ministerio de Ciencia e Innovación y Fondos FEDER en el proyecto SEJ2007-63298.

## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Altman, N y Léger, C. (1995) "Bandwidth selection for kernel distribution function estimation" *Journal of Statistical Planning and Inference* 46, 195-214.

Azzalini, A. (1981) "A note on the estimation of a distribution function and quantiles by a kernel method" *Biometrika* 68, 1, 326-328.

Bolancé, C., Guillén, M. y Nielsen, J.P. (2003) "Kernel density estimation of actuarial loss functions" *Insurance: Mathematics and Economics* 32, 1, 19-36.

Bolancé, C. Guillén, M. y Nielsen, J.P. (2008) "Inverse Beta transformation in kernel density estimation" *Statistics & Probability Letters*, 78, 1757-1764.

Bowman, A, Hall, P. y Pryan, T. (1998) "Bandwidth Selection for the Smoothing of Distribution Functions" *Biometrika* 85, 4, 799-808.

Buch-Larsen, T., Guillen, M., Nielsen, J.P. y Bolancé, C. (2005) "Kernel density estimation for heavy-tailed distributions using the Champernowne transformation" *Statistics* 39, 503-518.

Champernowne, D.G. (1952) "The Graduation of Income Distributions" *Econometrica* 20, 4, 591-615.

Clements, A.E., Hurn, A.S. y Lindsay, K.A. (2003) "Möbius-like mappings and their use in kernel density estimation" *Journal of the American Statistical Association* 98, 993-1000.

Hall, P. y Marron, J.S. (1987) "Estimation of integrated squared density derivatives" *Statistics and Probability Letters* 6, 109-115.

Hardy, M.R. (2006) "An introduction to risk measures for capital adequacy" Casualty Actuarial Society - Arlington. <http://www.casact.org/library/studynotes/hardy4.pdf>

Jones, M.C. y Sheather, S.J. (1991) "Using non-stochastic terms to advantage in kernel-based estimation squared density derivatives" *Statistics and Probability Letters* 11, 511-514.

Reiss, R.D. (1981) "Nonparametric estimation of smooth distribution functions" *Scandinavian Journal Statistics* 8, 116-119.

Sarda, P. (1993) "Smoothing parameter selection for smooth distribution functions" *Journal of Statistical Planning and Inference* 35, 65-75.

Silverman, B.W. (1986) *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. London: Chapman & Hall.

Swanepoel, J.W.H. y van Graan, F.C. (2005) "A new kernel distribution function estimator based on a nonparametric transformation of the data" *Scandinavian Journal of Statistics - Theory and Applications* 32, 551-562.

Wand, M.P. y Jones, M.C. (1995) *Kernel Smoothing*. London: Chapman & Hall.

Wand, P., Marron, J.S. y Ruppert, D. (1991) "Transformations in density estimation" *Journal of the American Statistical Association* 86, 414, 343-361.



## Ponencia 3

# REVISIÓN DE MÉTODOS DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL APLICADOS A LA PREDICCIÓN DE QUIEBRAS EN EMPRESAS ESPAÑOLAS DE SEGUROS<sup>3</sup>

Z. Díaz, E. del Pozo, M.J. Segovia

## RESUMEN

El presente artículo recopila métodos de Inteligencia Artificial aplicados en distintas investigaciones a un problema financiero real, detección de insolvencias en el sector asegurador. Se trata de una cuestión de gran actualidad. De hecho, la Unión Europea a través del proyecto Solvencia II, ha tomado un papel muy activo liderando la reforma de las normas existentes en relación con la solvencia y redefiniendo la información que las compañías de seguros han de suministrar para poder evaluarla.

Por otro lado, las propias compañías de seguros, sobre todo las más grandes, han desarrollado modelos internos para diversos propósitos. En España, aunque no es un requisito formal, muchas aseguradoras utilizan modelos internos de gestión de riesgo que están en mayor o menor grado desarrollados. Se trata, en general, de modelos parciales y que no cubren todos los riesgos completamente. Además, nuestra autoridad supervisora también está trabajando en el desarrollo de un sistema de detección precoz de riesgos basado en los modelos internos que utilizan los aseguradores. Por lo tanto, desarrollar nuevos modelos en relación con la detección del posible riesgo de insolvencias en seguros es una cuestión de gran actualidad.

---

<sup>3</sup> Este trabajo ha sido financiado con el proyecto SANTANDER-UCM PR34/07-15788

Las investigaciones realizadas en este sector en España para analizar este tipo de riesgo utilizan con frecuencia métodos estadísticos que emplean como variables explicativas ratios financieros que no suelen cumplir las hipótesis estadísticas que tales métodos requieren. Hemos aplicado y recopilado varios métodos provenientes de la Inteligencia Artificial [Rough Set (*conjuntos imprecisos*), algoritmos genéticos, Support Vector Machines (*Máquinas de vectores soporte*), el Templado Simulado (*Simulated Annealing*), Redes Neuronales, Árboles de decisión] para la predicción de insolvencias. Los resultados obtenidos son muy satisfactorios y muestran que las metodologías propuestas pueden ser útiles para evaluar la insolvencia de una entidad aseguradora.

**Palabras clave:** inteligencia artificial, insolvencia, seguros, modelos internos

## 1. INTRODUCCIÓN

A diferencia de otros problemas financieros, el gran número de agentes e intereses afectados cuando se produce una insolvencia, hacen que el estudio de la misma se mantenga siempre actual. Es más, la viabilidad y, en consecuencia, el riesgo de fracaso empresarial ha sido reconocido como un factor importante en el área de la macroeconomía o en los análisis industriales. Al mismo tiempo, tanto el número de empresas quebradas como la tendencia relativa, son considerados indicadores de la solidez de las industrias y del conjunto de la economía.

Además la actividad aseguradora, bancaria y de inversión constituyen, conjuntamente, una proporción muy significativa de las transacciones financieras. Por tanto, el sector asegurador tiene una gran importancia social y económica, luego, la detección precoz de insolvencias o de las condiciones que pueden llevar a que éstas acaezcan en una aseguradora, es una cuestión clave para las autoridades reguladoras, inversores, gestores, analistas financieros, bancos, auditores y ase-

gurados. Se hace necesario minimizar los costes asociados al problema que estamos considerando como pueden ser los efectos sobre los fondos de garantía existentes en algunos países o las responsabilidades de gestores y auditores.

En definitiva, dada la importancia de este problema, la actividad aseguradora ha sido objeto desde hace tiempo de supervisión a través de la articulación de diversos sistemas de control: obligación de informar sobre su situación económico-financiera mediante la publicidad de las cuentas anuales y obligándolas a ser auditadas, imposición de normas encaminadas a garantizar su solvencia como pueden ser el cumplimiento de los coeficientes de garantía y de solvencia, provisiones obligatorias, inversión de las mismas, capital mínimo, regulación de los precios, remisión a la autoridad supervisora de los estados confidenciales, o, finalmente, realización de inspecciones in situ.

La solvencia en las entidades aseguradoras es una cuestión de interés mundial, como lo constata la actual crisis financiera en la que estamos inmersos. De hecho, en la actualidad a nivel europeo, el marco legislativo en materia de solvencia para entidades aseguradoras está siendo objeto de un profundo estudio. El proyecto *Solvencia II* pretende marcar las directrices que reformen las normas existentes en la Unión Europea en relación con la solvencia. Además, muchas aseguradoras utilizan modelos internos de gestión de riesgo que están en mayor o menor grado desarrollados. Se trata, en general, de modelos parciales y que no cubren todos los riesgos completamente.

En consecuencia, desarrollar y aplicar nuevos métodos en relación con la supervisión de compañías aseguradoras o para analizar la información, tanto cuantitativa como cualitativa, que suministren las entidades aseguradoras relativa a su gestión de riesgos es una cuestión de gran actualidad e importancia.

En España para este sector muchas de las metodologías aplicadas para acometer este problema son de tipo estadístico (Martín *et al.* 1999, Mora, 1994; Sanchis *et al.*, 2003) y suelen emplear como variables explicativas ratios financieros. Este tipo de variables no suelen

satisfacer las hipótesis estadísticas que requieren dichos métodos lo que dificulta su aplicación o cuestiona los resultados obtenidos. A veces en este tipo de técnicas la presencia de observaciones atípicas (*outliers*) afecta en gran medida a los resultados finales y éstos son difíciles de interpretar.

En la actualidad se ha dado un nuevo enfoque al problema aplicando al sector asegurador metodologías del ámbito de la Inteligencia Artificial (IA). Siguiendo a O' Leary (1995), los sistemas inteligentes pueden construirse a partir de dos enfoques.

El primer enfoque lo constituyen los denominados Sistemas Expertos: Consiste en introducir en el ordenador el conocimiento que los expertos humanos han ido acumulando a lo largo de su vida profesional; la mayor limitación de este enfoque radica en el proceso de captación de la información, que ha de hacerse mediante una serie de entrevistas a los expertos.

El segundo enfoque lo constituye el Aprendizaje Automático (*Machine Learning*). Este enfoque consiste en la elaboración de programas de ordenador que sean capaces de generar conocimiento a través del análisis de los datos y posteriormente utilizar dicho conocimiento para realizar *inferencias* sobre nuevos datos. Dentro de las técnicas aplicables de este enfoque encontramos: Redes Neuronales Artificiales, Algoritmos de Inducción de Reglas y Árboles de Decisión. Algunas de ellas tienen un carácter explicativo (inducción de reglas y árboles de decisión), otras se caracterizan por un enfoque de *caja negra- black box*, como las redes neuronales. Pero todas ellas, en general, no requieren que los datos satisfagan ningún tipo de requisito o hipótesis, no se ven afectadas por la presencia de observaciones atípicas.

El presente trabajo revisa un conjunto de investigaciones de carácter empírico consistente básicamente en la aplicación a empresas españolas de seguros no-vida de diversas metodologías de la IA que se encuadran dentro de este segundo enfoque de aprendizaje automático. Nuestro objetivo es comprobar su efectividad en la detección de insolvencias como problema de clasificación entre empresas sanas y

fracasadas y utilizando como variables explicativas ratios financieros y otros tipos de variables.

Tal y como veremos, las herramientas de la IA son de gran utilidad y un complemento y, en algunos casos, una alternativa a los métodos estadísticos ya que mejoran en algunos aspectos algunos de sus problemas.

El resto del trabajo se estructura en las siguientes secciones: en la sección 2 presentamos los algoritmos de inducción de reglas, concretamente la metodología Rough Set. En la sección 3 describimos las redes neuronales y diversas técnicas de algoritmia heurística híbrida. La sección 4 presenta diversos procedimientos de construcción de árboles de decisión y sus aplicaciones. Finalmente en la sección 5 exponemos las conclusiones.

## **2. ALGORITMOS DE INDUCCIÓN DE REGLAS. METODOLOGÍA ROUGH SET**

En el ámbito de la predicción de insolvencias la teoría Rough Set ya ha sido aplicada a sectores distintos del asegurador (Slowinski y Zopounidis, 1995, Dimitras, *et al* 1999, y Ahn, *et al.*, 2000). Sin embargo, la aplicación de esta teoría al sector asegurador no se limita al problema que nos ocupa sino que también se ha aplicado a otros problemas (Shyng, Jhieh-Yu *et al.* 2007).

Fue originalmente desarrollada en los años ochenta por Z. Pawlak (Pawlak, 1991, 2002, 2007), entre otros, como herramienta formal para tratar con la incertidumbre inherente a un proceso de decisión. Aunque existen en la actualidad extensiones de esta teoría (Greco *et al.*, 1998) nos referiremos al enfoque clásico.

La filosofía del método se basa en la suposición de que con cada objeto del universo que estamos considerando se puede asociar alguna información (datos, conocimiento). Los objetos caracterizados por la misma información no son discernibles en vista de la información dis-

ponible. Esta “no diferenciación” de objetos generó de este modo la base matemática para esta teoría.

La información imprecisa es la que provoca la “no diferenciación” de los objetos en términos de datos disponibles y evita, en consecuencia, su asignación precisa a un conjunto. “Rough” podría traducirse por “impreciso”; de aquí en adelante hablaremos de rough set. Por tanto, y de manera intuitiva, un rough set es un conjunto de objetos que, en general, no pueden ser caracterizados de manera precisa en términos de la información disponible. Si esta información consiste en un conjunto de objetos descrito por otro conjunto, en este caso, de atributos, diremos que un rough set es un conjunto de objetos que, en general, no pueden ser caracterizados de manera precisa en términos de valores de un conjunto de atributos, y por lo tanto no los podemos clasificar en las diferentes categorías de manera precisa. Es decir “la evidencia”, los datos, entran en conflicto y causan esa imprecisión.

Por ejemplo, en el problema que nos ocupa, nuestros objetos son las empresas de seguros, la información disponible (atributos) son ratios financieros y las clases en que las vamos a clasificar son dos en función de si son insolventes o no. Tendríamos información imprecisa siempre y cuando con los ratios financieros disponibles no pudiéramos clasificar una empresa en una de las dos categorías (solvente/insolvente) dado que tenemos empresas caracterizadas con valores similares de los ratios y una es insolvente y la otra no lo es. Es decir, en la realidad nos encontramos muchas veces con información de este tipo, por ejemplo por qué pacientes con los mismos síntomas desarrollan una enfermedad y otros no; o, nuestro caso por qué empresas con los mismos valores para determinadas variables financieras unas están intervenidas por ser incapaces de superar la crisis y otras no llegan a quebrar.

Por otro lado, la teoría del rough set asume la representación del conocimiento de los objetos en forma de una *tabla de información*, que es un caso especial de un sistema de información. En las filas de la tabla se indican los *objetos* (acciones, alternativas, candidatos, pacientes, empresas, etc.), mientras que las columnas se corresponden con los *atributos* (síntomas de una enfermedad, ratios financieros, etc.). Las

entradas en la tabla son los *valores del atributo*. Es decir, la entrada en columna  $q$  y en fila  $x$  tiene el valor  $f(x, q)$ .

La *relación de no diferenciación* se expresaría de la siguiente forma dados dos objetos,  $x$ ,  $y$ , decimos que  $x$  e  $y$  *no son discernibles* en base a un conjunto de atributos si, y solo si,  $f(x, q) = f(y, q)$  para todos los atributos de la tabla. En nuestro caso, dadas dos empresas, ambas no se pueden diferenciar si sus variables financieras (ratios) toman los mismos valores o varían muy ligeramente.

Dado que el problema será clasificar empresas entre solventes e insolventes, hemos de tener en cuenta que la clasificación de los objetos se basa en la información que hay accesible sobre ellos y no en los objetos en sí mismos. Por tanto, si los objetos no se pueden distinguir mediante atributos, no podemos asignarlos de manera precisa a un conjunto con lo que se plantea la necesidad de una *aproximación* de las distintas clases en las que se asignarían los objetos.

Un rough set es una colección de objetos que, en general, no pueden ser clasificados de manera precisa en términos de los valores del conjunto de atributos. En consecuencia, cada rough set tiene casos fronterizos, esto es objetos que no pueden clasificarse con certeza como miembros del conjunto o de su complementario y, por tanto, puede ser reemplazado o representado por un par de conjuntos precisos, llamados la *aproximación por encima* y *por debajo*. La *aproximación por debajo* consiste en todos los objetos que con seguridad pertenecen a la clase o categoría, y la *aproximación por encima* contiene los objetos que posiblemente pertenecen a la misma. La frontera (o *región de duda*) es el conjunto de elementos que no pueden clasificarse con certeza utilizando los atributos del sistema de información y es la diferencia entre ambas aproximaciones.

Al cociente entre la *aproximación por debajo* y la *aproximación por encima* se le denomina *precisión* de la aproximación. Este ratio indica los casos fronterizos o “dudosos” a la hora de clasificarlos que existen para una clase o categoría determinada. Este ratio toma el valor 1 para aquellas clases en los que no hay casos fronterizos (no hay por tanto información inconsistente).

Por otro lado, si en una tabla de información no sólo existe una clase o categoría sino que existen varias (por ejemplo, en nuestro caso existen dos clases de empresas, la clase de las sanas y la de las fracasadas), para cada una de ellas se puede calcular la aproximación por arriba y por abajo. El cociente entre la suma de todas las aproximaciones por abajo y el número total de objetos del sistema, se denomina *calidad de la clasificación*. Expresa el ratio de todos los objetos correctamente clasificados respecto a todos los objetos del sistema (Slowinski y Stefanowski, 1994). Si toma el valor 1 significa que no hay objetos “dudosos” a la hora de ser clasificados.

Una de las funciones más importantes de la metodología rough set es descubrir las dependencias entre atributos al analizar una tabla de información. Descubrir dichas dependencias permite que el conjunto de atributos se pueda reducir (eliminar aquellos atributos que sean redundantes o innecesarios), apareciendo el concepto de *reducto* o *conjunto mínimo*, que se define como el menor conjunto de atributos que mantiene la misma calidad de clasificación que el conjunto de todos los atributos. En una tabla de información puede haber más de un reducto. La intersección de todos los reductos nos da el denominado *núcleo*, que es la colección de los atributos más relevantes en la tabla y que no pueden ser eliminados sin que disminuya la calidad de la clasificación.

A partir de un sistema de información reducido (ya sin redundancias) se pueden obtener las reglas de decisión. Estas reglas serán las que determinen si un objeto pertenece a una determinada clase. Una regla de decisión puede expresarse como una sentencia lógica que relaciona la descripción mediante atributos de un objeto (condiciones) y las clases de decisión.

Toma la siguiente forma:

SI  
<se cumplen condiciones>  
ENTONCES  
<el objeto pertenece a una clase de decisión dada>

Cada regla de decisión se caracteriza por su *fuerza*, esto es el número de objetos que satisfacen la parte de la condición de la regla (en el argot se dice *cubiertos* por la regla) y que pertenecen a la clase de decisión sugerida.

El conjunto de las reglas de decisión y la información sobre los atributos más significativos para la clasificación de los objetos puede considerarse como *una representación* del conocimiento adquirido por un *especialista* sobre todos los casos/objetos contenidos en un sistema de información, sin las redundancias, tan típicas en las bases de datos reales. Es más, los resultados obtenidos por el enfoque rough set se expresan de *forma similar al lenguaje natural humano*. Así, las reglas son muy fáciles de comprender por el usuario/analista y permiten justificar y explicar las conclusiones derivadas de análisis de los datos. Además, da la posibilidad para el analista de controlar dicho análisis de manera simple. Tal posibilidad no es normalmente ofrecida por las técnicas tradicionales de análisis de datos.

El conjunto de reglas para todas las clases de decisión se denomina *algoritmo de decisión*. Las reglas derivadas de una tabla con esta metodología se pueden utilizar para clasificar *nuevos objetos* (en nuestro caso empresas nuevas). La clasificación de cualquier nuevo objeto puede hacerse comparando su descripción con las condiciones de cada una de las reglas de decisión.

En Sanchis *et al.* (2007) se describe una aplicación a la predicción de insolvencias en empresas españolas de seguros no-vida. Utiliza una muestra (Sanchis *et al.*, 2003) de 36 empresas fracasadas y 36 empresas sanas descritas en base a 21 ratios financieros.

<b>R1</b>	Fondo de Maniobra / Activo Total
<b>R2</b>	Beneficio antes de Impuestos(BAI)/ Capitales propios
<b>R3</b>	Ingresos Financieros/ Total Inversiones
<b>R4</b>	BAI*/ Pasivo Total BAI* = BAI+ Amortizaciones + Provisiones + Resultados Extraordinarios
<b>R5</b>	Total Primas adquiridas de seguro directo / Capitales propios
<b>R6</b>	Total Primas adquiridas de negocio neto / Capitales propios
<b>R7</b>	Total Primas adquiridas de seguro directo / Capitales propios + Provisiones Técnicas
<b>R8</b>	Total Primas adquiridas de negocio neto /Capitales propios + Provisiones Técnicas
<b>R9</b>	Capitales Propios / Pasivo Total
<b>R10</b>	Provisiones Técnicas / Capitales Propios
<b>R11</b>	Gastos Técnicos de seguro directo / Capitales propios
<b>R12</b>	Gastos Técnicos de negocio neto / Capitales propios
<b>R13</b>	Gastos Técnicos de seguro directo / Capitales propios + Prov. Técnicas
<b>R14</b>	Gastos Técnicos de negocio neto / Capitales propios + Provisiones Técnicas
<b>R15</b>	Ratio Combinado 1 = Ratio Siniestralidad de seguro directo (RSD) + Ratio de Gastos (RG) RSD = Gastos Técnicos de seguro directo/ Total Primas adquiridas de seguro directo RG = Comisiones y otros gastos de explotación/ Otros ingresos explotación
<b>R16</b>	Ratio Combinado 2 = Ratio Siniestralidad de negocio neto (RSN) + Ratio de Gastos (RG) RSN = Gastos Técnicos de negocio neto/ Total Primas adquiridas de negocio neto RG = Comisiones y otros gastos de explotación/ Otros ingresos explotación
<b>R17</b>	(Gastos Técnicos de seguro directo + Comisiones y otros gastos de Explotación)/ Total Primas adquiridas de seguro directo
<b>R18</b>	(Gastos Técnicos de negocio neto + Comisiones y otros gastos de Explotación)/ Total Primas adquiridas de negocio neto
<b>R19</b>	Provisiones Técnicas de reaseguro cedido / Provisiones Técnicas
<b>R20</b>	RSD = Gastos Técnicos de seguro directo/ Total Primas adquiridas de seguro directo
<b>R21</b>	RSN = Gastos Técnicos de negocio neto/ Total Primas adquiridas de negocio neto

Con estos datos se ha construido una tabla de información que se ha introducido en programa ROSE (web [www-idss.cs.put.poznan.pl/rose](http://www-idss.cs.put.poznan.pl/rose)).

El análisis rough set de la tabla mostró que la *precisión* fue perfecta, esto es, igual a uno y la *calidad de la clasificación* fue también igual a uno. Esto significa que las empresas están muy bien discriminadas entre ellas y no hay casos “dudosos”. Se obtuvieron 452 reductos de la tabla de información codificada, cada uno de los cuales contiene entre 4 y 6 atributos, lo que respecto a los 21 originales supone una reducción importante.

Este resultado da una idea de la ayuda que supone la aplicación de este método en la eliminación de variables redundantes ya que, en cualquier caso, al menos 15 atributos pueden ser eliminados sin ninguna consecuencia. Los ratios que aparecen con más frecuencia en los reductos son: R1, R3, R4, R9, R17, R18 y R19 lo cual indica que son variables muy discriminatorias en la muestra entre empresas solventes y no solventes

Por otro lado, el *núcleo* de atributos está vacío luego ningún único atributo es absolutamente necesario. A partir del reducto elegido se obtuvieron 30 reglas de decisión. Dichas reglas son una representación sin redundancias del conocimiento. En el algoritmo obtenido sólo se han utilizado 74 descriptores, lo que supone un 5% de los que aparecían en el sistema de información inicial (1.368). En general, cuanto más corta es una regla más general es.

Para validar el algoritmo obtenido y ver la precisión predictiva se efectuó la clasificación de los datos de las 72 empresas para 2, 3, 4 y 5 años previos a la declaración de la quiebra (Dimitras *et al.*, 1999). Los porcentajes de clasificaciones correctas obtenidas con la aplicación del método rough set fueron respectivamente 78.57%, 66.67%, 64,71% y 70.

Además para el año previo a la quiebra se hizo otro experimento en el que la muestra se dividió en dos. Una de las submuestras se utilizó para estimar las reglas de decisión y la otra para validar las reglas obtenidas.

De esta manera al ser dos muestras totalmente independientes los resultados son más fiables. En este segundo experimento se obtuvo una tasa de aciertos del 77.77%. Como se puede comprobar, en general los resultados obtenidos son bastante satisfactorios.

### **3. REDES NEURONALES Y ALGORITMIA HEURÍSTICA HÍBRIDA**

Dentro de las herramientas de la Inteligencia Artificial y, en concreto, dentro de las técnicas de Aprendizaje Máquina las que ahora presentamos se caracterizan por ser buenos clasificadores (y, por lo tanto, ser buenos predictores). Sin embargo, sirven en menor medida para analizar el conocimiento (las relaciones) existente en los datos por lo que se encuadran dentro del llamado enfoque denominado de “caja negra”.

#### **3.1 Redes Neuronales**

La aplicación de redes neuronales al problema de la insolvencia en empresas no es nueva (O'leary, 1998). De hecho en el ramo de seguros de vida se han hecho algunos trabajos (Brocket, *et al.* 1994 y 2006).

Básicamente, una Red Neuronal consiste en una serie de unidades de proceso, también conocidas como “neuronas artificiales”, relacionadas mediante unas conexiones ponderadas. Cada una de estas unidades recibe señales a través de una serie de vías de entrada y responde a ese estímulo enviando una señal a todas aquéllas con las que a su vez tenga una conexión de salida. Esto último está inspirado en las neuronas de los seres vivos que reciben señales eléctricas a través de las dendritas y proporcionan una señal de salida a las neuronas conectadas con ellas a través del axón.

Las Redes Neuronales aprenden por medio de ejemplos, es decir, generalizan de experiencias previas a las nuevas para así poder llevar a cabo un proceso decisional.

Las neuronas artificiales así definidas se conectarán unas con otras, formando diversas estructuras conocidas como *topologías de red*. La estructura de cada topología de red depende de la respuesta que se pretende que el sistema proporcione. Así podemos distinguir dos grandes grupos: Redes Clasificadoras y Redes Optimizadoras.

Las primeras son las que ante un conjunto de patrones de entrada responderán con una clasificación de situación que presente esos patrones con arreglo a un conjunto finito de categorías. Las segundas tratarán de optimizar una función objetivo.

Dentro del marco de las redes de neuronas, el Perceptron multicapa es en la actualidad una de las arquitecturas más utilizadas en la resolución de problemas en una gran variedad de áreas, debido, fundamentalmente, a su capacidad como aproximador universal de relaciones no lineales entre datos de entrada y salida así como a su fácil uso y aplicabilidad.

El Perceptron multicapa es una generalización del Perceptron simple (Rosenblatt, 1957) que surgió como consecuencia de las limitaciones de dicha arquitectura en lo referente al problema de la separabilidad lineal, ya que este tipo de modelo sólo permite resolver problemas en los que los ejemplos son linealmente separables en términos de clasificación, o en los que las salidas son funciones lineales de las entradas.

En 1986, Rumelhart, Hinton y Williams (Rumelhart *et al.*, 1986) formalizaron un método para que una red neuronal aprendiera la asociación que existe entre los patrones de entrada a la misma y las salidas correspondientes, utilizando más niveles de neuronas que los que utilizó Rosenblatt para desarrollar el Perceptron. Este método, conocido como *backpropagation* (propagación del error hacia atrás) está basado en la generalización de la regla Delta propuesta por Widrow y Hoff (1960) para tener en cuenta el error producido en las salidas de la red, a diferencia de la regla de aprendizaje del Perceptron, en la que se potencian las salidas correctas y no se tienen en cuenta las incorrectas, no existiendo ninguna graduación en la regla que indique en

qué medida resulta errónea la salida producida y refuerce proporcionalmente a dicha medida de error. El algoritmo de retropropagación es una extensión de la regla Delta para redes con capas intermedias (redes multicapa) y funciones de activación no lineales.

La importancia de la red backpropagation radica en la representación interna del conocimiento que es capaz de organizar en la capa intermedia de las células para conseguir cualquier correspondencia entre la entrada y la salida de la red autoadaptando los pesos de las neuronas de las capas intermedias.

Muy brevemente, el funcionamiento de una red backpropagation consiste en un aprendizaje de un conjunto de pares de entradas-salidas dados como ejemplo a través del siguiente proceso: primero se aplica un patrón de entrada como estímulo para la primera capa de neuronas de la red, se va propagando a través de todas las capas siguientes hasta generar una salida, se compara el resultado obtenido en las neuronas de salida con la salida que se desea obtener y se calcula un valor del error para cada neurona de salida. A continuación, estos errores se transmiten hacia atrás, partiendo de la capa de salida, hacia todas las neuronas de la capa intermedia que contribuyan directamente a la salida, recibiendo el porcentaje de error aproximado a la participación de la neurona intermedia en la salida original. Este proceso se repite, capa por capa, hasta que todas las neuronas de la red hayan recibido un error que describe su aportación relativa al error total. Basándose en el valor del error recibido, se reajustan los pesos de conexión de cada neurona, de manera que la siguiente vez que se presente el mismo patrón la salida esté más cercana a la deseada, es decir, el error disminuya. El proceso se repite para todos los ejemplos o patrones de entrenamiento, completando así una iteración o ciclo de aprendizaje. De esta manera, en ciclos sucesivos se van ajustando los parámetros de la red hasta alcanzar un mínimo del error cometido por la misma.

La habilidad del Perceptron multicapa para aproximar relaciones no lineales, filtrar ruido en los datos, etc., hace que sea un modelo adecuado para abordar problemas reales. No obstante, aunque sea una

de las redes más conocidas y utilizadas, esto no implica que sea una de las más potentes y con mejores resultados en las diferentes áreas de aplicación.

A pesar de la enorme eficacia predictiva que han mostrado las redes neuronales en numerosos estudios empíricos, debemos incidir en que son modelos de “caja negra” y conllevan serias dificultades de interpretación teórica, por lo que su utilización sólo sería acertada en aquellas situaciones donde la explicación pierda importancia frente a la predicción.

En cuanto a la aplicación de las redes al sector asegurador español, en el trabajo de Martínez de Lejarza (1999) se utiliza una muestra (López *et al*, 1994) de 70 empresas aseguradoras (35 sanas y 35 quebradas) con datos de cinco años antes de la quiebra. Se entrena un Perceptron multicapa con dos neuronas en la capa oculta para cada uno de los cinco años considerados, obteniéndose el 100% de clasificaciones correctas en el año 1, 97.96% en el año 2, 96% en el año 3, 100% en el año 4 y 97.43% en el año 5. Aunque los resultados parecen muy satisfactorios, hemos de matizar que no se efectúa ningún tipo de validación externa de los mismos y, por tanto, la eficacia predictiva del método sería muy discutible.

En Díaz *et al.* (2005), se utilizan 19 ratios financieros calculados a partir de las cuentas anuales de 3 años consecutivos previos a la quiebra tomadas de la misma muestra de empresas españolas de seguros no vida que en Sanchis *et al.* (2003), formada por 36 empresas fracasadas y 36 empresas sanas. En este trabajo, para cada uno de los tres años considerados se procede a entrenar una red backpropagation. La topología de las redes utilizadas es: 19 neuronas en la capa de entrada, correspondientes a los 19 ratios, una capa intermedia cuyo número de neuronas varía de una red a otra y 2 neuronas en la capa de salida, correspondientes a las clases. En cuanto a los resultados obtenidos, los porcentajes de empresas correctamente clasificadas en el entrenamiento de las redes para cada uno de los horizontes son, respectivamente, 98.15%, 94.23%, 97.5%, siendo del 77.78%, 87.5% y 85.71% en la validación externa.

### 3.2 Algoritmia Heurística Híbrida: Máquinas de Vectores Soporte, Algoritmos Genéticos, Enfriamiento Simulado

Una parte muy importante de las herramientas de inteligencia artificial está formada por los llamados *algoritmos heurísticos*, para la resolución de problemas en los que aproximaciones de tipo tradicional no son adecuadas. La gran mayoría de estos algoritmos tienen una componente de aleatoriedad importante, pero, al mismo tiempo, poseen una estructura de búsqueda que les hace ser muy potentes, y que ha contribuido a su popularidad en los últimos años.

Sin duda, el paradigma de algoritmo heurístico está formado por los algoritmos basados en la teoría de la evolución, más conocidos como *algoritmos evolutivos*, y entre éstos, los más populares y estudiados, los *algoritmos genéticos*. Los algoritmos genéticos son heurísticos utilizados para optimización y búsqueda, basados en la aplicación de las leyes de la evolución en la naturaleza (básicamente la supervivencia del más fuerte). A su popularidad han contribuido, en parte, la elegancia de las ideas que hay detrás, y sin duda también su sencillez, flexibilidad y aplicabilidad a una enorme variedad de problemas distintos en campos muy diferentes entre sí. Otro tipo de algoritmos como el *enfriamiento simulado* (Kirpatrick, 1983, 1984), basado en el proceso físico de enfriamiento de la materia, o la programación genética (Koza, 1992), en la que se evolucionan árboles de decisión, son menos populares.

La aplicación de algoritmos heurísticos en Economía ha sido tradicionalmente menor que en otras disciplinas, posiblemente porque en Economía la mayoría de los problemas en los que se han aplicado técnicas de Inteligencia Artificial son problemas de decisión, más apropiados para redes neuronales y distintos tipos de clasificadores, y no tanto para algoritmos de optimización (O’leary, 1998). Esta tendencia se matiza, sin embargo, en los últimos años, con la aparición de múltiples problemas de optimización relacionados con el estudio del mercado de valores, y la previsión de insolvencias empresariales donde a la batería de herramientas anteriores se le añade la de los algoritmos evolutivos.

En este apartado se presenta la aplicación de técnicas heurísticas en problemas de optimización que surgen en la previsión de insolvencias en compañías de seguros, concretamente en seguros no-vida, siguiendo los trabajos de Salcedo-Sanz *et al.* (2004, 2005) y Segovia *et al.* (2004). Específicamente se presenta la aplicación de algoritmos genéticos y enfriamiento simulado como algoritmos básicos que permiten mejorar la decisión (compañía solvente o insolvente) de un clasificador dado, en concreto una Máquina de Vectores Soporte.

En un problema de clasificación es muy común que no todas las características que definen las muestras sean completamente necesarias.

En general, por el contrario, es frecuente encontrarse con determinadas características completamente superfluas para un problema de clasificación dado. Este tipo de características son en general perjudiciales, porque añaden ruido al sistema, sin aportar absolutamente ninguna información que ayude al clasificador a clasificar correctamente las muestras. La inclusión de este tipo de características digamos “dañinas” es en la práctica inevitable, puesto que cuando se generan los datos no se conoce cuáles son las características importantes para un determinado problema, de manera que en principio las muestras son descritas con el mayor número de características posibles. La selección de características se puede definir y resolver, en general, como un problema de optimización combinatoria. Normalmente este tipo de problemas son difíciles de resolver con métodos tradicionales, y para ellos, los algoritmos heurísticos son una alternativa muy interesante.

Las metodologías que vamos ahora brevemente a comentar han demostrado ser tanto excelentes clasificadores [las Máquinas de Vectores Soporte (SVM- en inglés, Support Vector Machines] y/o excelentes “selectores de características [Algoritmos Genéticos-AG; Árboles de Decisión-AD y el Templado Simulado- SA (en inglés, Simulated Annealing)], y se han aplicado con éxito en multitud de tareas en el ámbito de la Ingeniería, de la Medicina y de la Economía, entre otras.

Estas metodologías se han aplicado utilizando las mismas empresas y ratios que en el trabajo de Sanchis *et al.* (2007), descritos en la sección 2, y para el año anterior a la quiebra.

El objetivo de los experimentos desarrollados ha sido intentar conseguir un conjunto de características que describan las 72 empresas consideradas, que sea menor que el inicial (19 ratios), y que proporcione un error medio de clasificación en test menor o igual que el proporcionado por el conjunto inicial de características. Para ello, en primer lugar es necesario evaluar la probabilidad de error en test obtenida con el clasificador, es decir, la SVM utilizando los 19 ratios del conjunto inicial de características. La probabilidad de error obtenida con estos 19 ratios utilizando el proceso de validación cruzada fue  $P_e = 0.33$ . Esto significa que la SVM, utilizando los 19 ratios acertaría en media dos tercios de las veces que evaluara la solvencia o insolvencia de una determinada empresa.

Una vez tomada esta referencia del conjunto inicial de ratios, realizan la selección de características mediante el algoritmo genético y el enfriamiento simulado.

Describiremos brevemente estas técnicas así como los resultados obtenidos con ellas para el problema que estamos tratando.

La SVM (Burges, 1998) es una máquina de aprendizaje que se basa en la siguiente idea: cuando no sea posible separar los datos en el espacio de entrada con un hiperplano lineal, trasladar, mediante aplicación no lineal, los vectores de entrada a un espacio de dimensión muy alta. En este nuevo espacio se construirá una superficie de decisión lineal. Esta idea se puede aplicar tanto en el caso en que los datos sean separables sin errores como para el caso de no separables. En los trabajos citados, la SVM ha sido utilizada para clasificar los datos primero sin seleccionar las características y después efectuando una eliminación de las variables (ratios) redundantes (“selección de características”) mediante la utilización de AG y del SA. De esta forma se mejora la tasa de clasificación de la SVM.

Los AG son un logro más de la Inteligencia Artificial en su intento de replicar comportamientos biológicos mediante la computación. Los algoritmos genéticos (Goldberg, 1989) son una clase de técnicas de búsqueda y resolución de problemas basados en la generación de una *población* de posibles soluciones (normalmente codificadas como cadenas de números binarios), llamados *individuos*. La población es en principio generada al azar, y evolucionada mediante la aplicación de *operadores evolutivos* (básicamente selección, cruce y mutación), que producen la aparición de nuevos individuos (nuevas soluciones al problema) a la vez que sólo las mejores soluciones (con respecto a alguna función objetivo o *fitness*) sobreviven, eliminándose con mucha mayor probabilidad aquellos individuos con peor fitness. La novedad que introducen los Algoritmos Genéticos es que explotan eficientemente la información histórica para especular sobre nuevos puntos de búsqueda, esperando un funcionamiento mejorado.

A diferencia del anterior el *enfriamiento simulado* (Kirpatrick, 1983, 1984) es un heurístico de búsqueda y optimización basado en el proceso natural conocido como *temple*. El proceso de temple consiste en calentar una sustancia y posteriormente enfriarla poco a poco, hasta que una estructura cristalina fuerte sea obtenida. Este proceso puede ser simulado en un ordenador y aplicado a la obtención de soluciones óptimas de un problema de optimización combinatoria. El proceso sería el siguiente: Se parte de una única solución al problema, generada aleatoriamente. Se define entonces una *temperatura del sistema* que irá siendo disminuida poco a poco a lo largo del algoritmo. Mediante un operador de mutación se van obteniendo distintas soluciones a partir de la solución actual. Si la nueva solución encontrada es mejor que la actual, ésta última es tomada como nueva solución actual. Si la nueva solución encontrada es peor, ésta puede ser tomada como solución actual probabilísticamente, y la probabilidad de aceptación de esta solución peor como la actual depende de la temperatura del sistema en ese momento. La temperatura del sistema, que controla la probabilidad de aceptación de soluciones peores que la actual, debe ser tal que al principio la probabilidad de aceptación sea grande, mientras que al final del algoritmo sólo las soluciones que sean mejores que la actual puedan ser aceptadas (probabilidad de aceptación de

soluciones peores nula). El procedimiento de enfriamiento simulado es mejor que otros heurísticos escapando de soluciones subóptimas, sin embargo, la solución que aporta no tiene por qué ser el óptimo global, sino que será una solución “suficientemente buena” que podemos considerar la solución a nuestro problema. La estructura general de un algoritmo de enfriamiento simulado está formada por la selección de la codificación de las soluciones, la función objetivo a ser optimizada y el operador de mutación aplicado.

Por tanto, en los trabajos mencionados se emplea un híbrido: los AG y el SA se utilizan para seleccionar los ratios más significativos y, la SVM se utiliza como clasificador, es decir, para clasificar las empresas de seguros en sanas o fracasadas.

Los mejores resultados obtenidos con el AG es el conjunto formado por los ratios {R1, R9, R13} con una tasa de error  $Pe = 0.23$ . Los ratios más relevantes seleccionados por el SA son dos conjuntos {R1, R9, R13} y {R3, R9, R19}, ambos con una probabilidad de error  $Pe = 0.23$ . Debemos destacar que los ratios {R1, R9, R13} son comunes a ambos algoritmos y que los resultados de clasificación (logrados utilizando la SVM) son para ambos algoritmos iguales, esto es,  $Pe = 0.23$ . Estos resultados, en cuanto a clasificación, son similares a los obtenidos con la metodología Rough Set (RS) para el experimento que utiliza dos muestras independientes ya que la tasa de acierto es aproximadamente del 77%, lo que implica una tasa de error de  $Pe = 0.23$ .

Sin embargo, los reductos obtenidos utilizando la teoría RS contenían de 4 a 6 ratios. Los ratios más significativos en los reductos son R1, R3, R4, R9, R17, R18 y R19. Si observamos, hay varias coincidencias con los seleccionados tanto por el AG como con el SA. Esto indicaría cuáles son en la muestra las variables más discriminatorias entre empresas solventes e insolventes.

Hay además que destacar que para la misma tasa de clasificación tanto el SA como el AG utilizan sólo 3 ratios (menos que la metodología RS), lo cual muestra que son herramientas más poderosas en

cuanto a selección de las variables más significativas. Sin embargo, estos resultados, a diferencia de los obtenidos por el método RS (reglas de decisión), son difíciles de justificar y no se pueden analizar claramente debido a su carácter de “caja negra”.

Por otro lado, en Salcedo-Sanz *et al.* (2005) se comparan los ratios obtenidos tanto por el método Rough Set como por el AG y el SA con los ratios obtenidos mediante la generación de árboles de decisión basados en la programación genética. Aunque en la próxima sección se explicarán con más detalle los árboles de decisión, cabe mencionar que un árbol de decisión básicamente consiste en una estructura compuesta de una secuencia de preguntas sencillas, cuyas respuestas trazan un camino que conduce hacia abajo en el árbol. El punto final alcanzado (hojas) determina la clasificación o predicción hecha por el modelo, que puede constituir tanto una respuesta cualitativa como cuantitativa.

Existen varios procedimientos para construir árboles de decisión. Uno de ellos consiste en generar árboles de decisión basados en la programación genética. En el trabajo citado, los ratios seleccionados como más relevantes por los árboles de decisión son R1, R4, R5, R7, R10, R11, R18, R20, R21.

Cabe destacar que los trabajos comentados señalan que el ratio R1, para la muestra utilizada, sería la variable más discriminadora entre empresas solventes e insolventes, ya que aparece en todos los métodos aplicados.

#### **4. ÁRBOLES DE DECISIÓN. ALGORITMO See5**

Quizás de entre todos los métodos de aprendizaje automático sean los sistemas de aprendizaje basados en árboles de decisión los más fáciles de utilizar y de entender. Además, la estructura de condición y ramificación de un árbol de decisión es idónea para el problema que nos ocupa, el de clasificación de empresas como sanas o fracasadas.

La construcción automática de árboles de decisión se origina con los trabajos en el campo de las ciencias sociales de Morgan y Sonquist (1963) y Morgan y Messenger (1973). En estadística, resulta fundamental la aportación de Breiman *et al.* (1984), que proponen el algoritmo para construir árboles denominado CART (*Classification and Regression Trees*). Más o menos al mismo tiempo los sistemas de inducción de árboles de decisión comienzan a usarse en el campo del aprendizaje automático, donde alcanzan una notable repercusión los algoritmos desarrollados por Quinlan (1979, 1983, 1986, 1988, 1993 y 1997), y en ingeniería (Henrichon y Fu, 1969; Sethi y Sarvarayudu, 1982).

Las sucesivas ramas de un árbol de decisión van realizando una serie de divisiones excluyentes y exhaustivas en el conjunto de elementos que se quieren clasificar. La diferencia básica entre los distintos algoritmos empleados radica en el criterio utilizado para realizar las particiones mencionadas. Comentaremos a continuación el probablemente más popular de entre todos los algoritmos de aprendizaje de árboles de clasificación a partir de un conjunto de datos de ejemplo.

El algoritmo See5 (Quinlan, 1997) es la versión más moderna del ID3 y C4.5 desarrollados por este autor a lo largo de las dos últimas décadas. En él, el criterio utilizado para hacer las particiones se apoya en una serie de conceptos procedentes de la Teoría de la Información y ha experimentado a lo largo del tiempo una serie de notables mejoras. La idea central que comparte con otros algoritmos similares es la de tomar en cada rama del árbol para hacer la correspondiente partición aquella variable que proporciona más información de cara a clasificar los elementos que constituyen el *conjunto de entrenamiento* (el conjunto de datos usados para construir el árbol).

La información que proporciona un mensaje o la realización de una variable aleatoria  $x$  es inversamente proporcional a su probabilidad (Reza, 1994). Resulta habitual en Ingeniería de Comunicaciones o en Estadística medir esta cantidad en bits, que se obtienen como

$$\log_2 \frac{1}{p_x}.$$

El promedio de esta magnitud para todas las posibles ocurrencias de la variable aleatoria  $x$  recibe el nombre de *entropía* de  $x$ :

$$H(x) = \sum_x p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)}.$$

La entropía es una medida de la aleatoriedad o incertidumbre de  $x$  o de la cantidad de información que, en promedio, nos proporciona el conocimiento de  $x$ .

Análogamente, se puede definir la *entropía conjunta* de dos variables aleatorias  $x$  e  $y$ :

$H(x, y) = \sum_{x, y} p(x, y) \log_2 \frac{1}{p(x, y)}$ , que es la cantidad de información que, en promedio, nos proporciona el conocimiento de  $x$  e  $y$ . La *entropía condicional* de  $x$  dada  $y$ ,  $H(x/y)$ , se define como

$H(x/y) = \sum_{x, y} p(x, y) \log_2 \frac{1}{p(x/y)}$ , y es una medida de la incertidumbre respecto a  $x$  cuando se conoce  $y$ . Es decir, es la cantidad de información que necesitamos para conocer plenamente  $x$  cuando ya tenemos la información suministrada por  $y$ . Se cumplirá siempre, lógicamente, que  $H(x/y) \leq H(x)$ , pues al conocer  $y$  tenemos más información que nos puede ayudar a reducir la incertidumbre sobre  $x$ . A esa reducción de incertidumbre se la denomina *información mutua* entre  $x$  e  $y$ :  $I(x; y) = H(x) - H(x/y)$ , que es la información que una de las variables nos transmite sobre la otra. Se cumple además que  $I(x; y) = I(y; x)$ . La información mutua es una magnitud similar a la covarianza pero tiene algunas propiedades que la hacen superior a ella.

Podemos considerar que  $x$  es una variable aleatoria que nos muestra la clase a la que pertenece un elemento, mientras que  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , son los atributos o variables que caracterizan a los elementos que queremos clasificar. Así, en el problema que nos ocupa,  $x$  indicaría si la empresa pertenece al grupo de las sanas o al grupo de las fracasadas, mientras que las variables  $y_i$  serían los ratios financieros utilizados para la clasificación.

Inicialmente Quinlan seleccionaba para hacer cada partición aquella variable  $y_i$  que proporcionaba la máxima información sobre  $x$ , es decir, maximizaba  $I(x ; y_i)$  (magnitud que denominaba *gain*). Aunque esto proporciona buenos resultados, introduce un sesgo en favor de las  $y_i$  con muchos valores distintos. Para corregirlo, las sucesivas versiones del algoritmo seleccionan aquella  $y_i$  que maximiza la magnitud  $\frac{I(x ; y_i)}{H(y_i)}$ , a la que Quinlan denomina *gain ratio*. Ésta será el porcentaje de la información proporcionada por  $y_i$  que es útil para conocer  $x$ .

Adicionalmente, para evitar seleccionar un atributo simplemente porque su entropía  $H(y_i)$  sea pequeña, lo que aumentaría el valor del cociente anterior, se exige además que  $I(x ; y_i)$  sea razonablemente grande.

El proceso de construcción del árbol de decisión mediante la aplicación reiterada del procedimiento descrito finaliza cuando se alcanza la pureza del nodo, entendiendo por “nodo puro” aquél al que sólo corresponden casos pertenecientes a una de las clases del problema, o cuando la ramificación del árbol ya no suponga ninguna mejora.

Generalmente, este método recursivo de construcción de árboles de decisión conducirá a la generación de árboles muy complejos y excesivamente ajustados a los datos del conjunto utilizado para dicha construcción. En consecuencia, harán una clasificación cuasi-perfecta. Esto, que en principio puede parecer óptimo, en realidad no lo es, ya que ajustarse demasiado a los datos de entrenamiento suele tener como consecuencia que el modelo sea muy específico y se comporte mal para nuevos elementos, especialmente si tenemos en cuenta que el conjunto de entrenamiento puede contener ruido, lo que hará que el modelo intente ajustarse a los errores, perjudicando su comportamiento global. Éste es un problema que en general presentan todas las técnicas de aprendizaje de un modelo a partir de un conjunto de datos de entrenamiento (Aprendizaje Automático), al que se conoce como “sobreajuste” (*overfitting*).

El modo más frecuente de limitar dicho problema en el contexto de los árboles de decisión consiste en eliminar condiciones de las ramas del árbol, consiguiendo con estas modificaciones la obtención de modelos más generales. Este procedimiento puede verse como un proceso de “poda” del árbol. Esto aumentará el error de clasificación sobre el conjunto de casos de entrenamiento, pero cabe esperar que lo disminuya sobre nuevos casos no usados en la construcción del árbol.

El algoritmo See5 permite combinar dos tipos de poda: prepoda y postpoda. El proceso de prepoda se realiza durante la construcción del árbol impidiendo la ramificación de nodos que contengan un número de ejemplos inferior a una cierta constante. Además, se implementa también un método de postpoda del árbol ajustado inicialmente que consiste en sustituir una rama del árbol por una hoja, en función de una tasa de error prevista o estimada. Consideremos que existe una hoja que cubre  $N$  casos clasificando incorrectamente  $E$  de ellos, lo que se puede interpretar suponiendo que existe una variable aleatoria que sigue una distribución binomial en la que el experimento se repite  $N$  veces obteniendo  $E$  errores.

A partir de esto se estima la probabilidad de error  $p_e$ , que será la tasa de error prevista o estimada. Para ello se realiza una estimación de un intervalo de confianza para la probabilidad de error de la variable binomial y se toma como  $p_e$  el límite superior de ese intervalo (será una estimación pesimista). Entonces, para una hoja que cubra  $N$  casos, el número de errores previstos será  $N \cdot p_e$ . Si en lugar de una hoja tenemos una rama el número de errores previstos será la suma de los de cada una de sus hojas. De este modo, una rama será sustituida por una hoja (es decir, la rama será podada) cuando el número de errores previstos de ésta sea menor que el de aquélla.

Este tipo de sistemas clasificadores presentan indudables ventajas para su aplicación al ámbito financiero, tales como su carácter estrictamente no paramétrico - lo cual es importante teniendo en cuenta que la información manejada habitualmente, ratios contables, no suele cumplir las hipótesis requeridas por las técnicas estadísticas -, que

no necesitan de la intervención del experto humano para la inferencia de los modelos clasificadores - ya que éstos se elaboran automáticamente - y que, además, frente a las redes neuronales y métodos similares, de indiscutible poder predictivo, sus resultados son mucho más fácilmente interpretables que los modelos de “caja negra” suministrados por aquéllos.

En cuanto a la utilización de estas técnicas para la predicción de insolvencias en el sector de seguros español, Díaz-Martínez *et al.* (2004) obtienen muy buenos resultados en su aplicación del algoritmo See5, utilizando la muestra de empresas y los ratios detallados en la sección 2.

Considerando 3 años consecutivos previos a la quiebra, obtienen los siguientes porcentajes de clasificaciones correctas con el conjunto de entrenamiento: 94,44% en el año 1, 90,39% en el 2 y 85% en el 3, y los siguientes en la validación: 72,22%, 81,25% y 78,57%. Las variables que componen los árboles (y, por tanto, las seleccionadas por el algoritmo como más discriminantes) son los ratios R13, R9, R17, R1, R2 y R6 para el año 1; R1, R13, R20, R7 y R3 para el año 2 y R4, R19 y R1 para el año 3. Además, aunque los resultados obtenidos son satisfactorios, los autores recurren para mejorarlos a la opción que incorpora See5 de *adaptive boosting*, basado en el trabajo de Freund y Schapire (1997).

Muy brevemente, la idea consiste en generar varios clasificadores en vez de sólo uno. Como primer paso, se construye un único árbol, que cometerá algunos errores en la clasificación. Estos errores serán el foco de atención al construir el segundo clasificador en aras de corregirlos. En consecuencia, el segundo clasificador generalmente será diferente al primero y también cometerá errores que serán el foco de atención durante la construcción del tercer clasificador. Este proceso continúa para un número predeterminado de iteraciones o *trials*. Finalmente, cada caso será clasificado ponderando las categorías a las que haya sido asignado por los distintos clasificadores construidos. Los resultados obtenidos con este método son con frecuencia excepcionalmente buenos. Así, en este trabajo, partiendo del árbol

de decisión obtenido para el primer año y realizando 18 iteraciones, se obtiene el 100% de clasificaciones correctas con el conjunto de entrenamiento y el 83,33% en el test.

## 5. CONCLUSIONES

A lo largo de la exposición se han ido enumerando algunas ventajas de la aplicación de técnicas de la Inteligencia Artificial a un problema financiero real como es el que nos ocupa. Podemos concluir que su utilización en el tratamiento de la información contable las convierte en herramientas muy valiosas a la hora de analizar la situación económico-financiera de las empresas. Recapitulando dichas ventajas tendríamos, entre otras:

- analizan los hechos escondidos en los datos, sin necesitar información adicional o preliminar sobre los datos. No necesitan que los datos verifiquen algún tipo de hipótesis,
- permiten utilizar variables cualitativas y cuantitativas,
- obtienen la mínima representación del conocimiento mediante la selección de variables,
- eliminan, con gran eficacia, aquellos atributos que son redundantes en el sistema de información.

Fruto de estas ventajas son las numerosas aplicaciones de estas metodologías a campos tan diversos como son la medicina, farmacología, industria, ingeniería, finanzas, geología, etc.

En este trabajo se ha contrastado dicha idoneidad mediante su aplicación a un problema real en el sector de seguros no-vida, obteniendo resultados muy satisfactorios y revelando algunas variables que, entre otras, deberían tenerse en cuenta para la evaluación de la solvencia en dicho sector.

En términos prácticos, estas técnicas pueden usarse como sistemas de diagnóstico automático para preseleccionar por ejemplo aquellas empresas que necesiten una atención especial, de una manera rápida y

a un coste bajo, y de este modo habría una gestión más eficiente del tiempo dedicado por el analista financiero o la autoridad supervisora dando, además, uniformidad a los juicios emitidos sobre una empresa.

Con la revisión realizada en este trabajo de distintas aplicaciones de técnicas de IA a un problema financiero real, hemos pretendido señalar la idoneidad de los métodos de la Inteligencia Artificial como herramientas de ayuda a la hora de justificar o contrastar una decisión.

## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Ahn, B.S., Cho, S.S. y Kim, C. Y. The Integrated Methodology Rough Set Theory and Artificial Neural Network for Business Failure Prediction. *Expert Systems with Applications*, 2000, 18, 65- 74.

Breiman, L., Friedman, J.H., Olshen, R.A. y Stone, C.J. *Classification and Regression Trees*, Wadsworth International Group, Belmont, California, 1984.

Brockett Patric L., Cooper, W., Golden, L y Pitaktong, U. A Neural Network Method for Obtaining an Early Warning of Insurer Insolvency”, *The Journal of Risk and Insurance*, 1994, Vol. 61, N° 3, 402-424.

Brockett, P., Golden, L., Jang, J. y Yang.C. A Comparison of Neural Network, Statistical Methods, and Variable Choice for Life Insurers’ Financial Distress Prediction. *The Journal of Risk and Insurance*, 2006, Vol. 73, N° 3, 397

Burges, C. J. A tutorial on Support Vector Machines for pattern recognition, *Knowledge Discovery and Data Mining*, 1998, vol. 2, no. 2, 121-167.

Díaz, Z, Segovia, M.J., Fernández, J. y del Pozo, E. Machine Learning and Statistical Techniques. An application to the prediction of Insolvency in Spanish Non-Life Insurance Companies. *The International Journal of Digital Accounting Research*, 2005, vol.5, nº 9, January-June, pp. 1-45.

Díaz-Martínez, Z., Fernández-Menéndez, J., Segovia-Vargas, M.J. y Del Pozo-García, E.M. See5 Algorithm versus Discriminant Analysis. An Application to the Prediction of Insolvency in Spanish Non-life Insurance Companies, *Investment Management and Financial Innovations*, 2004, nº 4, 100-112.

Dimitras, A.I., Slowinski, R., Susmaga, R. y Zopounidis, C. Business failure prediction using Rough Sets, *European Journal of Operational Research*, 1999, 114, 263-280.

Freund, Y. y Schapire, R.E. A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting, *Journal of Computer and System Sciences*, 1997, vol. 55, nº 1, 119-139.

Goldberg, D.E. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning, Addison-Wesley, 1989.

Greco, S., Matarazzo, B., y Slowinski, R. A new rough set approach to evaluation of bankruptcy risk, in C. Zopounidis (ed.), *New Operational Tools in the Management of Financial Risks*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998, 121-136.

Henrichon, Jr., E.G. y Fu, K.S. A nonparametric partitioning procedure for pattern classification, *IEEE Transactions on Computers*, 1969, 18, 614-624.

Jhieh-Yu Shyng , Fang-Kuo Wang, Gwo-Hshiung Tzeng y Kun-Shan Wu. Rough Set Theory in analyzing the attributes of combination values for the insurance market”, *Expert Systems with Applications*, 2007, 32, 56–64.

Kirpatrick, S., Gerlatt, C. D. y Vecchi, M. P. Optimization by simulated annealing, *Science*, 1983, vol. 220, 671-680.

Kirpatrick, S.. Optimization by simulated annealing--Quantitative studies, *Journal of Statistical Physics*, 1984, vol. 34, 975-986.

Koza, J. Genetic Programming, MIT press, Cambridge, MA, 1992.

López, D., Moreno, J. y Rodríguez, P. Modelos de previsión del fracaso empresarial: Aplicación a entidades de seguros en España, *Esic Market*, 1994, 84, 83-125.

Martín, M.L., Leguey, S. y Sánchez, J. M. Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: Metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante, *Cuadernos de la Fundación Mapfre Estudios*, vol. 49, 1999.

Martínez De Lejarza, I. Previsión del fracaso empresarial mediante redes neuronales: un estudio comparativo con el análisis discriminante, en Bonsón, E. (Ed.): *Tecnologías Inteligentes para la Gestión Empresarial*, RA-MA Editorial, Madrid, 1999, 53-70.

Mora, A. Los modelos de predicción del fracaso empresarial: una aplicación empírica del logia, *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 1994, 78, enero-marzo, pp. 203-233.

Morgan, J.N. y Messenger, R.C. THAID: a Sequential Search Program for the Analysis of Nominal Scale Dependent Variables. Ann Arbor, Michigan: Technical report, Institute for Social Research, University of Michigan, 1973.

Morgan, J.N. y Sonquist, J.A. Problems in the analysis of survey data, and a proposal, *Journal of the American Statistical Association*, 1963, 58, p. 415-434.

O' Leary, D.E. Using Neural Networks to Predict Corporate Failfure” , *International Journal of Intelligent Systems in Accounting Finance and Management*, 1998, Vol.7, pp. 187-197.

Pawlak, Z. *Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning about Data*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London, 1991.

Pawlak, Z. Rough sets and intelligent data analysis”, *Information Sciences*, 2002, Vol. 147, pp. 1-12.

Pawlak, z. y Skowron, A. Rudiments of rough sets”, *Decision Sciences*, 2007, Vol. 117, pp. 3-27.

Quinlan, J.R. Discovering rules by induction from large collections of examples, en Michie, D. Expert systems in the microelectronic age, Edimburgh University Press, Edimburgh, 1979.

Quinlan, J.R. Learning efficient classification procedures, en Michalski, R.S., Carbonell, J.G. y Mitchell, T.M. Machine learning: An Artificial Intelligence approach, Tioga Press, Palo Alto, California, 1983.

Quinlan, J.R. Induction of decision trees, Machine Learning, 1986, vol. 1, nº 1, 81-106.

Quinlan, J.R. Decision trees and multi-valued attributes, en: Hayes, J.E., Michie, D. y Richards, J. Machine Intelligence 11 - Towards an Automated Logic of Human Thought, Oxford University Press, Oxford, UK, 1988, 305-318.

Quinlan, J.R. C4.5: Programs for machine learning, Morgan Kaufmann, San Mateo, California, 1993.

Quinlan, J.R. See5, URL: <http://www.rulequest.com/see5-info.html>, 1997.

Reza, F.M. An introduction to Information Theory, Dover Publications, New York, 1994.

Rosenblatt, F. The perceptron: A perceiving and recognizing automation, Technical Report 85-460-1, Cornell Aeronautical Laboratory, 1957.

Rumelhart, D., Hinton, G. y Williams, R. Learning representations by back-propagating errors, 1986, Nature, 323, 533-536.

Salcedo-Sanz, S., Fernández-Villacañas, J. L., Segovia-Vargas M.J. y Bousoño-Calzón, C. Genetic programming for the prediction of insolvency in non-life insurance companies", Computers and Operations Research, 2005, vol.32, nº 4, pp. 749-765, April.

Salcedo-Sanz, S., Prado-Cumplido, M., Segovia-Vargas, M.J., Perez-Cruz, F. y Bousoño-Calzón, C. Feature selection methods involving

Support Vector Machines for prediction of insolvency in non-life insurance companies, *Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, 2004, 12, 261-281.

Sanchis, A., Gil, J.A. y Heras, A. El análisis discriminante en la previsión de la insolvencia en las empresas de seguros no vida, *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 2003, 116, enero-marzo, pp.183-233.

Sanchis, A., Segovia, M.J., Gil, J.A., Heras, A. y Vilar, J.L. Rough Sets and the role of the monetary policy in financial stability (macroeconomic problem) and the prediction of insolvency in insurance sector (microeconomic problem), *European Journal of Operational Research*, 2007, 181, issue 3, pp. 1554-1573.

Segovia-Vargas M.J., Salcedo-Sanz, S. y Bousoño-Calzón. Prediction of Insolvency in non-life insurance companies using support vector machines and genetic algorithms, *Fuzzy Economic Review*, 2004, Volume IX, number 1, may, pp. 79-94.

Sethi, I.K. y Sarvarayudu, G.P.R. Hierarchical classifier design using mutual information, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1982, 4, 441-445.

Slowinski R. y Stefanowski J. *RoughDas: Rough Set Based Data Analysis System-Version 2.0- User's Guide book*, Poznan, Poland, 1994.

Slowinski, R. y Zopounidis, C. Application of the rough set approach to evaluation of bankruptcy risk, *International Journal of Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management* 1995, 4, 1, 27-41.

Widrow, B. y Hoff, M.E. Adaptive switching circuits, *Institute of Radio Engineers, Western Electronic Show and Convention, Convention Record*, 1960, part 4, 96-104.

## Ponencia 4

### MODELO COLECTIVO DE RIESGO POISSON-LINDLEY Y EXPONENCIAL PARA RIESGO OPERACIONAL

M.P. Fernández-Sánchez, E. Gómez-Deniz y A. Hernández-Bastida

#### RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un análisis bayesiano del modelo colectivo de riesgo con distribución primaria la distribución de Poisson-Lindley y con distribución secundaria la distribución exponencial. Se analiza su utilización para la determinación del capital regulatorio en análisis del riesgo operacional.

**Palabras Claves:** Modelo de Riesgo Colectivo; Distribución Poisson-Lindley; Riesgo Operacional

#### 1 INTRODUCCIÓN

Siguiendo las recomendaciones de Basilea II, BIS (2005) los bancos necesitan cuantificar el capital regulatorio para el riesgo operacional. Diversos aspectos de la modelización del riesgo operacional pueden verse en Chavez-Demoulin, Embrechts y Neslehová (2006) y Cruz (2002). Una de las alternativas para esta determinación es adoptar el denominado enfoque de Loss Distribution Approach (LDA) en la Advanced Measurement Approach (AMA), donde la frecuencia y la severidad de las pérdidas operacionales para cada una de las 56 celdas (en la matriz de 8 líneas de negocio por siete tipos de sucesos) deben estimarse para el período de un año. A continuación se estima el capital usando el cuantil 0.999 de la distribución de la pérdida total anual. Por tanto, bajo la aproximación LDA para AMA, las entidades

deben determinar las distribuciones para la frecuencia y severidad de las pérdidas operacionales de cada celda de riesgo.

Un modelo comúnmente utilizado para la pérdida anual, en cada una de las celdas, es el denominado modelo colectivo de riesgo (en adelante *crm*), que consiste en considerar que la pérdida  $S$  se modela de acuerdo a  $S = \sum_{i=1}^K X_i$ , donde  $K$  es el número anual de sucesos modelado como una variable aleatoria de alguna distribución discreta y  $X_i; i = 1, \dots, K$  son las severidades del suceso modelado como variables aleatorias independientes de una distribución continua de probabilidad. Se supone que la frecuencia  $K$  y severidad  $X_i$  son independientes, estando la independencia condicionada a los parámetros. Se ha publicado una amplia literatura sobre la modelización de los procesos de riesgo. Véase, por ejemplo, McNeil, Frey y Embrechts (2005).

La estimación de la distribución de la pérdida anual a través de la modelización de las frecuencias y severidades es una técnica actuarial bien conocida; por ejemplo, se usa para modelar las necesidades de solvencia en la industria de seguros, ver por ejemplo, Sandström, A. (2006) and Wüthrich, M.V. (2006).

Una modelización del *crm*, muy desarrollada en la literatura es la que consiste en considerar que la distribución primaria, es decir la distribución de  $K$ , es una distribución de Poisson y la distribución secundaria, es decir la distribución de la severidad, es una distribución exponencial. No obstante lo anterior también es conocido desde hace tiempo una dificultad apreciable que se presenta en numerosos conjuntos de datos en los que la varianza del número de reclamaciones es apreciablemente mayor que la media (fenómeno conocido como sobredispersión). Esto ha llevado a la consideración de diversas distribuciones alternativas a la distribución de Poisson, para modelar la distribución de la variable aleatoria  $K$ ; en especial las distribuciones mixturas de Poisson en las que se produce siempre el fenómeno de la sobredispersión. Véase, por ejemplo, Grandell (1997) o Nikoloulopoulos y Karlis (2008); entre otros.

Para el propósito del cálculo del capital regulatorio del riesgo operacional, debe calcularse la distribución de la pérdida anual (en particular su cuantil 0,999 como una medida de riesgo) para cada celda de riesgo (tipo de suceso frente a línea de negocio) en el banco. La estimación de la distribución de la frecuencia y de la severidad es una tarea complicada y es difícil estimar las distribuciones usando sólo los datos. Está claro que esta estimación tiene una capacidad limitada para predecir el futuro debido a los constantes cambios que se producen en el ambiente bancario. Por ejemplo, supongamos que una nueva política ha sido introducida en el banco con la idea de reducir las pérdidas de riesgo operacional. Esta no puede ser recogida en el modelo basado sólo en los datos. Por ello es muy importante poder incorporar un análisis del escenario en el modelo. Por si mismo el escenario de análisis es muy subjetivo y debería ser combinado con el análisis de datos de pérdidas actual.

La inferencia bayesiana es una técnica estadística que permite incorporar las opiniones de los expertos al análisis de datos. En este problema, en nuestro conocimiento, poco se ha publicado sobre la aproximación bayesiana al tema. Excepciones a lo anterior son los excelentes trabajos de Shevchenko y Wüthrich (2006); Lambrigger, Shevchenko y Wüthrich, (2007) y Shevchenko (2008).

En Shevchenko y Wüthrich (2006) se propone como procedimiento de cálculo para el capital regulatorio determinar las distribuciones a posteriori del número de reclamaciones y de la severidad de las reclamaciones. A continuación simular un valor del parámetro del número de reclamaciones, a partir de su distribución a posteriori; simular un valor del parámetro de la severidad de las reclamaciones, a partir de su distribución a posteriori, y con los valores anteriores de los parámetros simular valores de la pérdida agregada y a partir de estos valores determinar su cuantil 99,9%. En Lambrigger, Shevchenko y Wüthrich, (2007, p.24) se propone una metodología similar. Observemos que en el procedimiento descrito o cuando el capital es estimado usando estimadores puntuales de los parámetros (por ejemplo estimadores de máxima verosimilitud) se procede, tal y como apunta muy lucidamente, en nuestra opinión, Shevchenko (2008) de la siguiente mane-

ra: aunque la estimación de los parámetros es incierta, en la práctica, esta incertidumbre es generalmente ignorada en la estimación del capital regulatorio (ver trabajo citado para argumentaciones adicionales). Por esta razón en el trabajo indicado se propone la utilización de la distribución predictiva y la determinación del cuantil de orden 0,999 en dicha distribución predictiva. Esta es la línea que seguiremos en este trabajo

Nos planteamos el análisis estadístico bayesiano del modelo crm considerando como distribución primaria la distribución Poisson-Lindley (Sankaran, 1971) y como distribución secundaria una distribución exponencial, en definitiva el modelo que notamos crmPLE y siguiendo la línea indicada en el párrafo anterior, el objetivo es determinar la distribución predictiva del modelo crmPLE.

En lo que sigue notamos,

$${}_p F_q \left[ \{a_1, a_2, \dots, a_p\}; \{b_1, b_2, \dots, b_k\}; z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_k}{q \prod_{j=1}^k (b_j)_k} \frac{z^k}{k!},$$

a la función hipergeométrica de Gauss, donde  $(\alpha)_j = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+j-1)$  para  $j \geq 1$  y  $(\alpha)_0 = 1$  es el símbolo de Pochhammer (véase a Yakubovich y Luchko (1994); Mathai (1993) o <http://functions.wolfram.com>).

## 2 EI MODELO

Sea  $K$  la variable aleatoria número de reclamaciones que suponemos sigue una distribución Poisson-Lindley de parámetro  $\lambda > 0$ , con función de probabilidad  $\Pr[K = k / \lambda] = \lambda^2 (\lambda + 2 + k) / (\lambda + 1)^{k+3}$ ;  $k = 0, 1, \dots$ . La distribución Poisson-Lindley es una distribución de tipo discreto, con función de probabilidad propuesta en Sankaran (1971) y obtenida como mezcla de la distribución de Poisson con una distribución Lindley de tipo continuo (Lindley (1958)). Algunos trabajos que tratan sobre el uso de esta distribución uniparamétrica son Karlis and Xekalaki (2005) y recientemente Ghitany and Al-Mutairi (2008), y Ghitany et al. (2009).

Reparametrizando la distribución Poisson-Lindley, tomando

$$\theta_1 = \lambda / (\lambda + 1), \text{ se obtiene } f_{PL} [k / \theta_1] = \theta_1^2 (1 - \theta_1)^k [2 - \theta_1 + (1 - \theta_1)k];$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\theta_1 \in (0, 1)$ , la función generatriz de momentos es:

$$M_1^{PL} (t; \theta_1) = \theta_1^2 (2 - \theta_1 - e^t + \theta_1 e^t) (1 - e^t + \theta_1 e^t)^2,$$

la esperanza es  $E_{PL} [K] = (2 - \theta_1)(1 - \theta_1) / \theta_1$ ,

el momento no central de segundo orden es

$$E_{PL} [K^2] = (1 - \theta_1) (3\theta_1^2 - 8\theta_1 + 6) \theta_1^2,$$

la varianza es  $Var_{PL} [K] = (1 - \theta_1) (\theta_1^3 - 2\theta_1^2 + 2) \theta_1^2$ ;

y además es conocido que la distribución es sobredispersa, es decir,

$$Var_{PL} [K] / E_{PL} [K] > 1.$$

La Tabla 1 recoge la comparación, para distintos valores de  $k$ , entre las probabilidades de una Poisson Lindley y de una Poisson de igual media.

**Tabla 1**  
Comparación entre la distribución de Poisson Lindley (PL)  
y una Poisson (P) de igual media.

VALOR DE LA MEDIA	$k$	0	2	3
2	PL	0.3	0.163	0.11
	P	0.135	0.271	0.18
2.5	PL	0.246	0.16	0.118
	P	0.082	0.256	0.214
3	PL	0.206	0.154	0.121
	P	0.049	0.224	0.224
4	PL	0.151	0.136	0.117
	P	0.018	0.146	0.195

Sea  $X_i$  la variable aleatoria tamaño, o severidad, de las reclamaciones que suponemos sigue una distribución exponencial de parámetro

$\theta_2 > 0$ , con función de densidad,  $f_E(x/\theta_2) = \theta_2 e^{-\theta_2 x}$ , para  $x > 0$ . La función generatriz de momentos es  $M_2^E(t; \theta_2) = \theta_2 / (\theta_2 - t)$ ; con esperanza y varianza  $E_E[X] = 1/\theta_2$  y  $Var_E[X] = 1/\theta_2^2$ , respectivamente.

**Proposición 1** La función de densidad de la variable aleatoria pérdida agregada  $S$ , en el crmPLE viene dada por,

$$f_{PLE}(s/\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \theta_1^2 (1-\theta_1) \theta_2 \left[ 3 - 2\theta_1 + (1-\theta_1)^2 \theta_2 s \right] e^{-\theta_1 \theta_2 s}; & s > 0 \\ \theta_1^2 (2-\theta_1); & s = 0 \end{cases}$$

*Demostración.* Se obtiene por cálculo directo teniendo en cuenta que la convolución de  $n$  distribuciones exponenciales viene dada por  $\theta_2^n x^{n-1} e^{-\theta_2 x} / (n-1)!$  y observando que,

$$\begin{aligned} f_{PLE}(s/\theta_1, \theta_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_2^n s^{n-1} e^{-s\theta_2}}{(n-1)!} \theta_1^2 \left[ 2 - \theta_1 + (1-\theta_1)n \right] = \\ & \left[ 2\theta_1^2 (1-\theta_1) \theta_2 - \theta_1^3 (1-\theta_1) \theta_2 + s \theta_1^2 (1-\theta_1)^3 \theta_2^2 + \theta_1^2 (1-\theta_1)^2 \theta_2 \right] e^{-s\theta_2} \\ & \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[s(1-\theta_1)\theta_2]^n}{n!} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Para realizar un análisis bayesiano consideremos para los parámetros, denominados perfiles de riesgo,  $\theta_1$  y  $\theta_2$  las siguientes distribuciones a priori, o función estructura, marginales:

$$\pi_{10}(\theta_1) = [1/B(a, b)] \theta_1^{a-1} (1-\theta_1)^{b-1} \quad \theta_1 \in (0, 1); \quad a, b \in R^+;$$

es una distribución beta y

$$\pi_{01}(\theta_2) = [d^c / \Gamma(c)] \theta_2^{c-1} e^{-d\theta_2}; \quad \theta_2 \in R^+; \quad c, d \in R^+ \text{ es una distribu-}$$

ción gamma. Si suponemos que  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son independientes entonces la distribución a priori bidimensional es  $\pi_0(\theta_1, \theta_2) = \pi_{10}(\theta_1)\pi_{01}(\theta_2)$ . Observemos que una forma atractiva de modelar la dependencia es a través de la dependencia entre perfiles de riesgo  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , ver Shevchenko y Wüthrich (2006; p.21). En este trabajo consideramos independencia entre dichos perfiles.

En lo que sigue será útil y muy cómodo utilizar el lema siguiente. En él observamos que todas las funciones que aparecen son calculables de manera directa e inmediata utilizando el software Mathematica.

**Lema 1** Se satisface lo siguiente:

(i) Se verifica la siguiente igualdad, 
$$\int_0^1 e^{t\theta} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} d\theta = B(a, b) {}_1F_1(a; a+b; t).$$

(ii) Si notamos  $I_1(\alpha, \beta, \delta) \equiv \int_{\theta_1=0}^1 \int_{\theta_2=0}^{\infty} \theta_1^\alpha (1-\theta_1)^\beta \theta_2^\delta \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2,$

entonces se verifica que, 
$$I_1(\alpha, \beta, \delta) = \frac{B(a+\alpha, b+\beta)\Gamma(c+\delta)}{B(a, b)\Gamma(c)d^\delta}.$$

(iii) La función

$$I_2(a, b, d, f, x) \equiv \int_{\theta_1=0}^1 \int_{\theta_2=0}^{\infty} \theta_1^\alpha (1-\theta_1)^\beta \theta_2^\delta e^{-\phi\theta_2 d} e^{-x\theta_1\theta_2} \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2,$$

es una función hipergeométrica de Gauss, en concreto:

$$I_2(\alpha, \beta, \delta, \phi, x)$$

$$= \left( \frac{B(a+\alpha, b+\beta)\Gamma(c+\delta)}{B(a, b)\Gamma(c)d^\delta (\phi+1)^{c+\delta}} \right) {}_2F_1 \left( \{a+\alpha; c+\delta\}; \{a+b+\alpha+\beta\}; \frac{-x}{d(\phi+1)} \right),$$

que puede escribirse como

$$I_2(\alpha, \beta, \delta, \phi, x) = \frac{I_1(\alpha, \beta, \delta)}{(\phi+1)^{c+\delta}} {}_2F_1\left(\{a+\alpha; c+\delta\}; \{a+b+\alpha+\beta\}; \frac{-x}{d(\phi+1)}\right).$$

(iv) La función  $I_3(\alpha, \beta; s) \equiv \int \int_{\theta_1, \theta_2} \theta_1^\alpha \theta_2^\beta f_{PLE}(s/\theta_1, \theta_2) \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$ , es una combinación lineal de funciones hipergeométricas, en concreto, para  $s > 0$ ,

$$I_3(\alpha, \beta; s) = 3I_2(\alpha+2, 1, \beta+1, 0, s) - 2I_2(\alpha+3, 1, \beta+1, 0, s) + sI_2(\alpha+2, 3, \beta+2, 0, s),$$

y para  $s=0$ ,  $I_3(\alpha, \beta; 0) = 2I_1(\alpha+2, 0, \beta) - I_1(\alpha+3, 0, \beta)$ .

*Demostración Ver Anexo.*

La siguiente Proposición desarrolla los elementos básicos para el análisis bayesiano del modelo crmPLE. Además, en el apartado (v) se expone una forma razonablemente sencilla (en el modelo que nos ocupa) para determinar los momentos no centrales de la distribución marginal, suministrando un camino válido para especificar los parámetros  $a, b, c, d$ , (ver Berger (1985)).

**Proposición 2.** En el crmPLE se verifica lo siguiente:

(i) La distribución marginal de  $s$  dado  $\pi_0$  viene dada por,

$$m(s/\pi_0) = \begin{cases} I_3(0, 0; s); & s > 0 \\ I_3(0, 0; 0) = \frac{(a)_2 (a+2b+2)}{(a+b)_3}; & s = 0 \end{cases}.$$

(ii) La distribución a posteriori de  $(\theta_1, \theta_2)$  viene dada por,

$$\pi_0(\theta_1, \theta_2 / s) = \begin{cases} \frac{d^c \theta_1^{a+1} (1-\theta_1)^b [3-2\theta_1 + (1-\theta_1)^2 \theta_2 s] \theta_2^c e^{-\theta_1 \theta_2 s - \theta_2 d}}{B(a, b) \Gamma(c) m(s / \pi_0)}; & s > 0 \\ \frac{\theta_1^2 (2-\theta_1) \pi_0(\theta_1, \theta_2)}{m(0 / \pi_0)}; & s = 0 \end{cases} .$$

(iii) La moda de la distribución a posteriori  $\pi_0(\theta_1, \theta_2 / s)$  puede obtenerse de la siguiente manera.

Para  $s > 0$ , se obtiene como una solución del sistema de ecuaciones,

$$\left. \begin{aligned} \frac{a+1}{\theta_1} - \frac{b}{1-\theta_1} - s\theta_2 - \frac{2+2s(1-\theta_1)\theta_2}{3-2\theta_1+s(1-\theta_1)^2\theta_2} &= 0 \\ \frac{c}{\theta_2} - s\theta_1 - d + \frac{s(1-\theta_1)^2}{3-2\theta_1+s(1-\theta_1)^2\theta_2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Para  $s=0$  la moda es  $\hat{\theta}_2^{PLE} = (c-1)/d$ , y  $\hat{\theta}_1^{PLE}$  es una raíz positiva de la ecuación  $(a+b+1)\theta_1^2 - (3a+2b+2)\theta_1 + 2a+2$ .

(iv) Los momentos no centrales de orden  $r$  de las variables  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en la distribución a posteriori vienen dados por

$$E_{\pi_0(\theta_1, \theta_2 / s)}[\theta_1^r] = \frac{I_3(r, 0; s)}{m(s / \pi_0)} \text{ y } E_{\pi_0(\theta_1, \theta_2 / s)}[\theta_2^r] = \frac{I_3(0, r; s)}{m(s / \pi_0)} .$$

(v) La función generatriz de momentos de la distribución marginal de  $S$  viene dada por,

$$M_4(t) = \int \int_{\theta_1, \theta_2} M_3(t; \theta_1, \theta_2) \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 .$$

Por tanto, el momento respecto al origen de orden  $r$  se puede obtener con la expresión

$$\int \int_{\theta_1, \theta_2} \left[ \frac{\partial^r M_3(t; \theta_1, \theta_2)}{\partial t^r} \right]_{t=0} \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 .$$

En particular,  $E_{m(s/\pi_0)}(S) = \int \int_{\theta_1, \theta_2} \frac{\theta_1^2 - 3\theta_1 + 2}{\theta_1 \theta_2} \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 .$

**Demostración** La afirmación (i) se obtiene utilizando el Lema 1 en las siguientes expresiones:

Para  $s > 0$ ,

$$m(s/\pi_0) = \int \int_{\theta_1, \theta_2} f_{PLE}(s/\theta_1, \theta_2) \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = I_3(0, 0; s) = 3I_2(2, 1, 1, 0, s) - 2I_2(3, 1, 1, 0, s) + sI_2(2, 3, 2, 0, s),$$

mientras que para  $s=0$ ,

$$m(0/\pi_0) = \int \int_{\theta_1, \theta_2} f_{PLE}(0/\theta_1, \theta_2) \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = I_3(0, 0; 0) = 2I_1(2, 0, 0) - I_1(3, 0, 0).$$

Operando se obtiene el resultado. La afirmación (ii) es directa, la afirmación (iii) se obtiene con cálculos sencillos, la afirmación (iv) es directa usando el Lema 1 y la afirmación (v) se obtiene de,

$$M_4(t) = \int_s e^{st} m(s/\pi_0) ds = \int_s e^{st} \left[ \int \int_{\theta_1, \theta_2} f_{PLE}(s/\theta_1, \theta_2) \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right] ds = \int \int_{\theta_1, \theta_2} \left[ \int_s e^{st} f_{PLE}(s/\theta_1, \theta_2) ds \right] \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$\int \int_{\theta_1, \theta_2} M_3(t, \theta_1, \theta_2) \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 .$$

■

La siguiente tabla recoge los valores de la distribución marginal para algunas cuaternas de hiperparámetros.

**Tabla 2**  
Valores de la distribución marginal de  $s$ ,  $m(s / \pi_0)$

	$s$	$0$	$0.1$	$0.2$	$0.3$	$0.5$	$0.9$
$a=1.5; b=4; c=6; d=3$		0.161	0.231	0.220	0.210	0.191	0.161
$a=1.5; b=6; c=1.5; d=.5$		0.096	0.245	0.231	0.218	0.195	0.159
$a=2; b=7; c=2; d=1$		0.109	0.191	0.184	0.177	0.165	0.142
$a=3; b=2; c=9; d=7$		0.514	0.239	0.223	0.209	0.183	0.142
$a=5; b=5; c=1.5; d=2$		0.386	0.156	0.149	0.142	0.130	0.109
$a=8; b=0.5; c=4; d=6$		0.934	0.033	0.031	0.029	0.025	0.019

### 3 EL crmPLE Y EL RIESGO OPERACIONAL

El objetivo, en el contexto del riesgo operacional, es estimar la distribución predictiva de una observación futura condicionada a la información disponible. En el siguiente resultado se aborda el problema completo. Como se puede observar la función de densidad de la distribución predictiva en el modelo crmPLE se obtiene como una combinación lineal de funciones hipergeométricas con coeficientes dados por funciones Beta.

**Proposición 3.** En el crmPLE, dada la observación  $s_1$ , la función de densidad predictiva,  $p_{PLE}(s / s_1)$  viene dada por las siguientes expresiones:

Para  $s_1 > 0$ :

$$p_{PLE}(s / s_1) = \frac{1}{m(s_1 / \pi_0)} \{9I_2(4, 2, 2, 0, s + s_1) - 12I_2(5, 2, 2, 0, s + s_1) + 4I_2(6, 2, 2, 0, s + s_1) + 3(s + s_1)I_2(4, 4, 3, 0, s + s_1) - 2(s + s_1)I_2(5, 4, 3, 0, s + s_1) + s \cdot s_1 \cdot I_2(4, 6, 4, 0, s + s_1)\}.$$

$$p_{PLE}(0/s_1) = \frac{1}{m(s_1/\pi_0)} \{6I_2(4,1,1,0,s_1) - 7I_2(5,1,1,0,s_1) + 2s_1I_2(4,3,2,0,s_1) + 2I_2(6,1,1,0,s_1) - s_1I_2(5,3,2,0,s_1)\}.$$

Para  $s_1 = 0$ :

$$p_{PLE}(s/0) = \frac{1}{m(0/\pi_0)} \{6I_2(4,1,1,0,s) - 7I_2(5,1,1,0,s) + 2sI_2(4,3,2,0,s) + 2I_2(6,1,1,0,s) - sI_2(5,3,2,0,s)\}.$$

$$p_{PLE}(0/0) = \frac{1}{m(0/\pi_0)} \{4I_1(4,0,0) + I_1(6,0,0) - 4I_1(5,0,0)\}.$$

*Demostración.* Se obtiene por cálculo directo a partir de definición:

$$p_{PLE}(s/s_1) = \int \int_{\theta_1, \theta_2} f_{PLE}(s/\theta_1, \theta_2) \pi_0(\theta_1, \theta_2/s_1) d\theta_1 d\theta_2$$

$$= \frac{1}{m(s_1/\pi_0)} \int \int_{\theta_1, \theta_2} f_{PLE}(s/\theta_1, \theta_2) f_{PLE}(s_1/\theta_1, \theta_2) \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2,$$

determinando el producto  $f_{PLE}(s/\theta_1, \theta_2) f_{PLE}(s_1/\theta_1, \theta_2)$  para los cuatro casos posibles para el par  $(s_1, s)$ , que son  $(s_1 \neq 0, s \neq 0)$ ,  $(s_1 \neq 0, 0)$ ,  $(0, s \neq 0)$  y  $(0, 0)$ , y utilizando el Lema 1. ■

**Corolario 1.** La función de distribución de la distribución predictiva en el crmPLE viene dada por

$$P_{PLE}(s/s_1) = p_{PLE}(0/s_1) + \int_0^s p_{PLE}(s/s_1) ds.$$

*Demostración.* Es directa. ■

Utilizando el Corolario 1 se puede determinar un cuantil de orden cualquiera de la distribución predictiva haciendo evaluaciones sucesivas de la función de distribución.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Berger, J.O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. Ed. Springer Verlag, 2ª ed.

BIS (2005). *Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standard: a revised framework*. Bank for International Settlements (BIS), [www.bis.org](http://www.bis.org)

Chavez-Demoulin, V. ; P. Embrechts, J. Neslehová (2006) "Quantitative Models for Operational Risk: Extremes, Dependence and Aggregation". *Journal of Banking and Finance*, 30-10: 2635-2658

Cruz, M.G. (2002). *Modelling, Measuring and Hedging Operational Risk*. John Wiley and Sons, UK.

Ghitany, M.E., Al-Mutairi, D.K. (2008). Estimation methods for the discrete Poisson-Lindley distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. To appear.

Ghitany, M.E. ; Al-Mutairi, D.K., Nadarajah, S. (2009). Zero-truncated Poisson-Lindley distribution and its applications. *Mathematics and Computers in Simulation*. To appear.

Grandell, J. (1997). *Mixed Poisson Processes*. Chapman and Hall. New York.

Karlis, D., Xekalaki, E. (2005). "Mixed Poisson distributions". *International Statistical Review*, 73, 35-58.

Lambrigger, D.D., Shevchenko, P.V., Wüthrich, M.V. (2007). The Quantification of Operational Risk using Internal Data, Relevant External Data and Expert Opinions. *The Journal of Operational Risk*, 2-3: 3-27.

Lindley, D.V. (1958). "Fiducial Distributions and Bayes's Theorem". *Journal of the Royal Stat. Soc. Series B*, 1; 102-107.

Mathai, AM . (1993). *A Handbook of Generalized Special Functions for Statistical and Physical Sciences*. Clarendon Press, Oxford.

McNeil, Frey, Embrechts (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press.

Nikoloulopoulos, A.K., Karlis, D. (2008). On modelling count data: a comparison of some well-known discrete distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78-3: 437-457.

Sandström, A. (2006). *Solvency: Models, Assessment and Regulation*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton

Sankaran, M. (1971). "The Discrete Poisson-Lindley Distribution". *Biometrics*, 26,1, 145-149.

Shevchenko, P.V. (2008). "Estimation of Operational Risk Capital Charge under Parameter Uncertainty".

Shevchenko, P.V., M.V. Wüthrich (2006). The Structural Modelling of Operational Risk via Bayesian inference: Combining Loss Data with Expert Opinions. *The Journal of Operational Risk*, 1-3: 3-26.

Wüthrich, M.V. (2006). Premium Liability Risks: Modelling Small Claims. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*. 1:27-38.

Yakubovich, SB y Luchko, YF (1994). *The Hypergeometric Approach to Integral Transforms and Convolutions*. Kluwer Academic Publis.

### Demostración del Lema 1

(i): Si  $\theta_1$  se distribuye según una distribución  $Be(a, b)$ ,

$$\text{entonces } E_{\pi_{10}} \left[ \theta_1^r \right] = \frac{\Gamma(a+r)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+r)\Gamma(a)};$$

dado que existen los momentos de todos los órdenes y  $E \left[ |\theta_1|^r \right] < 1, \forall r$ .

$$\text{Por tanto, } E_{\pi_{10}} \left[ e^{t\theta_1} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} E \left[ \theta_1^j \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{\Gamma(j+1)} \frac{\Gamma(a+j)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+j)\Gamma(a)};$$

$$\text{y como consecuencia, } \int_0^1 e^{t\theta_1} \theta_1^{a-1} (1-\theta_1)^{b-1} d\theta_1 = B(a, b) {}_1F_1(a; a+b; t).$$

$$\begin{aligned} \text{(ii): } I_1(\alpha, \beta, \delta) &= \frac{d^c}{B(a, b)\Gamma(c)} \int_{\theta_1=0}^1 \theta_1^{a+\alpha-1} (1-\theta_1)^{b+\beta-1} d\theta_1 \int_{\theta_2=0}^{\infty} \theta_2^{c+\delta-1} e^{-d\theta_2} d\theta_2 \\ &= \frac{B(a+\alpha, b+\beta)\Gamma(c+\delta)}{B(a, b)\Gamma(c)d^\delta}. \end{aligned}$$

$$\text{(iii): } I_2(\alpha, \beta, \delta, \phi, x) =$$

$$\frac{d^c}{B(a, b)\Gamma(c)} \int_{\theta_2=0}^{\infty} \theta_2^{c+\delta-1} e^{-d(\phi+1)\theta_2} d\theta_2 \int_{\theta_1=0}^1 \theta_1^{a+\alpha-1} (1-\theta_1)^{b+\beta-1} e^{-x\theta_1\theta_2} d\theta_1 =$$

$$\frac{d^c B(a+\alpha, b+\beta)}{B(a, b)\Gamma(c)} \int_{\theta_2=0}^{\infty} \theta_2^{c+\delta-1} e^{-d(\phi+1)\theta_2} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\alpha+j)\Gamma(a+b+\alpha+\beta)}{\Gamma(a+b+\alpha+\beta+j)\Gamma(a+\alpha)} \frac{(-x\theta_2)^j}{j!} \right] d\theta_2 =$$

$$\frac{d^c B(a+\alpha, b+\beta)}{B(a, b)\Gamma(c)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\alpha+j)\Gamma(a+b+\alpha+\beta)}{\Gamma(a+b+\alpha+\beta+j)\Gamma(a+\alpha)} \frac{(-x)^j}{j!} \int_{\theta_2=0}^{\infty} \theta_2^{c+\delta+j-1} e^{-d(\phi+1)\theta_2} d\theta_2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^c B(a+\alpha, b+\beta) \Gamma(c+\delta)}{d^{c+\delta} B(a, b) \Gamma(c) (\phi+1)^{c+\delta}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\frac{\Gamma(a+\alpha+j) \Gamma(c+\delta+j)}{\Gamma(a+\alpha) \Gamma(c+\delta)}}{\frac{\Gamma(a+b+\alpha+\beta+j)}{\Gamma(a+b+\alpha+\beta)} j!} \left( \frac{-x}{d(\phi+1)} \right)^j \\
&= \frac{B(a+\alpha, b+\beta) \Gamma(c+\delta)}{d^\delta B(a, b) \Gamma(c) (\phi+1)^{c+\delta}} {}_2F_1 \left( \{a+\alpha, c+\delta\}; \{a+b+\alpha+\beta\}; \frac{-x}{d(\phi+1)} \right).
\end{aligned}$$

(iv): Para  $s > 0$

$$\begin{aligned}
I_3(\alpha, \beta; s) &= \int \int_{\theta_1, \theta_2} \theta_1^\alpha \theta_2^\beta f_{PLE}(s/\theta_1, \theta_2) \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\
&= \int \int_{\theta_1, \theta_2} \theta_1^{\alpha+2} (1-\theta_1) \theta_2^{\beta+1} \left[ 3 - 2\theta_1 + s(1-\theta_1)^2 \theta_2 \right] e^{-s\theta_1\theta_2} \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \\
&= \\
&3I_2(\alpha+2, 1, \beta+1, 0, s) - 2I_2(\alpha+3, 1, \beta+1, 0, s) + sI_2(\alpha+2, 3, \beta+2, 0, s);
\end{aligned}$$

y para  $s = 0$   $I_3(\alpha, \beta; 0) = \int \int_{\theta_1, \theta_2} \theta_1^\alpha \theta_2^\beta f_{PLE}(0/\theta_1, \theta_2) \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$

Operando se obtiene el resultado. ■

## Ponencia 5

# UNA GENERALIZACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL CON APLICACIONES EN LA TEORÍA DEL RIESGO COLECTIVO

V.J. García, E. Gómez Déniz y F.J. Vázquez Polo

### RESUMEN

En los últimos años hemos asistido a una gran proliferación de trabajos relativos a diversos procedimientos de generalización de la distribución normal (Azzalini, 1985; Azzalini y Chiogna, 2004; entre otros). Destaca la distribución normal sesgada (*skew-normal distribution*), en un intento de obtener una familia de distribuciones no necesariamente simétricas, como es el caso de la normal, pero construyendo una familia que contenga a ésta como caso particular.

En este trabajo proponemos una nueva generalización de la distribución normal utilizando un método alternativo propuesto por Marshall y Olkin (1997). Este mecanismo permite añadir un parámetro a la distribución normal y obtener una familia de distribuciones no necesariamente simétricas que contiene a la distribución normal como caso particular. Estudiaremos por un lado, el comportamiento de esta distribución respecto de la simetría de la distribución normal al aplicarle esta transformación, mientras que por otro obtendremos algunas medidas de interés de la distribución, entre los que incluimos de manera destacada la expresión de la mediana. Finalmente presentaremos algunas aplicaciones de estos modelos, con especial énfasis al campo actuarial en un escenario donde la asimetría aparece de manera natural. En particular se aproximará la cantidad total reclamada comparándola con el valor exacto de la misma en el modelo Poisson compuesto de la teoría del riesgo colectivo.

Estas situaciones son especialmente útiles para datos de pérdidas en compañías de seguro donde la asimetría aparece de manera natural.

**Palabras Clave:** Cantidad Total Reclamada; Distribución Normal; Modelo Compuesto; Simetría

## 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo proponemos una nueva generalización de la distribución normal utilizando un método alternativo propuesto por Marshall y Olkin (1997). Este mecanismo permite añadir un parámetro a la distribución normal clásica (distribución gaussiana) y obtener una familia de distribuciones no necesariamente simétricas que contiene a la distribución normal como caso particular. La nueva distribución obtenida es diferente de la propuesta en Azzalini (1985) en Gupta y Gupta (2004) y en Nadarajah (2005) y presenta una expresión cerrada para la función de densidad de probabilidad, expresada en términos de la función confluyente hipergeométrica (función de Kummer). Este hecho es resaltante pues permitirá estimar los parámetros del modelo mediante el método de máxima verosimilitud de forma relativamente sencilla, utilizando para ello cualquier software informático que incluya a dicha función expresamente en sus aplicaciones, como Mathematica y Matlab. Estudiaremos por un lado, el comportamiento de esta distribución respecto de la simetría de la distribución normal al aplicarle esta transformación, mientras que por otro lado obtendremos algunas medidas de interés de la distribución, entre los que incluimos de manera destacada la expresión de la mediana.

La nueva distribución puede considerarse a su vez como alternativa a la distribución normal para aproximar la cantidad total reclamada en el modelo de riesgo colectivo (Gerber, 1979; Rolski et al., 1997; Sarabia et al., 2006; entre otros). En estos modelos la asimetría aparece de manera natural. En particular, en estadística actuarial resulta interesante calcular las probabilidades de cola a la derecha de la distribución correspondiente a la cantidad total reclamada en un modelo de riesgo colectivo. Estas probabilidades darán alguna información sobre

la posibilidad de ocurrencia de valores extremos correspondientes al suceso que se estudia. La distribución de la cantidad total reclamada, que se obtiene conjugando los modelos del número de reclamaciones y la cantidad correspondiente a cada una de las reclamaciones, resulta difícil, y a veces imposible de calcular. De ahí que en la literatura se hayan propuestos algunos procedimientos de aproximación, entre los que figura el que está basado en el uso de la distribución normal.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. La sección 2 incluye la nueva distribución de densidad de probabilidad propuesta así como algunas propiedades de la misma. La sección 3 presenta algunos métodos de estimación de los parámetros del nuevo modelo. Se hará especial hincapié en el método de máxima verosimilitud. La sección 4 incluye dos aplicaciones de carácter numérico. En primer lugar, aproximaremos la cantidad total reclamada bajo el modelo Poisson compuesto en el escenario del riesgo colectivo. Esta aproximación puede compararse con el verdadero valor que se conoce cuando se asume que la cantidad del  $i$ -ésimo siniestro sigue una distribución exponencial y el número de siniestros sigue una distribución de Poisson. En segundo lugar se estimará el número de reclamaciones en una cartera de seguros cuando es conocida la cantidad reclamada individualmente. El trabajo finaliza exponiendo las conclusiones en la última sección.

## 2. EL NUEVO MODELO

Nuestro propósito es generalizar la distribución gaussiana mediante el esquema de Marshall y Olkin (1997).

Sea

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

para  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma > 0$ . Es decir, la función de densidad (fdd) de una distribución gaussiana. Sea

$$F(x; \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^x f(t; \mu, \sigma) dt,$$

la correspondiente función de distribución (FdD). La generalización de esta distribución según el esquema de Marshall y Olkin queda como sigue: siendo  $\bar{F}$  la función de supervivencia de la distribución  $F$ , y siendo  $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ , la función de supervivencia de la distribución generalizada,  $G_1(x; \mu, \sigma, \alpha)$ , que depende de un nuevo parámetro  $\alpha > 0$ , se obtiene como

$$\bar{G}(x; \mu, \sigma, \alpha) = \frac{\alpha \bar{F}(x; \mu, \sigma)}{1 - \alpha \bar{F}(x; \mu, \sigma)},$$

donde  $\alpha > 0$ . Como consecuencia, resultan la FdD  $G$  y la fdd  $g$ , dependientes de los mismos parámetros.

$$G(x; \mu, \sigma, \alpha) = \frac{F(x; \mu, \sigma)}{1 - \alpha \bar{F}(x; \mu, \sigma)}$$

$$g(x) = \frac{d}{dx} G(x) = \frac{\alpha f(x; \mu, \sigma)}{[1 - \alpha \bar{F}(x; \mu, \sigma)]^2}$$

De esta forma, hemos obtenido una FdD  $G$ , dependiente de tres parámetros.

Simple cálculos proporcionan una expresión cerrada para la función de densidad de probabilidad, que resulta:

$$g(x; \alpha, \mu, \sigma) = \frac{4\alpha\sigma e^{\psi(x)} \sqrt{2\pi}}{\left[ (1 + \alpha)\sigma\sqrt{2\pi} - 2\bar{\alpha}(x - \mu) {}_1F_1(1/2, 3/2, \psi(x)) \right]^2},$$

siendo

$$\psi(x) = -(x - \mu)^2 / (2\sigma^2), \quad -\infty < x < \infty, \quad \alpha > 0, \quad \bar{\alpha} = 1 - \alpha, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0,$$

y en la que donde  ${}_1F_1(a; c; x)$  representa la función confluyente hipergeométrica (también conocida como función de Kummer) definida como

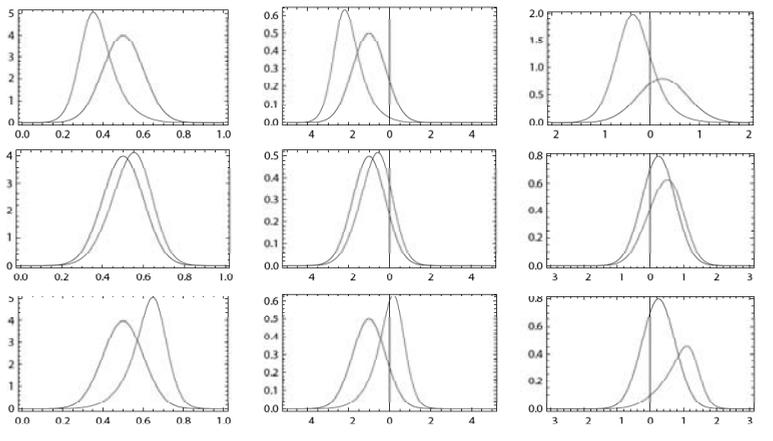
$${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j x^j}{(c)_j j!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 z^{a-1} (1-z)^{c-a-1} e^{xz} dz, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots$$

donde  $c > a > 0$  y  $(a)_j = a(a+1)\dots(a-j+1)$  representa el símbolo de Pochhammer. Véase Johnson et al. (2005), por ejemplo.

Para el caso  $\alpha = 1$ , se obtiene, obviamente la distribución gaussiana. Esto es,

$$G(x; \mu, \sigma, \alpha) = 1 - [\bar{F}(x; \mu, \sigma)] = F(x; \mu, \sigma).$$

La Figura 1 muestra algunos ejemplos de la función de densidad de probabilidad de la distribución normal generalizada propuesta, así como de la distribución normal clásica.



**Figura 1**

Ejemplos de fdd en el esquema de Marshall y Olkin para  $\alpha = 0$  (arriba),  
 $\alpha = 2$  (centro) y  $\alpha = 10$  (abajo).

De izquierda a derecha,  $\mu = 0.5, \sigma = 0.1, \mu = -1, \sigma = 0.8$  y  $\sigma = 0.5$ .

En azul,  $f(x; \mu, \sigma)$  y en rojo,  $g(x; \mu, \sigma, \alpha)$ .

A continuación estudiaremos el comportamiento de ciertas medidas de interés a variaciones en estos parámetros.

### 3. PROPIEDADES

Estudiaremos en esta sección algunas propiedades más interesantes de la nueva distribución de densidad de probabilidad. En particular nos centraremos en el estudio de la mediana, simetría y los momentos alrededor del origen.

#### 3.1 Mediana y simetría

Sea  $F$  un valor de  $F(x)$  tal que  $\bar{G}[F^{-1}(F); \alpha] = \frac{1}{2}$ .

Entonces, 
$$\frac{\alpha - \alpha F}{\alpha - \alpha F + F} = \frac{1}{2}.$$

Tras algunos cálculos, obtenemos 
$$F = \frac{\alpha}{1 + \alpha},$$

siendo  $\alpha \geq 0$ .

En conclusión, 
$$Me = F^{-1}\left[\frac{\alpha}{1 + \alpha}\right]. \quad (1)$$

Para  $\alpha = 1$ ,  $Me = 0$ , como corresponde a la normal. Por otro lado, se observa que  $Me$  crece con  $\alpha$ : Cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $Me \rightarrow \infty$ . ( $= F^{-1}(1)$ ). Cuando  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $Me \rightarrow -\infty$  ( $= F^{-1}(0)$ ).

#### 3.2. Momentos

Denotemos por  $\mu_k = EX^k$  los momentos centrales de la distribución. Por comodidad, omitimos los parámetros  $\mu, \sigma$ , abreviando  $F(x)$  como  $F(x; \mu, \sigma)$  y  $f(x) = f(x; \mu, \sigma)$ .

Entonces, por definición, 
$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{\alpha f(x)}{[1 - \alpha \bar{F}(x)]^2} dx.$$

En esta expresión, sustituycamos  $F(x)=t$  y obtenemos

$$\begin{aligned}\mu_k &= \int_0^1 [F^{-1}(t)]^k \frac{\alpha dt}{[1-\bar{\alpha}(1-t)]^2} \\ &= \int_0^1 [F^{-1}(t)]^k \frac{\alpha dt}{(\alpha+t-\alpha t)^2};\end{aligned}$$

De nuevo, sustituyendo

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-\alpha t}{\alpha+t-\alpha t} &= u, \\ -\frac{\alpha dt}{(\alpha+t-\alpha t)^2} &= du, \\ \frac{\alpha-\alpha u}{\alpha+u-\alpha u} &= t,\end{aligned}$$

e intercambiando los límites de integración, queda

$$\mu_k = \int_0^1 \left\{ F^{-1} \left[ \frac{\alpha(1-u)}{u+\alpha(1-u)} \right] \right\}^k du. \quad (2)$$

Aquí hacemos uso de la función error  $\mathbf{erf}(z)$ , que permite escribir la FdD normal como

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \mathbf{erf} \left( \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right],$$

de modo que la función cuantil se puede entonces escribir como

$$F^{-1} \left[ \frac{\alpha(1-u)}{u+\alpha(1-u)} \right] = \mu + \sigma\sqrt{2}\mathbf{erf}^{-1} \left[ 2 \frac{\alpha(1-u)}{u+\alpha(1-u)} - 1 \right],$$

con lo que la expresión de  $\mu_k$  queda como sigue:

$$\begin{aligned}
\mu_k &= \int_0^1 \left\{ \mu + \sigma \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} \left[ 2 \frac{\alpha(1-u)}{u + \alpha(1-u)} - 1 \right] \right\}^k du \\
&= \int_0^1 \left\{ \mu + \sigma \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} \left[ \frac{-u + \alpha(1-u)}{u + \alpha(1-u)} \right] \right\}^k du \\
&= \int_0^1 \left\{ \mu + \sigma \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} \left[ 1 - \frac{2u}{u + \alpha(1-u)} \right] \right\}^k du.
\end{aligned}$$

▪ Caso  $k = 1$  (valor esperado)

Observemos que la función  $\operatorname{erf}()$  puede ser aproximada por la expresión

$$\operatorname{erf}^{-1}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} z + O(z^3) \quad (3)$$

en tal caso, podemos obtener la siguiente aproximación:

$$\mu_k \approx \int_0^1 \left\{ \mu + \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - \frac{2u}{P_i} \right] \right\}^k du,$$

$$\text{donde } P_i = [\alpha + (1-\alpha)u]^i, \quad (4)$$

expresión que será usada más adelante. En el caso  $\alpha = 1$  queda

$$\mu_1 \approx \mu,$$

de manera que el error acumulado se anula en este caso. Idéntico resultado se obtiene para una aproximación con un término cuadrático adicional.

Para el caso  $k = 1$ , la integral anterior puede ser aproximada de la siguiente forma.

$$\mu_1 \approx \frac{\alpha}{\alpha} \int_{\alpha}^1 \left\{ \frac{\mu}{u^2} + \frac{\sigma}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{-2}{u} + \frac{\alpha+1}{u^2} \right] \right\} du = \mu - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma}{\alpha^2} (1 - \alpha^2 + 2\alpha \log \alpha)$$

■ **Caso  $k = 2$**

En tal situación, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\mu_2 &\approx \int_0^1 \left\{ \mu + \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - \frac{2u}{P_1} \right] \right\}^2 du = \\ &= \int_0^1 \left\{ \mu^2 + \frac{\pi\sigma^2}{2} \left[ 1 - \frac{2u}{P_1} \right]^2 + \mu\sigma\sqrt{2\pi} \left[ 1 - \frac{2u}{P_1} \right] \right\} du.\end{aligned}$$

Para el cálculo de esta integral procedemos a aproximar la función  $\text{erf}^{-1}(z)$  de la siguiente forma:

$$\text{erf}^{-1}(z) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( z + \frac{\pi z^3}{12} + \frac{7\pi^2 z^5}{480} \right).$$

De esta forma, para el caso  $\alpha = 1$ , queda

$$\mu_2 \approx \mu^2 + \sigma^2 \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{229}{630} \pi - \frac{13}{40} \pi^2 + \frac{7}{25920} \pi^3 + \frac{49}{2534400} \pi^4 + \frac{1}{3} \right\} \approx \mu^2 - 2.705\sigma^2.$$

La Tabla 1 muestra el valor exacto (calculado numéricamente con Mathematica) y el valor aproximado para distintos valores del parámetro  $\alpha$ . Se aprecia que la aproximación se mejora conforme aumenta el valor de  $\alpha$ .

**Tabla 1**

Valores exactos y aproximados de la media obtenida con diferentes  $\alpha$ ,  $\mu$  y  $\sigma$ .

$\alpha$	Exacto	Aprox. $\mu = 0.5$ $\sigma = 0.1$	Exacto	Aprox. $\mu = -1$ $\sigma = 0.8$	Exacto	Aprox. $\mu = 0.25$ $\sigma = 0.5$
0.1	0.37555	0.41807	-1.99556	-1.65542	-0.54772	-0.15963
0.2	0.41116	0.43807	-1.71070	-1.49541	-0.22860	-0.05963
0.3	0.43291	0.45201	-1.53668	-1.38391	-0.07498	0.01000
0.4	0.44868	0.46276	-1.41056	-1.29792	0.01988	0.06380
0.5	0.46105	0.47149	-1.31154	-1.22801	0.08571	0.10749
0.6	0.47124	0.47884	-1.23003	-1.16926	0.13466	0.14421
0.7	0.47989	0.48516	-1.16081	-1.11870	0.17277	0.17581
0.8	0.48741	0.49069	-1.10067	-1.07445	0.20343	0.20346
0.9	0.49405	0.49560	-1.04755	-1.03520	0.22873	0.22800
1.0	0.50000	0.50000	-1.00000	-1.00000	0.25000	0.25000
2.0	0.53894	0.52850	-0.68845	-0.77198	0.36063	0.39250
3.0	0.56134	0.54412	-0.50928	-0.64698	0.40465	0.47063
4.0	0.57694	0.55444	-0.38447	-0.56444	0.42812	0.52222
5.0	0.58883	0.56192	-0.28930	-0.50458	0.44245	0.55963
6.0	0.59841	0.56767	-0.21272	-0.45861	0.45192	0.58836
7.0	0.60639	0.57226	-0.14886	-0.42188	0.45848	0.61132
8.0	0.61322	0.57604	-0.09423	-0.39167	0.46320	0.63020
9.0	0.61917	0.57921	-0.04659	-0.36629	0.46666	0.64606
10	0.62444	0.58192	-0.00443	-0.34458	0.469247	0.65963

### 3. ESTIMACIÓN

En esta sección desarrollamos algunos métodos de estimación. En particular, el método de los momentos y el de máxima verosimilitud.

#### 3.1. Método de los momentos

Es sencillo obtener de manera numérica (utilizando el software Mathematica) el valor exacto de la media de la distribución para distintos valores de los tres parámetros como aparece por ejemplo en la Tabla 1. De este modo podemos construirnos una tabla de doble entrada con  $\alpha$  y  $\mu$  por un lado y  $\sigma$  por otro. Ahora, si suponemos que  $\alpha$  y  $\mu$  son conocidos, el valor del parámetro  $\sigma$  puede estimarse a la luz de la tabla construida y conocida la media muestral, mediante interpolación numérica.

En cualquier otro caso, es posible obtener aproximaciones de los tres primeros momentos alrededor del origen con un procedimiento similar al elaborado en la sección anterior y resolver el sistema que resulta de igualar los momentos poblacionales a los momentos muestrales.

### 3.2. Método de máxima verosimilitud

Centrémonos ahora en el método más eficiente de estimación por máxima verosimilitud. Observemos que los parámetros  $(\mu, \sigma, \alpha)$  no tienen una interpretación, así por ejemplo,  $\mu$  no es la media poblacional, ni  $\sigma^2$  la varianza. La estimación máximo verosímil parece por tanto como un método más directo de estimación de estos parámetros. Para ello calculamos las ecuaciones normales del modelo de muestreo.

Dada una muestra aleatoria simple de la variable  $X$ ,  $x_1, \dots, x_n$ . La función de logaritmo-verosimilitud viene dada por

$$\begin{aligned}\psi(\mu, \sigma, \alpha) &= \ln \prod_{i=1}^n \frac{\alpha f(x_i; \mu, \sigma)}{[1 - \alpha \bar{F}(x_i; \mu, \sigma)]^2} \\ &= n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln f_i - 2 \sum_{i=1}^n \ln [1 - \alpha \bar{F}_i],\end{aligned}$$

siendo  $f_i = f(x_i; \mu, \sigma)$ ,  $\bar{F}_i = \bar{F}(x_i; \mu, \sigma)$  y, en adelante,  $F_i = F(x_i; \mu, \sigma)$ .

Las ecuaciones normales son:

$$\frac{\delta \psi}{\delta \mu} = \frac{\delta}{\delta \mu} \left\{ n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln f_i - 2 \sum_{i=1}^n \ln [1 - \alpha \bar{F}_i] \right\} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta f_i}{\delta \mu f_i} + 2 \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\delta \bar{F}_i}{\delta \mu [1 - \alpha \bar{F}_i]} = 0.$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta \sigma} = \frac{\delta}{\delta \sigma} \left\{ \sum_{i=1}^n \ln f_i - 2 \sum_{i=1}^n \ln [1 - \alpha \bar{F}_i] \right\} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta f_i}{\delta \sigma f_i} + 2 \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\delta \bar{F}_i}{\delta \sigma [1 - \alpha \bar{F}_i]} = 0.$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta \alpha} = \frac{\delta}{\delta \alpha} \left\{ n \ln \alpha - 2 \sum_{i=1}^n \ln [1 - \alpha \bar{F}_i] \right\} = \frac{n}{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\bar{F}_i}{1 - \alpha \bar{F}_i} = 0.$$

Hoy en día resulta relativamente sencillo obtener los estimadores de máxima verosimilitud utilizando algún software informático como Mathematica. De hecho, puesto que el sistema que resulta incluye tres parámetros a estimar, el paquete anterior puede alcanzar con cierta facilidad el valor máximo de la función de verosimilitud maximizando esta función. Para facilitar el cálculo podemos tomar como punto de partida el estimador obtenido mediante el método de los momentos, o bien incorporar estos como punto de partida para utilizar el método *scoring* (ver Klugman et al., 2008) que elude utilizar las derivadas de segundo orden al aplicar el Método de Newton-Raphson.

#### 4. APLICACIONES

En esta sección se presentan dos aplicaciones numéricas en el escenario del modelo de riesgo colectivo compuesto, en el que la variable aleatoria relevante es la cantidad total reclamada.

La distribución de la cantidad total reclamada en un período dado (digamos un año) juega un papel destacado en Estadística Actuarial. Esta cantidad resulta fundamental en el cálculo de primas de seguros o en la modelización de problemas de teoría de la ruina. Resulta bien conocido (ver Klugman et al., 2008 y Sarabia et al., 2006; entre otros) que un modelo de riesgo colectivo representa la cantidad total reclamada como la suma  $S$  de un número aleatorio  $N$  de cantidades  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , luego

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N = \sum_{n=0}^{\infty} X_i,$$

donde se supone que las  $X_i$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas e independientes de  $N$ . Es usual denominar distribuciones primaria y secundaria a las distribuciones de  $N$  y  $X_i$ , respectivamente. En este modelo la distribución base sobre la que se requerirán efectuar estimaciones es la distribución de la cantidad total reclamada, esto es la distribución de  $S$ . La función de densidad de probabilidad de la misma viene dada por

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^{*n}(x),$$

en la que  $p_n$  es la distribución primaria,  $f(x)$  la distribución secundaria y  $f^{*n}(x)$  representa la convolución  $n$ -ésima de la densidad  $f(x)$ . Son pocos los casos en que se obtiene una expresión cerrada para la densidad de la cantidad total reclamada. De ahí que en la mayoría de las ocasiones haya que acudir a calcularla de manera aproximada utilizando los distintos métodos que se han propuesto en la literatura. Destacamos el método de la gamma trasladada, la aproximación de Edgeworth, la aproximación de Esscher y la aproximación normal. El lector interesado en estos métodos de aproximación puede consultar a Gerber (1979), Rolski et al., (1997) y Sarabia et al., (2006); entre muchos otros.

Un caso particular para el que se obtiene una expresión cerrada para la distribución de la cantidad total reclamada es aquél en el que se asume que la distribución primaria es Poisson y la distribución secundaria es exponencial, que se utilizará en este trabajo. Por tanto, asumiremos el siguiente modelo:

$$\text{Distribución Primaria: } \Pr(N = n) = e^{-\theta_1} \frac{\theta_1^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \theta_1 > 0,$$

$$\text{Distribución Secundaria: } f(x) = \theta_2 e^{-\theta_2 x}, \quad x > 0$$

La función de densidad de la cantidad total reclamada resulta en este caso (ver Rolski et al., 1997; Sarabia et al., 2006 y Gómez-Déniz et al., 2002, 2009)

$$f_S(x | \theta_1, \theta_2) = \sqrt{\frac{\theta_1 \theta_2}{x}} e^{-(\theta_1 + \theta_2 x)} I_1 \left( 2\sqrt{\theta_1 \theta_2 x} \right), \quad x > 0, \quad (5)$$

$$\text{con } f_S(0) = e^{-\theta_1}.$$

Aquí,  $I_\nu(z)$  representa la función modificada de Bessel de primera especie, definida como

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}, \quad z \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R},$$

La representación de la función de verosimilitud mediante la función de Bessel garantiza que las series que aparecen en los cálculos subsiguientes serán convergentes, además de facilitar las tareas computacionales, mediante el empleo de software como Matlab o Mathematica, que las incluye expresamente en sus aplicaciones.

Es sencillo comprobar que el valor esperado de la cantidad total reclamada  $S$  es el producto de las esperanzas de las distribuciones primarias y secundarias, esto es  $E(S) = \theta_1 / \theta_2$ . Por otro lado, la varianza puede calcularse utilizando la expresión

$$Var(S) = E(N)Var(X) + E^2(X)Var(X).$$

Estos dos resultados podrán emplearse para obtener estimadores de los parámetros por el método de los momentos asumiendo, sin pérdida de generalidad, por ejemplo que  $\theta_1 = \theta_2 = 1$ .

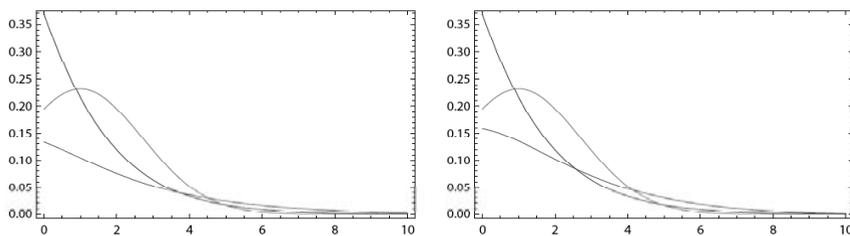
Luego bajo este supuesto, hemos utilizado (5) para calcular en primer lugar, y de manera exacta, las probabilidades de la cola a la derecha de la cantidad total reclamada para distintos valores de  $x$ . Los resultados obtenidos se muestran en la primera columna de la Tabla 2. A continuación hemos aproximado mediante la distribución normal clásica dichas probabilidades, que aparecen ahora en la segunda columna de la misma Tabla. Finalmente se ha efectuado la misma operación pero ahora utilizando la distribución normal generalizada que se propone en este trabajo. Comentar que los valores del parámetro  $\alpha$  se han fijado con antelación, asignándole los valores de 0.1 y 0.2. Posteriormente se estimaron los restantes parámetros mediante el método de los momentos, utilizando para ello la media y la varianza. Los resultados aparecen en las columnas 3 y 4 de la Tabla 2. Como se aprecia se consigue una mejor aproximación a las probabilidades de cola a la derecha con la distribución normal generalizada que con la distribución normal clásica.

**Tabla 2**

Valores exactos y aproximados de probabilidades de cola a la derecha en el modelo de riesgo compuesto.

$x$	Exacto	Aprox.	Aprox.	Aprox.
	$\theta_1 = 1$ $\theta_2 = 1$	$\hat{\mu} = 1$ $\hat{\sigma} = \sqrt{3}$	$\hat{\mu} = 3.74126$ $\hat{\sigma} = 3.34598$ $\alpha = 0.1$	$\hat{\mu} = 2.7536$ $\hat{\sigma} = 2.8317$ $\alpha = 0.2$
0.2	0.56214	0.67791	0.37103	0.47072
0.4	0.49901	0.63548	0.34595	0.43992
0.6	0.44224	0.59131	0.32203	0.41001
0.8	0.39131	0.54596	0.29931	0.38114
1.0	0.34574	0.5000	0.27781	0.35343
2.0	0.18258	0.28185	0.18817	0.23444
4.0	0.04722	0.04163	0.08121	0.08964
6.0	0.01137	0.00194	0.03222	0.02797
8.0	0.00260	0.00002	0.01117	0.00656
10	0.00057	1.01E-7	0.00315	0.00105

Finalmente, en la Figura 2 aparecen representadas la función de densidad de la cantidad total reclamada (5) y las aproximaciones a la misma mediante la función de densidad normal clásica y la distribución normal generalizada propuesta en este trabajo. Se aprecia que en términos generales esta última aproxima la densidad exacta mejor que la distribución normal clásica.



**Figura 2**

Función de densidad de probabilidad (en azul) de la cantidad total reclamada (exacta) y aproximación:  $f(x; \mu, \sigma)$  en verde y  $g(x; \mu, \sigma, \alpha)$  en rojo.

El segundo ejemplo se sitúa también en el escenario del modelo de riesgo colectivo compuesto, aunque tratando de forma separada la

cantidad reclamada y el número de reclamaciones. Los datos, que aparecen en Hossack et al. (1983), se muestran en la primera y segunda columnas de la Tabla 3.

El objetivo ahora consiste en estimar el número medio de reclamaciones atendiendo a que la cantidad reclamada sigue determinada distribución de probabilidad. El lector podría pensar que no resulta plausible trabajar con la distribución normal toda vez que los datos son positivos. Parecería más lógico utilizar la distribución log-normal, la exponencial o la Weibull.

Sin embargo esto es viable siempre que la distribución normal que se considere tenga la varianza muchísimo mayor que la media. Con ello se logra que casi toda su masa de probabilidad esté concentrada  $(0, \infty)$ .

Hemos utilizado el método de máxima verosimilitud, utilizando el software Mathematica, para obtener los estimadores de los parámetros para la distribución normal clásica y la distribución normal generalizada propuesta aquí. Los estimadores obtenidos se muestran en las columnas 3 y 4 de la Tabla 3.

Resumiendo, en la Tabla 3 se muestra el estimador de máxima verosimilitud de los parámetros, el valor del test  $\chi^2$  y el logaritmo de la función de verosimilitud, así como el p-valor y los grados de libertad. Como se aprecia, el modelo generalizado ajusta bastante bien los datos, superando a la distribución normal clásica, tanto si utilizamos el criterio de la  $\chi^2$  como el logaritmo de la función de verosimilitud.

**Tabla 3**

Número de reclamaciones que producen pérdidas. Valor exacto y esperado (Hossack et al., 1983, p. 82). Distribución normal y normal generalizada.

Cantidad reclamada	Número de reclamaciones	Estimadas $\hat{\mu} = 1216$ $\hat{\sigma} = 602.448$	Estimadas $\hat{\mu} = 2238.7$ $\hat{\sigma} = 670.18$ $\hat{\alpha} = 19.958$
200	2	6.60	4.92
600	24	15.71	18.69
1000	32	24.44	31.87
1400	21	24.86	24.06
1800	10	16.53	11.46
2200	6	7.18	4.85
2600	3	2.04	2.05
3000	1	0.38	0.83
3400	1	0.04	0.30
Total	100	100	100
$\chi^2$		13.97	5.13
$L_{\max}$		-781.994	-773.724
g.l.		4	3
$p$ -valor		0.0074	0.1625

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto una distribución alternativa a la distribución normal (gaussiana) clásica que es diferente de la distribución normal sesgada (*skew-normal distribution*) en Azzalini (1985), así como a otras propuestas en la literatura estadística. La nueva distribución tiene la ventaja de poseer una expresión cerrada para la función de densidad de probabilidad, lo que facilita el procedimiento de estimación de parámetros mediante el método de máxima verosimilitud. Se han presentado dos ejemplos prácticos en el escenario del modelo de riesgo colectivo, concluyendo que la nueva distribución proporciona mejores ajustes que los obtenidos, al menos, con la distribución normal clásica.

## AGRADECIMIENTOS

Investigación parcialmente financiada por el proyecto SEJ2006-12685 (MEC, España).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scandinavian Journal Statistics*, 12, 171-178

Azzalini, A. y Chiogna, M. (2004). Some results on the stress-strength model for skew-normal variates. *Metron*, LXII, 315-326.

Gerber, H.U. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Huebner Foundation.

Gómez-Déniz, E.; Hernández, A. y Vázquez, F. (2002). Bounds for ratio of posterior expectations. An application in the collective risk model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 37-44.

Gómez-Déniz, E.; Hernández, A. y Pérez, J.M. (2009). Bayesian robustness of the compound Poisson distribution under bidimensional prior: an application to the collective risk model. *Journal of Applied Statistics* (en prensa)

Gupta, R.C. y Gupta, R.D. (2004). Generalized skew normal model. *Test*, 13, 2, 501-524.

Hossack, I; Pollard, J. y Zehnwirth, B. (1983). *Introductory Statistics with Applications in General Insurance*. Cambridge University Press, USA.

Johnson, N.L., Kemp, A.W., Kotz, S. (2005). *Univariate Discrete Distributions*. Third Edition. John Wiley, New York.

Klugman, S.A., Panjer, H.H. y Willmot, G.E. (2008). *Loss Models: From Data to Decisions*. Wiley. Third Edition.

Marshall, A. y Olkin, I. (1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with applications to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 84, 3, 641-652.

Nadarajah, S. (2005). A Generalized Normal Distribution. *Journal of Applied Statistics*, 32, 7, 685-694.

Rolski, T., Schmidli, H. Schmidt, V. y Teugel, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons.

Sarabia, J.M.; Gómez-Déniz, E. y Vázquez, F.J. (2006). *Estadística Actuarial. Teoría y Aplicaciones*. Pearson. Prentice-Hall.



## Ponencia 6

# LA CLASE DE DISTRIBUCIONES CONTINUAS GAMMA-GENERALIZADA INVERSA GAUSSIANA Y SU APLICACIÓN EN PROBLEMAS DE TARIFICACIÓN

Emilio Gómez-Déniz, Enrique Calderín-Ojeda y José María Sarabia

## RESUMEN

En este trabajo presentamos una clase amplia de distribuciones de probabilidad con soporte en  $(0, \infty)$ . La nueva clase se construye mezclando la distribución gamma con la distribución generalizada inversa Gaussiana. Para la misma, damos las expresiones de la función de densidad de probabilidad, su función de distribución, momentos, etc. Esta familia se aplica en seguro de responsabilidad. A partir la misma se obtienen además como caso particular dos distribuciones de probabilidad que pueden emplearse para realizar ajustes de credibilidad así como para obtener determinadas medidas de riesgo.

**Palabras Clave:** Credibilidad, Distribución Gamma, Distribución Generalizada Inversa Gaussiana, Distribución a posteriori, Medidas de Riesgo

## 1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo obtenemos una clase amplia de distribuciones continuas de probabilidad con soporte en  $(0, \infty)$  que puede considerarse como alternativa a las distribuciones log-normal, gamma, inversa Gaussiana y Weibull, entre otras. La nueva clase se obtiene mezclando la distribución gamma clásica con la distribución inversa Gaussiana,

y puede considerarse una generalización de la distribución exponencial-inversa Gaussiana en Bhattacharya y Kumar (1986) y en Frangos y Karlis (2004). Se obtiene la función de densidad de probabilidad, la función de distribución, momentos, función de azar, etc.

Para algunos casos particulares se realizan ajustes de datos empíricos de seguro de responsabilidad. Con el único objetivo de hacer este trabajo autosuficiente, mostramos a continuación la función de densidad de probabilidad de la distribución gamma y de la distribución inversa Gaussiana.

Una variable aleatoria  $X$  se dice que sigue una distribución gamma clásica si su función de densidad de probabilidad es

$$f_G(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}, \quad x > 0, a > 0, \theta > 0. \quad (1)$$

Representaremos a esta distribución mediante  $X \sim G(a, \theta)$ .

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria  $X$  que sigue la distribución generalizada inversa Gaussiana es

$$f_{GIG}(x) = \frac{\mu^{-\lambda}}{2K_\lambda\left(\frac{\psi}{\mu}\right)} x^{\lambda-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{\mu^2}x + \frac{\psi}{x}\right)}, \quad x > 0, \mu > 0, \psi > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

en la que  $K(\cdot)$  representa la función modificada de Bessel de tercera clase (Jorgensen, 1982). Se representará en este caso,  $X \sim GIG(\lambda, \mu, \psi)$ . La distribución inversa Gaussiana es un caso particular de (2) que se obtiene al hacer  $\lambda = -1/2$ . Representaremos en este último caso  $X \sim IG(\mu, \psi)$ .

El resto del trabajo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 se mostrarán los principales resultados, mostrando la nueva familia de distribuciones continuas, con algunas propiedades de la misma. Para algunos casos particulares se obtendrán expresiones de credibilidad y ciertas medidas de riesgo, como el VaR y el TVaR, que

se presentan en la sección 3. La sección 4 incluye una aplicación en el escenario de seguro de responsabilidad civil. El trabajo finalizará con una sección en la que se comentarán las conclusiones más relevantes del mismo.

## 2 PRINCIPALES RESULTADOS

En esta sección se presenta la función de densidad de probabilidad de la distribución que resulta de mezclar la distribución gamma (1) con la distribución inversa Gaussiana. Se obtienen también expresiones cerradas para la función de distribución y la función de azar.

**Definición 1** *Se dice que la variable aleatoria  $X$  sigue una distribución gamma-inversa Gaussiana si admite la siguiente representación estocástica:*

$$\begin{aligned} X | \theta, a &\sim G(a, \theta) \\ \theta &\sim IG(\mu, \psi), \quad \theta \in \Theta = (0, \infty), \end{aligned}$$

siendo  $\mu, \psi > 0$ . De aquí en adelante denotaremos a esta distribución mediante  $X \sim GAIG(\mu, \psi)$ .

El siguiente resultado proporciona una expresión cerrada para la función de densidad de probabilidad de esta nueva distribución, así como de su función de distribución, para el caso en que se asuma que el parámetro  $a$  es un número entero.

**Teorema 1** *Suponiendo que  $a$  es entero, si  $X \sim GAIG(\mu, \psi)$ , entonces su función de densidad, así como su función de distribución vienen dadas por*

$$f_{GAIG}(x) = \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{\psi \left[ 1/\mu - 1/\mu_1(x) \right]} E_{IG(\mu_1(x), \psi)}(\Theta^a), \quad (3)$$

$$F_{GAIG}(x) = 1 - e^{\psi \left[ 1/\mu - 1/\mu_1(x) \right]} \sum_{i=0}^{a-1} \frac{x^i}{i!} E_{IG(\mu_1(x), \psi)}(\Theta^i),$$

respectivamente, donde  $\mu_1(x) = \frac{\mu\sqrt{\psi}}{\sqrt{\psi + 2\mu^2x}}$ .

*Demostración:* La función de densidad de probabilidad se obtiene directamente mediante

$$f_{GAIG}(x) = \int_{\Theta} f_G(x|\theta) f_{IG}(\theta) d\theta.$$

La función de distribución se obtiene de una forma similar a partir de

$$F_{GAIG}(x) = \int_0^x \int_0^\infty f_G(x|\theta) f_{IG}(\theta) dt d\theta,$$

aplicando el Teorema de Fubini y teniendo en cuenta que para valores enteros de  $a$  se tiene que

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x \theta^a t^{a-1} e^{-\theta t} dt = 1 - \sum_{j=0}^{a-1} \frac{(\theta x)^j e^{-\theta x}}{j!}.$$

Pueden obtenerse algunos casos particulares de (3) para valores específicos de  $a$ . En este sentido, y para la distribución inversa Gaussiana, usando el resultado (ver Chhikara y Folks, 1988)

$$E(Z^r) = \mu^r \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(r-1+i)!}{i!(r-1-i)!} \left( \frac{\mu}{2\psi} \right)^i, \quad r \geq 2,$$

se tiene que la distribución (3) puede escribirse como

$$f_{GAIG}(x) = \frac{\mu_1(x)^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{\psi \left[ \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_1(x)} \right]} \sum_{i=0}^{a-1} \frac{\Gamma(a+i)}{\Gamma(i+1)\Gamma(a-i)} \left[ \frac{\mu_1(x)}{2\psi} \right]^i, \quad a \geq 2. \quad (4)$$

En particular, para  $a=1$  se tiene que la función de densidad de probabilidad (4) resulta

$$f_{GAIG}(x) = \frac{\mu\sqrt{\psi}}{\sqrt{\psi + 2\mu^2x}} e^{\frac{\psi}{\mu} - \sqrt{\left(\frac{\psi}{\mu}\right)^2 + 2\psi x}}, \quad (5)$$

que se corresponde con la distribución exponencial-inversa Gaussiana en Bhattacharya y Kumar (1986) y en Frangos y Karlis (2004).

Por otro lado, para  $a = 2$  se obtiene

$$f_{GAIG}(x) = \frac{\mu^2 \psi x}{\psi + 2\mu^2 x} \left( 1 + \frac{\mu}{\sqrt{\psi^2 + 2\psi\mu^2 x}} \right) e^{\frac{\psi}{\mu} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2\mu^2 x}{\psi}} \right)}. \quad (6)$$

**Proposición 1** *El momento de orden  $r$  alrededor del origen de la variable aleatoria  $X$  con función de densidad de probabilidad (3) viene dado por*

$$E(X^r) = \frac{\Gamma(a+r)}{\mu^r \Gamma(a)} \sum_{i=0}^r \frac{\Gamma(r+i+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(r-i+1)} \left( \frac{\mu}{2\psi} \right)^i, \quad r \geq 1. \quad (7)$$

*Demostración:* La demostración se obtiene utilizando esperanza condicionada y (ver Chhikara y Folks, 1988) el hecho de que

$$E_{IG(\psi, \mu)}(X^{-r}) = \frac{1}{\mu^{2r+1}} E_{IG(\psi, \mu)}(X^{r+1})$$

En particular, la media y la varianza de la variable aleatoria que sigue la distribución (3) son

$$E(X) = a \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\psi} \right), \quad (8)$$

$$Var(X) = a \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\psi} \right) + \frac{3}{\psi} \left( \frac{a}{\mu} + \frac{1}{\psi} \right) + \frac{2a}{\psi^2} \right], \quad (9)$$

respectivamente, que pueden obtenerse directamente de (7).

Si reemplazamos en el esquema anterior la distribución inversa Gaussiana por la generalizada inversa Gaussiana, se obtiene una familia de distribuciones continuas más flexible. Denotaremos a esta nueva familia mediante  $X \sim GGIG(\lambda, \mu, \psi)$ .

El siguiente resultado proporciona expresiones cerradas para la función de densidad de probabilidad y la función de distribución de la misma.

**Teorema 2** Suponiendo que  $a$  es entero, la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $X \sim GGIG(\lambda, \mu, \psi)$  viene dada por

$$f_{GGIG}(x) = \frac{x^{a-1} \mu_1(x)^{a+\lambda}}{\Gamma(a) \mu^\lambda} \frac{K_{a+\lambda} \left[ \frac{\psi}{\mu_1(x)} \right]}{K_\lambda \left( \frac{\psi}{\mu} \right)}. \quad (10)$$

La función de distribución es

$$F_{GGIG}(x) = 1 - \left[ \frac{\mu_1(x)}{\mu} \right]^\lambda \frac{1}{K_\lambda \left( \frac{\psi}{\mu} \right)} \sum_{i=0}^{a-1} \frac{[x\mu_1(x)]^i}{i!} K_{\lambda+i} \left[ \frac{\psi}{\mu_1(x)} \right], a \geq 1.$$

*Demostración:* La demostración es similar a la del teorema 1.

La media y la varianza de la distribución  $GGIG$  (10) vienen dadas por

$$E(X) = \frac{a}{\mu} \frac{K_{\lambda-1} \left( \frac{\psi}{\mu} \right)}{K_\lambda \left( \frac{\psi}{\mu} \right)},$$

$$Var(X) = \frac{a^2}{\mu^2} \left\{ \frac{K_{\lambda-2} \left( \frac{\psi}{\mu} \right)}{K_\lambda \left( \frac{\psi}{\mu} \right)} - \left[ \frac{K_{\lambda-1} \left( \frac{\psi}{\mu} \right)}{K_\lambda \left( \frac{\psi}{\mu} \right)} \right]^2 \right\} + \frac{a}{\mu^2} \left[ \frac{K_{\lambda-2} \left( \frac{\psi}{\mu} \right)}{K_\lambda \left( \frac{\psi}{\mu} \right)} \right].$$

Obsérvese que la mezcla de la distribución gamma con la generalizada inversa Gaussiana también puede escribirse como

$$(11) \quad f_{GGIG}(x) = \frac{x^{a-1} \mu^{-\lambda}}{\Gamma(a) 2K_\lambda(\psi/\mu)} \sqrt{\frac{2\pi}{\psi}} e^{-\psi/\mu_1(x)} E_{IG(\mu_1(x), \psi)} \left( \ominus^{a+\lambda+1/2} \right)$$

Finalmente, igualando (10) con (11) resulta, después de unos pocos cálculos, el conocido resultado

$$E_{IG(\mu, \psi)}(\Theta^r) = \frac{\mu^r K_{r-1/2}(\psi/\mu)}{K_{1/2}(\psi/\mu)}.$$

## 2.1 Estimación

Estudiaremos el caso correspondiente a la distribución gamma-inversa Gaussiana. Dada la observación muestral  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , si  $\bar{x}$  y  $s^2$  son la media y la varianza muestral, utilizando (8) y (9) se pueden obtener expresiones cerradas para los estimadores de  $\mu$  y  $\psi$  mediante el método de los momentos y asumiendo  $a$  conocido. En particular para  $a=1$ , y escribiendo  $m=1/\mu$ ,  $f=1/\psi$  es fácil obtener los estimadores

$$\begin{aligned}\hat{m} &= \frac{1}{2} \left( 3\bar{x} - \sqrt{2s^2 - \bar{x}^2} \right), \\ \hat{f} &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{2s^2 - \bar{x}^2} - \bar{x} \right),\end{aligned}$$

mientras que asumiendo  $a=2$  se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{m} &= \frac{1}{4} \left( 7\bar{x} - \sqrt{21\bar{x}^2 - 8s^2} \right), \\ \hat{f} &= \frac{1}{4} \left( \sqrt{21\bar{x}^2 + 8s^2} - 5\bar{x} \right),\end{aligned}$$

de donde, obviamente  $\hat{\mu} = 1/\hat{m}$  y  $\hat{\psi} = 1/\hat{f}$ .

No se obtienen ecuaciones sencillas que permitan estimar los parámetros por el método de máxima verosimilitud. Sin embargo es posible obtener dichos estimadores por este método maximizando directamente la función logaritmo de la verosimilitud y utilizando para ello el software informático adecuado, como Mathematica.

Por otro lado, la distribución generalizada inversa Gaussiana es conjugada con respecto a la verosimilitud gamma como mostramos en el siguiente resultado.

**Teorema 3** Sea  $X_i | \theta \sim G(a, \theta)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Supongamos que la distribución a priori del parámetro  $\theta$  es la distribución generalizada inversa Gaussiana, esto es,  $\theta \sim GIG(\lambda, \mu, \psi)$ . Entonces la distribución a posteriori del parámetro  $\theta$  dada la muestra  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  es

$$\theta | \underline{X} \sim GIG(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\psi}),$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \lambda + an, \\ \tilde{\mu} &= \frac{\mu\sqrt{\psi}}{\sqrt{\psi + 2\mu^2 \sum_{i=1}^n X_i}}, \\ \tilde{\psi} &= \psi. \end{aligned}$$

*Demostración:* Se obtiene después de unos pocos cálculos haciendo uso del teorema de Bayes.

En tarificación de seguros la cantidad  $E_{G(a,\theta)}(X|\theta)$  se le conoce como la prima neta de riesgo (ver Gómez-Déniz y Sarabia, 2008, Furman y Zitikis, 2008a y Klugman et al., 1998; entre otros), mientras que

$$E_{GIG(\lambda,\mu,\psi)}(a/\theta) = \frac{a}{\mu} \frac{K_{\lambda-1}(\psi/\mu)}{K_{\lambda}(\psi/\mu)}$$

es la prima neta colectiva. Ahora,

haciendo uso del teorema 3 se puede obtener la prima neta Bayes,

$$\text{que viene dada por } E_{GIG(\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{\psi})}(a/\theta) = \frac{a}{\tilde{\mu}} \frac{K_{\tilde{\lambda}-1}(\psi/\tilde{\mu})}{K_{\tilde{\lambda}}(\psi/\tilde{\mu})}.$$

### 3 CREDIBILIDAD Y MEDIDAS DE RIESGO

Algunos casos particulares de la distribución inversa Gaussiana se obtienen al tomar (ver Balakrishnan y Nevzorov, 2003, p. 238) (i)  $\mu \rightarrow \infty$  y (ii)  $\mu^2 = \psi$  que permite introducir funciones de probabilidad más sencillas.

En este sentido, dos distribuciones de probabilidad dependientes de un sólo parámetro pueden obtenerse a partir de (5) y (6). Ilustraremos aquí sólo el caso elaborado a partir de (5). En primer lugar, consideremos  $\mu \rightarrow \infty$ . Se obtiene la distribución

$$f(x; \psi) = \sqrt{\frac{\psi}{2x}} e^{-\sqrt{2\psi x}}. \quad (12)$$

Obsérvese que (12) puede obtenerse también a partir de la distribución exponencial  $f(y) \propto e^{-\lambda y}$ ,  $\lambda > 0$ , mediante el cambio de variable  $y = \sqrt{x}$ .

La función de distribución y de azar de una variable aleatoria que sigue la distribución (12) vienen dadas por

$$F(x) = 1 - e^{-\sqrt{2\psi x}}, \quad (13)$$

$$r(x) = \sqrt{\frac{\psi}{2x}},$$

respectivamente. Por otro lado, de (5), haciendo  $\mu^2 = \psi$ , se obtiene la distribución

$$f(x | \psi) = \sqrt{\frac{\psi}{1+2x}} e^{\sqrt{\psi}(1-\sqrt{1+2x})}, \quad (14)$$

con funciones de distribución y de azar

$$F(x) = 1 - e^{\sqrt{\psi}(1-\sqrt{1+2x})}, \quad (15)$$

$$r(x) = \sqrt{\frac{\psi}{1+2x}}.$$

Es fácil, en este caso, obtener una expresión cerrada para el estimador máximo verosímil de las distribuciones (12) y (14). Así, para (12) se obtiene

$$\hat{\psi} = \frac{n^2}{2 \left( \sum_{i=1}^n \sqrt{X_i} \right)^2}, \text{ mientras que para (14) resulta } \hat{\psi} = \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n \sqrt{1+2X_i} - n} \right)^2.$$

Consideremos ahora la distribución (12) con  $\sqrt{\psi} = \gamma \in (0, \infty)$ , entonces se verifica el siguiente resultado.

**Proposición 2** *Sea  $X_i | \theta$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad de probabilidad  $f(x|\gamma) = \gamma / (\sqrt{2x}) e^{-\gamma\sqrt{2x}}$ , y asumamos que la distribución a priori del parámetro  $\gamma$  es gamma con parámetros  $c > 0$  y  $d > 0$ , entonces, la distribución a posteriori de  $\gamma$  dada la información muestral  $\underline{X}$  es de nuevo gamma con parámetros  $n+c$ ,  $d + \sum_{i=1}^n \sqrt{2X_i}$ .*

*Demostración:* Se obtiene de forma inmediata haciendo uso del teorema de Bayes.

La distribución marginal de  $X$  es  $f(x) = cd^c / (\sqrt{2x}(d + \sqrt{2x})^{c+1})$ .

Resulta interesante señalar que la prima neta de riesgo (Gómez-Déniz y Sarabia, 2008, Furman y Zitikis, 2008a y Klugman et al., 1998; entre otros) es  $P(\gamma) = E_f(X) = 1/\gamma^2$ , mientras que la prima neta colectiva es  $P_C = E_\pi(1/\gamma^2) = d^2 / ((c-1)(c-2))$ ,  $c > 2$ , en la que la distribución a priori  $\pi(\gamma)$  es la distribución gamma con parámetros  $c > 0$  y  $d > 0$ . Entonces la prima neta Bayes, la media a posteriori de la prima neta de riesgo, resulta  $P_B = (d + \sum_{i=1}^n \sqrt{2X_i})^2 / ((n+c-1)(n+c-2))$ ,  $n+c > 2$ . El siguiente resultado muestra que la prima neta Bayes es una fórmula de credibilidad.

**Corolario 1** *La prima neta Bayes anterior es una fórmula de credibilidad que admite escribirse como*

$$Z_n P_C + (1 - Z_n) g(\underline{X}),$$

donde  $Z_n = (c-1)(c-2) / ((n+c-1)(n+c-2))$  es el factor de credibilidad y  $g(\underline{X}) = (2d \sum_{i=1}^n \sqrt{2X_i} + (\sum_{i=1}^n \sqrt{2X_i})^2) / (n^2 + 2nc - 3n)$ .

*Demostración:* Se obtiene después de no muchas operaciones.

Un resultado similar puede obtenerse, bajo el mismo desarrollo, para la distribución (14). En este caso, la prima neta de riesgo es  $P(\gamma) = 1/\gamma^2 + 1/\gamma$ , mientras que la prima neta colectiva resulta  $P_C = d(d+c-2) / ((c-1)(c-2))$ ,  $c > 2$ . La prima neta Bayes se escribe también como una fórmula de credibilidad de la forma

$$Z_n P_C + (1 - Z_n) g(\underline{X}),$$

donde el factor de credibilidad es igual al del corolario 1 y  $g(\underline{X})$  es

$$g(\underline{X}) = \frac{nd + (n - \sum_{i=1}^n \sqrt{1+2X_i})(2d + n + c - 2 + n - \sum_{i=1}^n \sqrt{1+2X_i})}{n^2 + 2nc - 3n}.$$

Por otro lado, es notorio que en los últimos años se ha producido un interés creciente en la práctica financiera y actuarial por la obtención de los cuantiles (o percentiles) de probabilidad de la distribución de un riesgo. Dos medidas (medidas de riesgo) que señalan en este sentido son el valor en riesgo (VaR) y el valor en riesgo en la cola (TVAR). Véase Furman y Zitikis (2008b) y Gómez-Déniz y Sarabia (2008) para obtener detalles de estas medidas de riesgo.

La importancia de estas medidas se pone de manifiesto en la teoría de riesgos operacionales, debido por encima de todo a las indicaciones regulatorias conocidas como Basilea II (BIS, 2005). En particular

se recomienda en estas bases regulatorias obtener el 0.999 cuantil (VaR) como medida de riesgo.

Es posible obtener de (13), calculando la función inversa, el valor en riesgo, así como el valor en riesgo en la cola para la distribución (12), que vienen dados por

$$VaR[X; q] = \frac{1}{2\psi} \log^2(1-q), \quad 0 < q < 1,$$

$$TVaR[X; q] = \frac{1}{\psi} \left[ 1 + \left( \log \sqrt{1-q} - 1 \right) \log(1-q) \right], \quad 0 < q < 1,$$

Igualmente, a partir de (15) se obtienen el valor en riesgo y el valor en riesgo en la cola de la función de densidad de probabilidad (14), que vienen dados por

$$VaR[X; q] = \frac{1}{2} \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{\psi}} \log(1-q) \right]^2 - 1 \right\}, \quad 0 < q < 1,$$

$$TVaR[X; q] = \frac{1+\psi}{\psi} \left[ 1 - \log(1-q) + \frac{1}{2(1+\psi)} \log^2(1-q) \right], \quad 0 < q < 1.$$

#### 4 APLICACIONES

Presentamos en esta sección una aplicación referente a un conjunto de datos reales que aparecen en Klugman et al. (1998), p.72, relacionados con seguro de responsabilidad. Para ello se utilizó la función de densidad de probabilidad (3), estimándose los parámetros mediante el método de máxima verosimilitud.

El conjunto de datos, que se muestra en la Tabla 1, representan 217 pagos por seguro de responsabilidad referentes a pólizas con un límite superior de 300000 unidades monetarias.

**Tabla 1.**  
Pagos medios y frecuencias observadas (Klugman et al., 1998)

Intervalos de pagos	Pagos observados	Frecuencia observada
0-2500	2290	41
2500-7500	3427	48
7500-12500	2672	24
12500-17500	2229	18
17500-22500	1825	15
22500-32500	2892	14
32500-47500	3408	16
47500-67500	3166	12
67500-87500	2327	6
87500-125000	3055	11
125000-225000	4602	5
250000-	1756	7

Se han calculado los pagos medios esperados usando el valor esperado límite (*limited expected value*) (ver Klugman et al., 1998, p.603) y que viene dado por

$$E[X \wedge x] = \int_0^x tf(t)dt + x[1 - F(x)],$$

para la función de densidad de probabilidad (3) y para la que se ha considerado los valores  $a = 2$ ,  $a = 3$  y  $a = 4$ . Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 2.

**Tabla 2.**  
Pagos medios y frecuencias estimadas

Pagos esperados	Frecuencia esperada	Pagos esperados	Frecuencia esperada	Pagos esperados	Frecuencia esperada
2259	39.88	2314	32.18	2315	31.96
3519	43.87	3750	40.22	3761	39.74
2751	25.90	3023	25.20	3041	25.14
2254	18.02	2532	18.23	2547	18.33
1895	13.48	2163	14.04	2176	14.21
3025	18.98	3513	20.41	3527	20.78
3267	17.59	3876	19.68	3867	20.12
2931	13.56	3544	15.74	3496	16.09
1967	7.990	2410	9.540	2338	9.690
2266	8.090	2799	9.870	2651	9.880
2383	7.020	2942	8.740	2632	8.380
598.0	2.520	8230	3.120	591.1	1.580
$a = 2$		$a = 3$		$a = 4$	
$\hat{\mu} = 4.097926E-4$		$\hat{\mu} = 5.697016E-4$		$\hat{\mu} = 8.335E-4$	
$\hat{\psi} = 8.06026E-5$		$\hat{\psi} = 1.03525E-4$		$\hat{\psi} = 1.3983E-4$	
$L_{\max} = -500.31$		$L_{\max} = -502.793$		$L_{\max} = -711.163$	
$\chi_{Total}^2 = 4.52$		$\chi_{Total}^2 = 9.06$		$\chi_{Total}^2 = 10.07$	

Para  $a = 1$ , que se corresponde con la mezcla exponencial-inversa Gaussiana en Frangos y Karlis (2004), y que aparece en (5), el ajuste que se obtiene no es del todo bueno, de ahí que la presentación de este caso se omita. El caso  $a = 2$  se corresponde con la función de densidad de probabilidad (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). Este conjunto de datos ya había sido ajustado mediante la distribución log-normal, inversa Gaussiana, Pareto, etc. (ver Klugman et al., 1998, p.128). Los resultados obtenidos con la nueva función de densidad de probabilidad se muestran en la Tabla 2. Como se aprecia,

el ajuste es bueno para  $x \leq 87500$  y peor para  $x \geq 87500$ , siendo realmente malo para  $a = 3$  y  $a = 4$ . Se observa que el ajuste es similar al que se obtiene con la distribución log-normal, utilizando el logaritmo de la verosimilitud como criterio de comparación. Las conclusiones son las mismas si atendemos al valor esperado de las frecuencias. En este caso, se muestra el valor  $\chi^2$  como criterio de comparación. El  $p$ -valor que resulta es 0.8739. Destacar que el número de observaciones en cada grupo se calculó de acuerdo a la expresión

$$e_j = n \Pr(X \in \text{grupo } j).$$

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha introducido una nueva familia de distribuciones continuas con soporte en  $(0, \infty)$ . La nueva familia se ha obtenido mezclando la distribución gamma clásica con la distribución inversa Gaussiana, en primer lugar, y con la distribución generalizada inversa Gaussiana en segundo lugar.

Las nuevas funciones de densidad de probabilidad que se obtiene, así como la función de distribución y la función de azar presentan expresiones cerradas y los métodos de estimación propuestos parecen funcionar bien bajo el nuevo modelo.

Finalmente, se ha mostrado la utilidad de los modelos propuestos mediante una aplicación en seguro de responsabilidad que señala que la nueva familia puede presentarse como alternativa a las distribuciones clásicas log-normal, gamma, Pareto y Weibull, entre otras.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Ministerio de Ciencia y Tecnología (EGD y ECO, proyecto SEJ2006-12685; JMS, proyecto SEJ2007-65818) por la financiación parcial de este trabajo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balakrishnan, N., Nevzorov, V.B. (2003). A Primer on Statistical Distributions. John Wiley & Sons, New Jersey.

Bhattacharya, S.K., Kumar, S. (1986). E-IG model in life testing. Calcutta Statistical Association Bulletin 35, 85-90.

BIS (2005). Basel II. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a revised framework Bank for International Settlements (BIS), [www.bis.org](http://www.bis.org)

Chhikara, R., Folks, T. (1988). The inverse Gaussian distribution. Theory, methodology, and applications.

Frangos, N., Karlis, D. (2004). Modelling losses using an exponential-inverse Gaussian distribution. *Insurance: Mathematics & Economics*, 35, 53--67.

Furman, E., Zitikis, R. (2008a). Weighted premium calculation principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 459--465.

Furman, E., Zitikis, R. (2008b). Weighted risk capital allocations. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 459--465.

Gómez-Déniz, E., Sarabia, J.M. (2008). Teoría de la Credibilidad. Desarrollo y Aplicaciones en Primas de Seguros y Riesgos Operacionales. Fundación Mapfre.

Jorgensen, B. (1982). Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution. Lecture Notes in Statistics, 9. Springer-Verlag, New York.

Klugman, S.; Panjer, H., Willmot, G. (1998). Loss Models. From Data to Decisions. John Wiley and Sons, New York.

## Ponencia 7

### **CÁLCULO DE PRIMAS RECARGADAS MEDIANTE VALOR EN RIESGO CONDICIONAL**

Antonio Heras, Jose Luis Vilar, Jose Antonio Gil y Beatriz Balbás

#### **RESUMEN**

En este artículo se calculan primas recargadas en base a la minimización del Valor en Riesgo Condicional de funciones de pérdida absoluta. El Valor en Riesgo Condicional es una medida del riesgo coherente con buenas propiedades teóricas, que se utiliza cada vez más para la resolución de problemas actuariales y financieros. Su aplicación al cálculo de primas es sencilla de obtener y fácil de interpretar.

#### **Palabras Clave:**

Prima Recargada, Función de Pérdida Absoluta, Valor en Riesgo Condicional.

#### **1. INTRODUCCIÓN.**

Es bien conocido que las carteras de seguros son a menudo heterogéneas, debido a que algunos de los factores de riesgo más importantes son difíciles de observar y/o medir. Las técnicas de tarificación basadas en la experiencia están diseñadas para calcular primas para pólizas pertenecientes a carteras heterogéneas, tomando en consideración la experiencia de siniestralidad de cada póliza.

Como es habitual en la literatura, asumiremos que las características de cada póliza están resumidas en el valor de un cierto parámetro de riesgo  $\Lambda$ , que se supone estacionario, y que a menudo se identifica con la frecuencia media de siniestros de la póliza (véase Lemaire (1985, 1995)). Debido a la heterogeneidad de la cartera, los valores de tales parámetros, que se suponen desconocidos, se identificarán con los valores de una variable aleatoria. Supondremos por tanto que  $\Lambda$  es una variable aleatoria, de la cual conocemos su función de distribución  $U(\lambda)$ , a la que llamaremos *Función de Estructura*.

Si suponemos además que las cuantías individuales de los siniestros son independientes del número de siniestros y del valor del parámetro de riesgo, y tomamos el coste medio de los siniestros como unidad monetaria, el objetivo del proceso de tarificación será calcular una prima para cada póliza lo más próxima posible al valor (desconocido) de su parámetro de riesgo. Una de las técnicas más comunes de tarificación basada en la experiencia, denominada *Teoría de la Credibilidad Bayesiana*, lleva a cabo esta tarea en varias etapas. En primer lugar, es necesario seleccionar una *función de pérdida* que mida la importancia de los errores de tarificación, para posteriormente calcular la prima óptima como aquella que minimiza la pérdida esperada. En segundo lugar, cuando se recibe nueva información acerca del número de siniestros de la póliza, se aplican métodos bayesianos para actualizar la función de estructura y transformarla de “a priori” en “a posteriori”. La nueva prima óptima será ahora la que minimice la pérdida esperada “a posteriori”.

Por tanto, si denotamos la función de pérdida como  $L(P, \lambda)$  (donde  $P$  es la prima y  $\Lambda = \lambda$  el valor del parámetro de riesgo), entonces la prima óptima se calcula como la cantidad  $P^*$  que minimiza la pérdida esperada

$$E(L(P, \lambda)) = \int_0^{\infty} L(P, \lambda) u(\lambda) d\lambda$$

En la expresión anterior  $u$  es la derivada de la función de estructura  $U$  (supondremos una distribución continua para  $\Lambda$ , y no distinguiremos

entre los casos a priori y a posteriori). En este artículo nos centraremos en el problema de calcular tales primas óptimas, suponiendo que conocemos la función de estructura (a priori o a posteriori).

La elección más habitual de función de pérdida es la denominada *pérdida cuadrática*, que se define como el cuadrado de la diferencia entre la prima  $P$  y el valor del parámetro de riesgo  $\Lambda = \lambda$ :

$$L(P, \lambda) = (P - \lambda)^2$$

En este caso, es bien conocido (véase, por ejemplo, Lemaire (1985, 1995)) que la prima óptima es la esperanza matemática del parámetro de riesgo  $\Lambda$ :

$$P^* = E[\Lambda]$$

Es decir, la prima óptima es la *prima pura*. Otra elección razonable de función de pérdida es la *pérdida absoluta*

$$L(P, \lambda) = |P - \lambda|$$

Se puede demostrar (véase Lemaire and Vandermeulen (1983)) que la prima óptima en este caso es la mediana de  $\Lambda$ . Desgraciadamente las distribuciones de siniestros son asimétricas, por lo cual las medianas están por debajo de las medias y en consecuencia las compañías de seguros tendrían problemas de solvencia si usaran la pérdida absoluta para el cálculo de primas, ya que a largo plazo acabarían perdiendo dinero con seguridad.

Pero la prima pura tampoco es una buena elección desde el punto de vista de la solvencia. En este caso la prima cubre exactamente los siniestros esperados y no incluye ningún recargo que permita a la compañía protegerse contra las malas rachas. La prima debe ser mayor que la prima pura, incluyendo un "recargo de seguridad" para proteger a la compañía de las desviaciones imprevistas de la siniestralidad.

El procedimiento habitual para resolver este problema consiste en elegir un principio de cálculo de primas que incluya un recargo explícito

sobre la prima pura, como por ejemplo el *principio del valor esperado*, el *principio de la varianza* o el *principio de la desviación típica*:

$$P = (1 + \alpha)E[\Lambda]$$

$$P = E[\Lambda] + \alpha \cdot Var[\Lambda]$$

$$P = E[\Lambda] + \alpha \sqrt{Var[\Lambda]}$$

También es posible elegir principios de cálculo de primas con recargos implícitos, como por ejemplo el *principio exponencial* o el *principio Esscher*:

$$P = \frac{1}{\alpha} \log E(e^{\alpha\Lambda})$$

$$P = \frac{E[\Lambda e^{\Lambda}]}{E[e^{\Lambda}]}$$

(Véase Young (2004) para una lista de principios de cálculo de primas y sus propiedades).

El problema de esta propuesta es que la elección del principio de cálculo de primas parece ad hoc y no tiene relación con el proceso bayesiano de actualización de primas descrito previamente. ¿Por qué se debería usar, digamos, el principio de la varianza para obtener el recargo adecuado? ¿Por qué no se podría usar en su lugar el principio exponencial? Heilmann (1989) dio una respuesta bayesiana a estas preguntas, mostrando que algunos de los más famosos principios de cálculo de primas pueden obtenerse minimizando la pérdida esperada asociada a nuevas funciones de pérdida. Por ejemplo, si elegimos las funciones de pérdida

$$L(P, \lambda) = (e^{\alpha P} - e^{\alpha \lambda})^2$$

$$L(P, \lambda) = e^{\alpha \lambda} (P - \lambda)^2$$

$$L(P, \lambda) = \lambda (P - \lambda)^2$$

Entonces obtenemos el principio exponencial, el principio Esscher y el principio de la varianza. Partiendo de nuevas funciones de pérdida como estas, Heilmann (1989) obtuvo fórmulas de credibilidad para primas ajustadas al riesgo, en lugar de para primas puras como en el caso de la pérdida cuadrática.

Pero la elección de una función particular dentro de este nuevo conjunto de funciones de pérdida tampoco es fácil de justificar. Por ejemplo, en el caso de las tres funciones anteriores, ¿por qué se debería elegir la primera en lugar de la segunda o la tercera?. Más aún, este enfoque basado en nuevos tipos de funciones de pérdida no es la única forma de obtener primas ajustadas al riesgo. En los últimos años han tenido lugar un gran número de investigaciones acerca de la medición del riesgo en el campo financiero. Como los problemas actuariales y los problemas financieros comparten a menudo una estructura común, puede no ser mala idea adaptar algunas de las técnicas financieras a la resolución de problemas actuariales.

En general, una *medida del riesgo* es un funcional que asigna un número a cada riesgo. En nuestro problema los riesgos son variables aleatorias no negativas que representan pérdidas, de forma que las mediciones del riesgo son números no negativos calculados de forma que, cuanto más peligroso es el riesgo, más alta debe ser su medida. Si elegimos una medida del riesgo  $\rho$ , podemos definir la prima óptima como la cantidad  $P^*$  que hace mínima la medida del riesgo de la pérdida

$$\rho(L(P, \lambda))$$

(en lugar de minimizar la esperanza de la pérdida  $E(L(P, \lambda))$ , como antes).

Probablemente las medidas del riesgo más famosas en el campo financiero son las *medidas coherentes* definidas en Artzner, Delbaen, Eber y Heath (1999). Y la elección más común entre estas medidas coherentes es, sin duda, el *Valor en Riesgo Condicional (CVaR)*. En términos intuitivos, CVaR es la esperanza matemática de las peores pérdidas que pueden ocurrir. Como parece bastante razonable calcu-

lar primas ajustadas al riesgo tomando en consideración los peores casos que pueden ocurrir, nuestra propuesta es definir la prima óptima ajustada al riesgo como la cantidad  $P^*$  que minimiza el valor en riesgo condicional de la pérdida

$$CVaR(L(P, \lambda))$$

Ya no sería entonces necesario considerar funciones de pérdida complicadas para obtener primas recargadas. En este artículo consideraremos únicamente la función de pérdida más sencilla, la pérdida absoluta. Aunque, por supuesto, la metodología es aplicable a cualquier otra función.

## 2. MINIMIZACIÓN DEL VALOR EN RIESGO CONDICIONAL DE LA PÉRDIDA.

Para definir rigurosamente el Valor en Riesgo Condicional, es necesario definir primero otra medida del riesgo muy conocida, el *Valor en Riesgo (VaR)*. Dado un umbral de probabilidad  $\beta$ , el Valor en Riesgo asociado es la mínima cantidad  $\alpha$  tal que, con probabilidad  $\beta$ , la pérdida no supera  $\alpha$ , y el Valor en Riesgo Condicional asociado es la esperanza condicional de las pérdidas que superen la cantidad  $\alpha$ . Es bien conocido (véase Artzner et al (1999)) que VaR no es una medida del riesgo coherente, porque no verifica en general las propiedades de subaditividad y convexidad. Aunque es menos famoso que el VaR, el CVaR es una medida coherente del riesgo, lo que lo hace más adecuado que el VaR para nuestros propósitos.

En nuestro problema, dado un umbral de probabilidad  $\beta$ , una prima  $P$  y una función de pérdida  $L(P, \lambda)$ , VaR se define como

$$VaR_{\beta}(P) = \text{MIN} \{ \alpha \in \mathbb{R} / \text{Prob} [ L(P, \lambda) \leq \alpha ] \geq \beta \}$$

Y CVaR se define como

$$CVaR_{\beta}(P) = \frac{1}{1-\beta} \int_{L(P, \lambda) \geq VaR_{\beta}(P)} L(P, \lambda) \mu(\lambda) d\lambda$$

Dadas la probabilidad  $\beta$  y la función de pérdida, definimos la prima óptima ajustada al riesgo como la cantidad  $P_\beta^*$  que hace mínimo el Valor en Riesgo Condicional de la pérdida  $CVaR_\beta(P)$ . A primera vista esta prima parece muy difícil de calcular, pero Rockafellar y Uryasev (2000) han desarrollado técnicas de optimización para el cálculo de VaR y CVaR que se aplican fácilmente a nuestro problema. De hecho, el teorema 1 de Rockafellar y Uryasev (2000) implica que, dada la prima  $P$ ,  $CVaR_\beta(P)$  se puede calcular como el valor mínimo de la siguiente función convexa y diferenciable con continuidad del parámetro  $\alpha$ :

$$\alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_0^\infty [L(P, \lambda) - \alpha]^+ u(\lambda) d\lambda$$

Endonde  $[L(P, \lambda) - \alpha]^+ = L(P, \lambda) - \alpha$  si  $L(P, \lambda) \geq \alpha$  y  $[L(P, \lambda) - \alpha]^+ = 0$  si  $L(P, \lambda) < \alpha$ . Además, la solución óptima  $\alpha^*$ , si es estricta, coincide con el Valor en Riesgo  $VaR_\beta(P)$ .

Consideremos ahora a la función anterior como una función  $V$  de las dos variables  $P$  y  $\alpha$ ,

$$V(P, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \int_0^\infty [L(P, \lambda) - \alpha]^+ u(\lambda) d\lambda$$

Entonces el teorema 2 de Rockafellar y Uryasev (2000) muestra que  $V$  es una función convexa y diferenciable con continuidad respecto de ambas variables y que la minimización de esta función genera un par  $(P_\beta^*, \alpha_\beta^*)$  tal que  $P_\beta^*$  minimiza  $CVaR_\beta(P)$  y  $\alpha_\beta^*$ , si es único, proporciona el correspondiente  $VaR_\beta(P_\beta^*)$ .

En la siguiente sección resolveremos este problema de optimización cuando la función de pérdida es la pérdida absoluta.

### 3. MINIMIZACIÓN DEL VALOR EN RIESGO CONDICIONAL DE LA PÉRDIDA ABSOLUTA.

La función de pérdida absoluta no se usa en los modelos de credibilidad porque da lugar a una prima que coincide con la mediana de la distribución de la siniestralidad, lo cual no es admisible en absoluto. Sin embargo, esta objeción puede ser resuelta si consideramos primas ajustadas al riesgo con un umbral de probabilidad  $\beta$  alto, como veremos en esta sección. De hecho, al aumentar  $\beta$ , la prima ajustada al riesgo acaba superando a la prima pura, y por tanto la pérdida absoluta puede resultar atractiva ya que proporciona primas recargadas razonables. Además, la pérdida absoluta es fácil de entender ya que, en definitiva, mide la pérdida en unidades monetarias.

**Teorema:** Si  $L(P, \lambda) = |P - \lambda|$ , entonces  $(P_\beta^*, \alpha_\beta^*)$  minimiza la función  $V$  si y solo si es solución del siguiente sistema de ecuaciones (1):

$$U(P - \alpha) = \frac{1 - \beta}{2}$$

$$U(P + \alpha) = \frac{1 + \beta}{2}$$

(recordemos que  $U$  es la función de estructura, o función de distribución de  $\Lambda$ ).

*Demostración:*

Debemos minimizar la función

$$V(P, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_0^\infty [ |P - \lambda| - \alpha ]^+ u(\lambda) d\lambda$$

Recordemos que  $[ |P - \lambda| - \alpha ]^+ = |P - \lambda| - \alpha$  si  $|P - \lambda| \geq \alpha$

y que  $[ |P - \lambda| - \alpha ]^+ = 0$  si  $|P - \lambda| < \alpha$ .

Además,  $|P - \lambda| \geq \alpha \Leftrightarrow \lambda > P + \alpha$  ó  $\lambda < P - \alpha$

Por tanto debemos minimizar la función

$$V(P, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \left[ \int_{\lambda > P+\alpha} (\lambda - P - \alpha) u(\lambda) d\lambda + \int_{\lambda < P-\alpha} (P - \lambda - \alpha) u(\lambda) d\lambda \right]$$

Estudiemos las integrales dentro de los corchetes:

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda > P+\alpha} (\lambda - P - \alpha) u(\lambda) d\lambda + \int_{\lambda < P-\alpha} (P - \lambda - \alpha) u(\lambda) d\lambda = \\ = & \int_{\lambda > P+\alpha} \lambda u(\lambda) d\lambda - (P + \alpha) \int_{\lambda > P+\alpha} u(\lambda) d\lambda + (P - \alpha) \int_{\lambda < P-\alpha} u(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda < P-\alpha} \lambda u(\lambda) d\lambda = \\ = & \int_{\lambda > P+\alpha} \lambda u(\lambda) d\lambda - (P + \alpha)(1 - U(P + \alpha)) + (P - \alpha)U(P - \alpha) - \int_{\lambda < P-\alpha} \lambda u(\lambda) d\lambda = \end{aligned}$$

(definiendo  $S(\lambda) = 1 - U(\lambda)$ , e integrando por partes)

$$\begin{aligned} = & (P + \alpha)S(P + \alpha) + \int_{P+\alpha} S(\lambda) d\lambda - (P + \alpha)S(P + \alpha) + (P - \alpha)U(P - \alpha) - \\ & - (P - \alpha)U(P - \alpha) + \int_0^{P-\alpha} U(\lambda) d\lambda = \int_{P+\alpha}^{\infty} S(\lambda) d\lambda + \int_0^{P-\alpha} U(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

Por tanto,  $V$  también se puede definir como

$$V(P, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} \left[ \int_0^{P-\alpha} U(\lambda) d\lambda + \int_{P+\alpha}^{\infty} S(\lambda) d\lambda \right]$$

Tomando derivadas parciales respecto a  $P$  y  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial P} &= \frac{1}{1-\beta} [U(P - \alpha) - S(P + \alpha)] = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \alpha} &= 1 - \frac{1}{1-\beta} [U(P - \alpha) + S(P + \alpha)] = 0 \end{aligned}$$

Que equivale a,

$$\begin{aligned} U(P - \alpha) &= S(P + \alpha) \\ U(P - \alpha) + S(P + \alpha) &= 1 - \beta \end{aligned}$$

Es decir, 
$$U(P - \alpha) = \frac{1 - \beta}{2}$$

$$S(P + \alpha) = \frac{1 - \beta}{2}$$

Y también,

$$U(P - \alpha) = \frac{1 - \beta}{2}$$

$$U(P + \alpha) = \frac{1 + \beta}{2}$$

q.e.d.

La solución de este sistema de ecuaciones tiene un comportamiento razonable:  $P_{\beta}^*$  se aproxima a la mediana cuando  $\beta \rightarrow 0$ , y también  $P_{\beta}^*$  se incrementa cuando  $\beta \rightarrow 1$ . En consecuencia, si tomamos  $\beta$  suficientemente grande terminaremos obteniendo una prima recargada, ya que la prima óptima  $P_{\beta}^*$  acabará siendo mayor que la prima pura.

El sistema de ecuaciones (3.1) es fácil de resolver en algunos casos sencillos de variables aleatorias con función de distribución explícita. Por ejemplo, si  $\Lambda$  es una variable aleatoria exponencial de parámetro "a" y función de distribución

$$U(\lambda) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{a}\right)$$

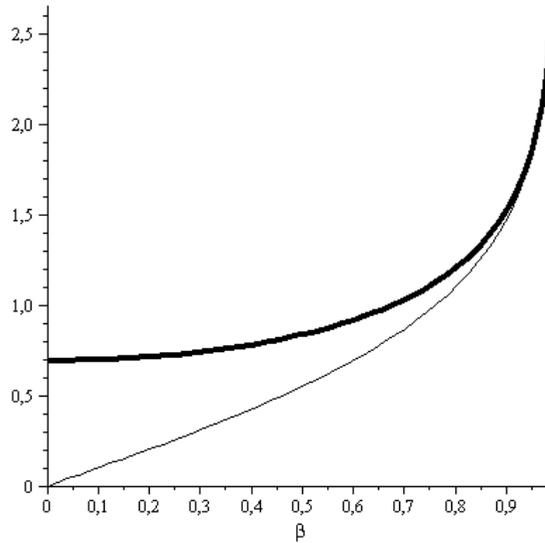
Entonces es fácil demostrar que

$$P_{\beta}^* = -\frac{a}{2} \left[ \log\left(\frac{1 - \beta}{2}\right) + \log\left(\frac{1 + \beta}{2}\right) \right]$$

$$\alpha_{\beta}^* = \frac{a}{2} \left[ \log\left(\frac{1 + \beta}{2}\right) - \log\left(\frac{1 - \beta}{2}\right) \right]$$

En la figura 1 vemos los gráficos de  $P_{\beta}^*$  y  $Var_{\beta}$  en el caso  $a = 1$ .

$$P_{\beta}^*, Var_{\beta}$$



**Figure 1**

$P_{\beta}^*$  (boldface) and  $VaR_{\beta}$  plots for  $\beta$  ranging from 0 to 0.95. Exponential distribution with parameter  $a = 1$ .

Asimismo, si  $\Lambda$  es una Pareto de parámetros “a” y “ $\sigma$ ” y función de distribución

$$U(\lambda) = 1 - \left( \frac{\lambda}{\sigma} \right)^{-a}$$

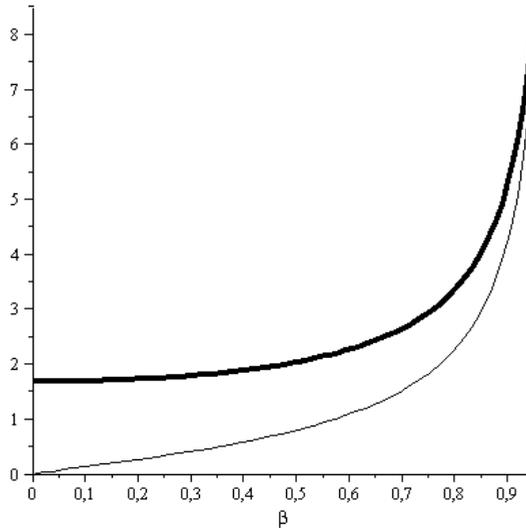
entonces

$$P_{\beta}^* = \frac{\sigma}{2} \left[ \left( \frac{1+\beta}{2} \right)^{-\frac{a}{2}} + \left( \frac{1-\beta}{2} \right)^{-\frac{a}{2}} \right]$$

$$\alpha_{\beta}^* = \frac{\sigma}{2} \left[ \left( \frac{1-\beta}{2} \right)^{-\frac{a}{2}} - \left( \frac{1+\beta}{2} \right)^{-\frac{a}{2}} \right]$$

Las gráficas de  $P_{\beta}^*$  y  $VaR_{\beta}$  se representan en la figura 2, con  $a = 1.5, \sigma = 1$

$P_{\beta}^*, VaR_{\beta}$



**Figure 2**  
 $P_{\beta}^*$  (boldface) and  $VaR_{\beta}$  plots for  $\beta$  ranging from 0 to 0.95.  
 Pareto distribution with parameters  $a = 1.5, \sigma = 1$

En casos más complicados puede resultar imposible obtener las soluciones óptimas tan fácilmente, por lo que se tendrá que recurrir a aproximaciones numéricas. Otra opción puede ser discretizar el problema, en cuyo caso la minimización de la función  $V$  se puede llevar a cabo resolviendo el siguiente programa lineal:

$$MIN \left[ \alpha + \frac{1}{1-\beta} \left( \sum_{j=1}^m z_j^+ p_j \right) \right]$$

s.t.

$$P + y_1^- - y_1^+ = \lambda_1$$

.....

$$P + y_m^- - y_m^+ = \lambda_m$$

$$y_1^+ + y_1^- + z_1^- - z_1^+ = \alpha$$

.....

$$y_m^+ + y_m^- + z_m^- - z_m^+ = \alpha$$

$$\bar{y}, \bar{z} \geq \bar{0}$$

(Donde  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  con probabilidades  $(p_1, \dots, p_m)$ ).

Consideremos, por ejemplo, que  $\Lambda$  es una variable aleatoria inversa gaussiana con densidad

$$u(\lambda) = \frac{g}{\lambda^2 \sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{(\lambda-g)^2}{2h\lambda}}, \lambda > 0, g > 0, h > 0$$

Siguiendo a Lemaire (1995, pp. 35-37), tomemos  $g=0.101081$  y  $h=0.062981$ . Tomemos asimismo la discretización de esta función que aparece en Heras et al (2004, pg. 450). El programa lineal resultante se resuelve fácilmente para diferentes valores de  $\beta$ , obteniéndose:

Si  $\frac{1}{1-\beta} = 2$  (correspondiente a  $\beta = \frac{1}{2}$ ),  
entonces la prima óptima es 0.0825.

Si  $\frac{1}{1-\beta} = 4$  (correspondiente a  $\beta = \frac{3}{4}$ ),  
entonces la prima óptima es 0.099.

Si  $\frac{1}{1-\beta} = 5$  (correspondiente a  $\beta = \frac{4}{5}$ ),  
entonces la prima óptima es 0.1155.

Si  $\frac{1}{1-\beta} = 10$  (correspondiente a  $\beta = \frac{9}{10}$ ),  
entonces la prima óptima es 0.1485.

Si  $\frac{1}{1-\beta} = 20$  (correspondiente a  $\beta = \frac{19}{20}$ ),  
entonces la prima óptima es 0.1650.

Observamos cómo se incrementa la cuantía de las primas conforme aumenta el valor de  $\beta$ . Las dos primeras primas serían inaceptables, ya que son menores que la prima pura 0.101. Las tres últimas son primas recargadas.

#### **4. CONCLUSIONES.**

En este artículo mostramos cómo las modernas medidas del riesgo como VaR y CVaR pueden aplicarse al cálculo de primas ajustadas al riesgo. El procedimiento clásico para calcular estas primas parece bastante ad hoc, pues se basa en la selección de algún principio de cálculo de primas como el principio del valor esperado, el de la varianza, el principio exponencial, etc. Heilmann (1989) propuso un fundamento bayesiano para esta selección, basado en la consideración de nuevas (y más complicadas) funciones de pérdida. En este artículo hemos mostrado que es posible calcular primas ajustadas al riesgo con funciones de pérdida sencillas, como la función de pérdida absoluta, siempre que utilicemos el Valor en Riesgo Condicional de la pérdida en lugar de su esperanza matemática. Este nuevo procedimiento es una generalización de la metodología clásica y proporciona resultados razonables que además son fácilmente interpretables. Las primas óptimas son fáciles de obtener en algunos casos, mientras que en otros debemos recurrir a aproximaciones numéricas.

## 5. BIBLIOGRAPHY.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. y Heath, D. (1999) Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance* 9, 203-228.

Heras, A., Gil, J.A., García, P. y Vilar, J.A. (2004) An Application of Linear Programming to Bonus Malus System Design, *ASTIN Bulletin* 34 (2), 435-456.

Lemaire, J. (1985) *Automobile Insurance. Actuarial Models*, Kluwer-Nijhoff Publishing, Dordrecht.

Lemaire, J. (1995) *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Lemaire, J. y Vandermeulen, E. (1983) Une propriété du principe de l'espérance mathématique, *Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaire Français*, 5-14.

Heilmann, W. (1989) Decision Theoretic Foundations of Credibility Theory, *Insurance: Mathematics and Economics* 8, 77-95.

Rockafellar, R. y Uryasev, S. (2000) Optimization of Conditional Value at Risk, *The Journal of Risk* 2, 493-517.

Young, V.R. (2004) Premium Principles, in Teugels and Sundt (editors), *Encyclopedia of Actuarial Science*, John Wiley and Sons, England, Vol. 3, 1322-1331.



## Ponencia 8

### ESTUDIO DE LA SENSIBILIDAD DE LAS PRIMAS BAYESIANAS EN EL MODELO COLECTIVO COMPUESTO ANTE ALEJAMIENTOS DE LA HIPÓTESIS DE INDEPENDENCIA ENTRE LOS PARÁMETROS DEL MODELO

Hernández-Bastida, A, Martel-Escobar, M. y Vázquez-Polo, F.J.

#### ABSTRACT

En el modelo colectivo compuesto usualmente la pérdida agregada se expresa como  $S = \sum_{i=1}^N X_i$ , donde  $N$  es la v.a. que mide el número de eventos producidos de acuerdo a distribución de (conteo) frecuencias  $P(\cdot|\lambda)$ , habitualmente Poisson, y las cuantías son medidas mediante las variables aleatorias  $X_i$ 's con distribución común  $F(\cdot|\theta)$ , habitualmente lognormal, Weibull o Pareto generalizada, entre otras. Es habitual, por cuestiones analíticas suponer entonces que los parámetros de riesgo  $\lambda$  y  $\theta$  sean considerados independientes aunque suele haber razones para no asumir dicha hipótesis (Peters et al., 2008). En este trabajo presentamos una vía de investigación sobre las consecuencias de posibles alejamientos de dicha hipótesis de independencia. El trabajo contiene los siguientes elementos novedosos en el campo actuarial:

- Utilización de la distribución Poisson-Lindely para la v.a.  $N$ .
- Utilización de la familia de distribuciones Farlie-Gumbel-Morgenstern para las densidades a priori de los parámetros de riesgo.
- Descripción de métodos para la obtención de rangos de variación para las primas Bayes en tal clase de densidades a priori.

**Palabras y frases clave:** Familia de Farlie-Gumbel-Morgenstern, Distribución Poisson-Lindely, Prima Bayesiana, Robustez.

## 1. INTRODUCCIÓN

El modelo colectivo es descrito mediante una distribución de frecuencias para el número de reclamaciones  $N$  y una secuencia de variables independientes e idénticamente distribuidas que representan el tamaño de cada reclamación  $X_i$ . Habitualmente, la frecuencia  $N$  y cuantía  $X_i$  se asumen independientes (McNeil et al., 2005).

Para cada hipótesis sobre la distribución de estas variables tendremos un modelo determinado. Los más utilizados han sido:

- $N$  sigue una distribución de Poisson o cualquiera de sus extensiones (Goovaerts y Kass, 1991), Negative Binomial (Gossiaux y Lemaire, 1981; Willmot, 1987; entre otros).
- Cuantías de tipo exponencial, gamma, lognormal, etc.

Es habitual, denominar distribución primaria a la distribución de  $N$  y secundaria a la de  $X_i$ . En el modelo colectivo compuesto el interés se centra en la variable aleatoria “coste total o pérdida agregada”,  $S$ , definida por

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i, & \text{si } N \geq 1 \\ 0, & \text{si } N = 0 \end{cases}$$

Su función de probabilidad será

$$f(s | \lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N = n | \lambda) \cdot f_2^{n*}(x | \theta),$$

donde  $\Pr(N = n | \lambda)$  es la probabilidad de tener  $n$  reclamaciones y  $f_2^{n*}$  es la  $n$ -ésima convolución de la función  $f_2(x | \theta)$ .

Un conjunto de interesantes resultados sobre este tipo de sumas aleatorias puede verse en Kozubowski y Panoska (2005). Aproximaciones de estas expresiones pueden encontrarse en Nadarajah y Kotz (2006a, 2006b).

No obstante lo anterior también es conocido desde hace tiempo una dificultad apreciable que se presenta en numerosos conjuntos de datos en los que la varianza del número de reclamaciones es apreciablemente mayor que la media (fenómeno conocido como sobredispersión). Esto ha llevado a la consideración de diversas distribuciones alternativas a la distribución de Poisson, para modelizar la distribución de la variable aleatoria  $N$ ; en especial las distribuciones de Poisson mixtas en las que se produce siempre el fenómeno de la sobredispersión (Grandell, 1997; Nilolouloupoulos y Karlis, 2008, entre otros).

En este trabajo nos planteamos el análisis estadístico bayesiano del modelo colectivo considerando como distribución primaria la distribución Poisson-Lindley, ver Sankaran (1971), y como distribución secundaria una distribución Exponencial. Además estudiaremos un procedimiento que nos permita analizar la sensibilidad de las primas bayesianas a la hipótesis de independencia.

## 2. EL MODELO POISSON-LINDLEY-EXPONENCIAL

Consideremos por tantos una secuencia  $N, X_1, X_2, \dots$  de variables aleatorias como las descritas anteriormente. En muchas situaciones  $N$  es asumida como distribución de Poisson. Recientemente, una alternativa a tal distribución ha surgido en el trabajo Ghitany y Al-Mutairi (2009) con la consideración de la distribución Poisson-Lindley, la cual produce un modelo estadístico más flexible.

Supongamos que  $N$  sigue una distribución Poisson-Lindley con función de probabilidad

$$\Pr(N = k | \lambda) = \frac{\lambda^2(\lambda + 2 + k)}{(\lambda + 1)^{k+3}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \lambda > 0. \quad (1)$$

Se sigue de (1) que la función generatriz de momentos es

$$M_1(t; \lambda) = \frac{\lambda^2(\exp(t) - \lambda - 2)}{(\lambda + 1)^2(\exp(t) - \lambda - 1)}.$$

De aquí se sigue inmediatamente que la media y varianza vienen dadas por

$$E[N] = \frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)}, \text{ y } \text{Var}(N) = \frac{\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 2}{\lambda^2(\lambda + 1)^2}, \text{ respectivamente.}$$

Puesto que  $\frac{\text{Var}(N)}{E[N]} = \frac{\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)} > 1, \quad \forall \lambda > 0,$  concluimos la

sobredispersión de esta distribución. Su coeficiente de variación vale

$$Vco(N) = \frac{\sqrt{\text{Var}(N)}}{E(N)} = \frac{1}{\lambda + 2} \sqrt{\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 2}.$$

Supongamos que ahora que las variables aleatorias  $X_i, i = 0, 1, \dots$  se distribuyen según una distribución Exponencial de parámetro  $\theta \geq 0,$

$$f_2(x_i | \theta) = \theta e^{-\theta x_i}, \quad x_i > 0. \quad (2)$$

Su función generatriz de momentos es

$$M_2(t; \theta) = \frac{\theta}{\theta - t}, \quad (3)$$

de donde, la media y varianza valen  $E[X_i] = \frac{1}{\theta},$

$$\text{y } \text{Var}(X_i) = \frac{1}{\theta^2}.$$

**Proposición 1.** *La función de densidad (pdf) y la función generatriz de momentos de  $S$  son respectivamente,*

$$f(s | \lambda, \theta) = \begin{cases} \lambda^2 (\lambda + 1)^{-5} \cdot \theta \cdot (\theta s + (\lambda + 1)(\lambda + 3)) \exp\left(-\frac{\lambda \theta}{\lambda + 1} s\right), & (4) \\ s > 0; \lambda^2 (\lambda + 1)^{-3} \cdot (\lambda + 2), s = 0. \end{cases}$$

$$s > 0; \lambda^2 (\lambda + 1)^{-3} \cdot (\lambda + 2), s = 0.$$

$$M(t; \lambda, \theta) = \frac{\lambda^2 \left[ \theta^2 (\lambda + 1) - \theta \lambda (2\lambda + 3) + t^2 (\lambda + 2) \right]}{(\lambda + 1)(\theta \lambda - t(\lambda + 1))^2}, \quad t > 0. \quad (5)$$

Además sus momentos valen:

$$E(S) = \frac{\lambda + 2}{\theta\lambda(\lambda + 1)},$$

$$E(S^2) = \frac{2(\lambda^2 + 3\lambda + 3)}{\theta^2\lambda^2(1 + \lambda)}$$

y

$$\text{Var}(S) = \frac{2\lambda^3 + 7\lambda^2 + 8\lambda + 2}{\theta^2\lambda^2(\lambda + 1)^2}, \text{ respectivamente.}$$

**Demostración.** En efecto,

$$\begin{aligned} f(s|\lambda, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n s^{n-1} \exp(-s\theta)}{(n-1)!} \frac{\lambda^2 (\lambda + 2 + n)}{(\lambda + 1)^{n+3}} \\ &= \theta \frac{\lambda^2 (\lambda + 2)}{(\lambda + 1)^4} \exp(-s\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\theta s)^{n-1}}{(n-1)! (\lambda + 1)^{n-1}} \\ &\quad + \theta \frac{\lambda^2}{(\lambda + 1)^4} \exp(-s\theta) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{(\theta s)^{n-1}}{(n-1)! (\lambda + 1)^{n-1}} \tag{6} \\ &= \theta \frac{\lambda^2 (\lambda + 2)}{(\lambda + 1)^4} \exp\left(-\frac{\theta\lambda}{1 + \lambda} s\right) \\ &\quad + \theta \frac{\lambda^2}{(\lambda + 1)^4} \exp\left(-\frac{\theta\lambda}{1 + \lambda} s\right) \cdot \left(1 + \frac{s\theta}{1 + \lambda}\right). \end{aligned}$$

Para el caso  $s = 0$ , tenemos trivialmente:

$$f(0|\lambda, \theta) = \Pr(N = 0|\lambda) = \frac{\lambda^2 (\lambda + 2)}{(\lambda + 1)^3}.$$

Por otra parte,  $M(t; \lambda, \theta)$  se deduce directamente de Klugman et al. (2004),

$$M(t; \lambda, \theta) = M_1(\log M_2(t; \theta); \lambda).$$

### 3. LAS DENSIDADES A PRIORI

Dado que el parámetro  $\lambda$  tiene soporte sobre  $(0, \infty)$ , una densidad a priori Gamma,  $G(a, b)$ , para valores  $a$  y  $b$ , es adecuada,

$$\pi_1(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \lambda^{a-1} \cdot \exp(-b\lambda), \quad \lambda > 0, \quad a, b > 0. \quad (7)$$

Esta densidad a priori es conjugada bajo un muestreo de Poisson. Consideraremos  $a > 1$ , por motivos analíticos. La media a priori y varianza de  $\lambda$  son  $E(\lambda) = \frac{a}{b}$  and  $\text{Var}(\lambda) = \frac{a}{b^2}$ . La moda existe y es única cuando  $a > 1$  y vale  $\text{Mo}(\lambda) = \frac{a-1}{b}$ . Cuando existe poca información a priori sobre  $\lambda$ , entonces la elección  $(a = 2, b = \frac{1}{4})$  suele ser satisfactoria (Scollnik, 1995).

Análogamente una densidad a priori para  $\theta$  de tipo Gamma  $G(c, d)$  parece adecuada:

$$\pi_2(\theta) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \cdot \theta^{c-1} \cdot \exp(-d\theta), \quad \theta > 0, \quad c, d > 0. \quad (8)$$

Consideraremos  $c > 1$ , con media y varianza a priori dadas por  $E(\theta) = \frac{c}{d}$  y  $\text{Var}(\theta) = \frac{c}{d^2}$ . La moda a priori  $\text{Mo}(\theta) = \frac{c-1}{d}$ .

En la literatura actuarial los parámetros  $\lambda$  y  $\theta$  se consideran independientes. Aunque existen numerosos trabajos sobre procedimientos bayesianos para el estudio de la sensibilidad a la hipótesis de independencia entre parámetros (Lavine et al., 1991; Wasserman et al., 1993; Berger and Moreno, 1994) sus aplicaciones son muchísimo menos presentes. En este trabajo proponemos introducir un tipo de dependencia entre los parámetros de riesgo mediante la consideración de la familia Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM), introducido originalmente por Morgenstern (1956).

$$H(x, y) = F(x)G(y)[1 + \alpha(1 - F(x))(1 - G(y))], \quad |\alpha| \leq 1, \quad (9)$$

donde  $F$  y  $G$  son las distribuciones marginales. La correspondiente densidad conjunta correspondiente a (9) viene dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x)g(y)[1 + \alpha(1 - 2F(x))(1 - 2G(y))] \\ &= f(x)g(y) + \alpha[f(x)(2F(x) - 1)][g(y)(2G(y) - 1)]. \end{aligned} \quad (10)$$

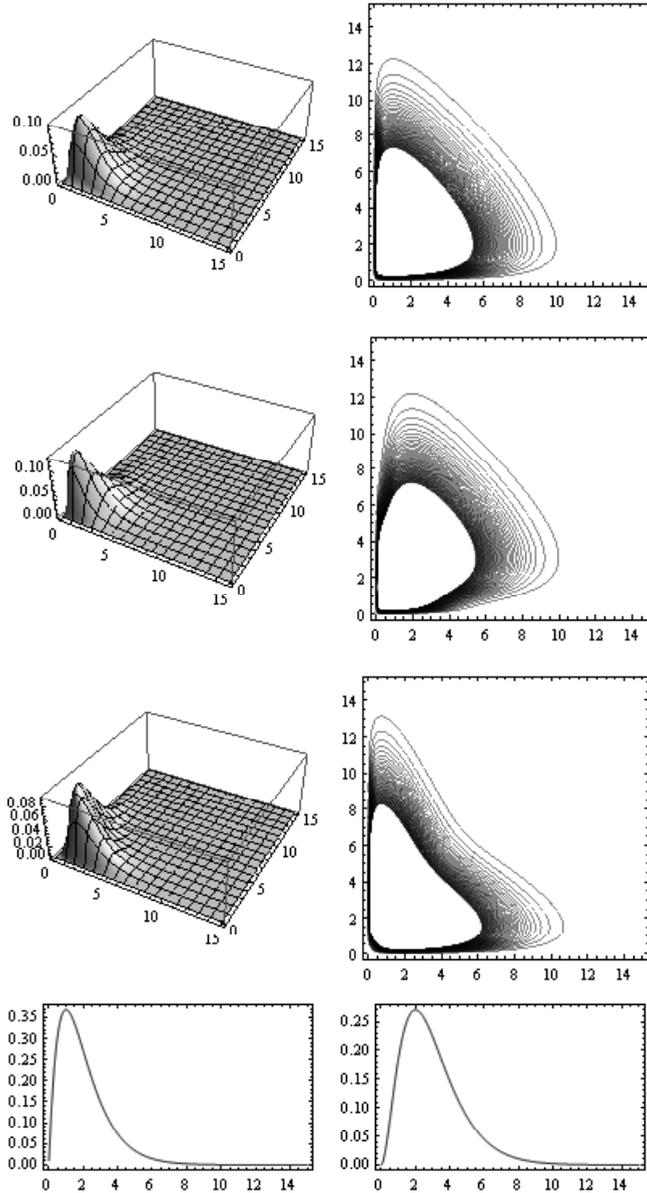
La expresión (10) es una fácil y atractiva forma de introducir dependencia entre parámetros con densidades marginales dadas. Lai (1978) probó que el parámetro  $\alpha$  es directamente proporcional al coeficiente de correlación. Además, el coeficiente de correlación para distribuciones continuas nunca excede de  $\frac{1}{3}$ . Por tanto, podemos decir que introducimos un cierto grado de correlación entre los parámetros de riesgo.

**Figura 1**

Densidades bivariantes en una familia FGM con marginales  $G(2,1)$  y  $G(3,1)$ , respectivamente. Primera fila: Caso de independencia  $\alpha = 0$ .

Segunda fila: máxima dependencia positiva  $\alpha = 1$ .

Tercera fila: máxima dependencia negativa  $\alpha = -1$ . Cuarta fila: marginales



Nuestro interés se centra ahora en obtener los momentos de los productos de potencias de los parámetros, con  $\lambda \sim G(a, b)$ , y  $\theta \sim G(c, d)$ . Siguiendo a D'Este (1981), para cada par de enteros positivos  $n$  y  $m$ ,

$$E(\lambda^n \cdot \theta^m) = E\left(b^n \left(\frac{1}{b}\lambda\right)^n \cdot d^m \cdot \left(\frac{1}{d}\theta\right)^m\right) = b^n d^m E(\xi_1^n \xi_2^m) \quad (11)$$

donde  $\xi_1 = \frac{1}{b}\lambda \sim G(a, 1)$  y  $\xi_2 = \frac{1}{d}\theta \sim G(c, 1)$ .

$$\begin{aligned} E(\lambda^n \cdot \theta^m) &= b^n \cdot d^m \cdot \left[ E(\xi_1^n) E(\xi_2^m) + \alpha \cdot E(\xi_1^n) \left\{ 2 \frac{I(a, n; 1)}{B(a, a+n)} - 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. \times E(\xi_2^m) \left\{ 2 \frac{I(c, m; 1)}{B(c, c+m)} - 1 \right\} \right] \\ &= b^n \cdot d^m \cdot E(\xi_1^n) E(\xi_2^m) \\ &\quad \times \left[ 1 + \alpha \left\{ 2 \frac{I(a, n; 1)}{B(a, a+n)} - 1 \right\} \left\{ 2 \frac{I(c, m; 1)}{B(c, c+m)} - 1 \right\} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $I(v, k; x) = \int_0^x \frac{z^{v-1}}{(1+z)^{2v+k}} dz$  y  $B(v, v+k) = \frac{\Gamma(v)\Gamma(v+k)}{\Gamma(2v+k)}$  y la función  $I(\cdot)$

satisface la recurrencia (para  $k$  positiva):

$$(2v+k)I(v, k+1; 1) = 2^{-(2v+k)} + (v+k)I(v, k; 1).$$

Por tanto,  $I(v, 1; 1) = \frac{1}{v} \cdot 2^{2v+1} + \frac{1}{4} B(v, v)$ .

Entonces,  $2 \frac{I(v, 1; 1)}{B(v, v+1)} - 1 = \frac{1}{v} \cdot 2^{-2v} \cdot \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma(v)\Gamma(v+1)}$ .

En particular para  $n = m = 1$ , de (12) obtenemos

$$E(\lambda \cdot \theta) = a \cdot c \cdot \left[ 1 + \frac{\alpha}{ac} 2^{-2(a+c)} \cdot \frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(2c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a+1)\Gamma(c)\Gamma(c+1)} \right]. \quad (13)$$

Así, la estructura (a priori) de dependencia entre los parámetros de riesgo cuando las a priori se mueven en una clase FGM es obtenida usando el hecho de que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\lambda, \theta) &= E(\lambda \cdot \theta) - E(\lambda) \cdot E(\theta) \\ &= a \cdot c \left[ 1 - \frac{1}{bd} + \frac{\alpha}{ac} 2^{-2(a+c)} \cdot \frac{1}{B(a, a+1)B(c, c+1)} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Corr}(\lambda, \theta) &= \frac{\text{Cov}(\lambda, \theta)}{\sqrt{\text{Var}(\lambda)\text{Var}(\theta)}} \\ &= b \cdot d \cdot \sqrt{a \cdot c} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{bd} + \frac{\alpha}{ac} \cdot \frac{1}{2^{-2(a+c)} \cdot B(a, a+1) \cdot B(c, c+1)} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Así, puesto que  $|\alpha| \leq 1$  y siempre que  $bd \geq 1$  obtenemos que

$$|\text{Corr}(\lambda, \theta)| \leq b \cdot d \cdot \sqrt{a \cdot c} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{bd} + \frac{1}{ac} \cdot \frac{1}{2^{-2(a+c)} \cdot B(a, a+1) \cdot B(c, c+1)} \right]. \quad (16)$$

En particular, cuando  $a = b = c = d = 1$ , se sigue que:

$$|\text{Corr}(\lambda, \theta)| = \frac{|\alpha|}{4} \leq \frac{1}{4}. \quad (17)$$

Por otra parte, también puede medirse la incertidumbre de cada densidad a priori dentro de la FGM considerada, calculando su entropía en el sentido de Shannon (1948).

#### 4. INDEPENDENCIA ENTRE LOS PARÁMETROS DE RIESGO

Sea  $\pi_\alpha(\lambda, \theta) = \pi_1(\lambda) \cdot \pi_2(\theta) + \alpha \cdot [\pi_1(\lambda)(1 - 2F_1(\lambda)) \cdot \pi_2(\theta) \cdot (1 - 2F_2(\theta))]$  una a priori en la familia FGM con  $\pi_1(\lambda) \sim G(a, b)$  y  $\pi_2(\theta) \sim G(c, d)$  marginales fijas, donde  $\alpha = 1(-1)$  representa el mayor (menor) grado de dependencia positiva (negativa) permitida en el modelo.

En De la Horra y Fernández (1995) puede encontrarse un vía simple para comprobar la hipótesis de independencia entre  $\lambda$  y  $\theta$ . Consideremos la clase de densidades a priori

$$\Pi = \Pi_{(\alpha>0)} \cup \Pi_{(\alpha<0)},$$

donde  $\Pi_{(\alpha>0)} = \{\pi(\lambda, \theta) = (1-\varepsilon)\pi_I(\lambda, \theta) + \varepsilon\pi_\alpha(\lambda, \theta), \varepsilon \in [0, 1]\}$ ,

$$\Pi_{(\alpha<0)} = \{\pi(\lambda, \theta) = (1-\varepsilon)\pi_I(\lambda, \theta) + \varepsilon\pi_\alpha(\lambda, \theta), \varepsilon \in [0, 1]\},$$

$\pi_I(\lambda, \theta) = \pi_1(\lambda) \cdot \pi_2(\theta)$  es la a priori obtenida bajo independencia y  $\pi_\alpha(\lambda, \theta)$  en la familia FGM con  $\alpha > 0 (< 0)$  densidades marginales fijadas  $\pi(\lambda)$  y  $\pi(\theta)$ , representando algún grado de dependencia positiva (negativa).

Observemos que el caso  $\alpha = 1$ ,  $\pi_{\alpha=1}(\lambda, \theta)$  coincide con el sistema FGM para dependencia positiva

$$\pi_I(\lambda, \theta) + \varepsilon \cdot \pi_1(\lambda)(1 - 2F_1(\lambda)) \cdot \pi_2(\theta) \cdot (1 - 2F_2(\theta)), \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Lo mismo podemos decir para el caso  $\alpha = -1$ . Puesto que estamos interesados en las implicaciones que tiene la hipótesis de independencia sobre las decisiones a posteriori, enfocamos el problema de la siguiente manera. Observados los datos, supongamos que estamos interesados en las cantidades a posteriori de la forma

$$\iint h(\lambda, \theta) \pi(\lambda, \theta | \mathbf{data}) d\lambda d\theta,$$

cuando  $\pi$  varía en  $\Pi = \Pi_{(\alpha<0)} \cup \Pi_{(\alpha>0)}$ . Entonces, obtener cotas inferiores y superiores de estas cantidades a posteriori sobre la clase  $\Pi$  es equivalente a encontrar

$$\max \left\{ \bar{u}_{(\alpha<0)}, \bar{u}_{(\alpha>0)} \right\},$$

y 
$$\min \left\{ \bar{l}_{(\alpha<0)}, \bar{l}_{(\alpha>0)} \right\}$$

donde 
$$\bar{u}_{(\alpha<0)} = \sup_{\pi \in \Pi_{(\alpha<0)}} \iint h(\lambda, \theta) \pi(\lambda, \theta | \mathbf{data}) d\lambda d\theta, \quad (18)$$

$$\bar{u}_{(\alpha>0)} = \sup_{\pi \in \Pi_{(\alpha>0)}} \iint h(\lambda, \theta) \pi(\lambda, \theta | \mathbf{data}) d\lambda d\theta, \quad (19)$$

$$\bar{l}_{(\alpha<0)} = \inf_{\pi \in \Pi_{(\alpha<0)}} \iint h(\lambda, \theta) \pi(\lambda, \theta | \mathbf{data}) d\lambda d\theta, \quad (20)$$

y

$$\bar{l}_{(\alpha>0)} = \inf_{\pi \in \Pi_{(\alpha>0)}} \iint h(\lambda, \theta) \pi(\lambda, \theta | \mathbf{data}) d\lambda d\theta. \quad (21)$$

Como en De la Horra y Fernández (1995), basta diferenciar respecto a  $\alpha$ , y las anteriores cotas son calculadas mediante las cantidades:

$$\frac{\iint h(\lambda, \theta) \cdot f(s | \lambda, \theta) \cdot \pi_{\alpha=i}(\lambda, \theta) d\lambda d\theta}{\iint f(s | \lambda, \theta) \cdot \pi_{\alpha=i}(\lambda, \theta) d\lambda d\theta}, \quad i = -1, 1, \quad (22)$$

$$\frac{\iint h(\lambda, \theta) \cdot f(s | \lambda, \theta) \cdot \pi_I(\lambda, \theta) d\lambda d\theta}{\iint f(s | \lambda, \theta) \cdot \pi_I(\lambda, \theta) d\lambda d\theta}. \quad (23)$$

Nuestro objetivo consiste en computar cantidades como las anteriores cuando la priori pertenece a una clase  $\Pi$ . En la práctica, por ejemplo, la prima Bayesiana juega un papel muy importante. Seleccionamos por tanto, esta cantidad para cuantificar el papel que puede jugar la hipótesis de independencia en la prima. Cualquier otro criterio, también puede ser utilizado. Por ejemplo, el  $\alpha$ -ésimo percentil es  $\alpha = E(\psi(\lambda, \theta) | \mathbf{data})$ , con  $\psi(\lambda, \theta) = I_{C_\alpha}(\lambda, \theta)$  la función indicatriz sobre  $C_\alpha$ .

Las expresiones (22) y (23) requieren eficientes cálculos numéricos y/o Monte Carlo. En este trabajo, proponemos la utilización software Mathematica<sup>®</sup> que funciona adecuadamente para el tipo de cálculos necesarios.

Observemos que en el modelo colectivo la prima verdadera individual tiene la expresión

$$E(S) = \frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)} \frac{1}{\theta}, \quad (24)$$

por tanto, la prima Bayes se obtendrá como la media a posteriori de (24), es decir

$$\int \frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)} \frac{1}{\theta} \pi_{\alpha}(\lambda, \theta | \text{datos}) d\lambda d\theta \quad (25)$$

La expresión (22) puede ajustarse a las expresiones anteriormente descritas para el estudio de la robustez de la hipótesis de independencia sin más que considerar  $h(\lambda, \theta) = \frac{\lambda + 2}{\lambda(\lambda + 1)} \frac{1}{\theta}$  y por tanto podemos medir cómo afecta la hipótesis de independencia a la prima Bayes.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos visto cómo la distribución Poisson-Lindley puede ser introducida como distribución primaria en un análisis de la pérdida total agregada para el modelo colectivo compuesto, conjuntamente con la posibilidad de estudiar el análisis de sensibilidad a la hipótesis de independencia entre los parámetros de riesgo. Los cálculos necesarios son computacionalmente posibles y con el uso de algún software eficiente para ello, pueden ser realizados en cualquier ordenador personal.

## AGRADECIMIENTOS

Investigación parcialmente financiada por el proyecto SEJ2006-12685 (MEC, España).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Berger, J.O. y Moreno, E. (1994). *Bayesian robustness in bidimensional models: prior independence (with discussion)*. Journal of Statistical Planning and Inference, 40, 161-176.

De la Horra, J. y Fernández, C. (1995). *Sensitivity to prior independence via Farlie-Gumbel-Morgenstern model*. Communications in Statistics: theory and methods, 24, 4, 987-996.

Ghitany, M.E. y Al-Mutairi, D.K. (2009). *Estimation methods for the discrete Poisson-Lindley distribution*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 79, 1-9.

Goovaerts, M.J. y Kaas, R. (1991). *Evaluating compound generalized Poisson distributions recursively*. ASTIN Bulletin 21, 193-197.

Gossiaux, A. y Lemaire, J. (1981) *Methodes d'ajustement de distribution de sinistres*. Bulletin of the Association of Swiss Acturaies 81, 87-95.

Grandell, J. (1997). *Mixed Poisson Processes*. London: Chapman and Hall.

Kozubowski, T.J. y Panoska, A.K. (2005) *A mixed bivariate distribution with exponential and geometric marginals*. Journal of Statistical Planning and Inference, 134, 501-520.

Lai, C.D. (1978). *Morgenstern's Bivariate Distributions and its Applications to Point Processes*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 65, 247-256.

Lavine, M.; Wasserman, L. y Wolpert, R. (1991). *Bayesian inference with specified prior marginals*. Journal of the American Statistical Association, 86, 964-971.

McNeil, A.J.; Frey, R. y Embrechts, P. (2005) Quantitative risk management: concepts, techniques and tools. Oxford: Clarendon Press.

Morgenstern, D. (1956). *Einfache Beispiele zweidimensionaler Verteilungen*. Mitt. Math. Statistik, 8, 234-235.

Nadarajah, S. y Kotz, S. (2006a) *Compound mixed Poisson distribution I*. Scandinavian Actuarial Journal, 3, 141-162.

Nadarajah, S. y Kotz, S. (2006b) *Compound mixed Poisson distribution II*. Scandinavian Actuarial Journal, 3, 163-181.

Nikoloulopoulos, A.K. y Karlis, D. (2008). *On modelling count data: a comparison of some well known discrete distributions*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 78, 437-457

Peters, G.W.; Shevchenko, P.V. y Wüthrich, M.V. (2008). *Dynamic operational risk: modelling dependence and combining different sources of information*. Preprint, CSIRO call number CMIS 2741.

Sankaran, M. (1971). *The discrete Poisson-Lindley distribution*. Biometrics 26, 145-149.

Scollnik, D.P.M. (1995). *Bayesian analysis of two overdispersed Poisson regression models*. Communications in Statistics: Theory and Methods, 24, 11, 2901-2918.

Wasserman, L.; Lavine, M. y Wolpert, R. (1993). *Linearization of Bayesian robustness problems*. Journal of Statistical Planning and Inference, 37, 307-316.

Willmot, G.E. (1987) *The Poisson-Inverse Gaussian distribution as an alternative to the Negative Binomial*. Scandinavian Actuarial Journal, 113-127.



## Ponencia 9

### REVISIÓN DEL TEST DE RACHAS

Iván Iturricastillo Plazaola y J. Iñaki De La Peña Esteban

#### RESUMEN

El Test de rachas es uno de los instrumentos más conocidos para analizar la aleatoriedad de una serie de sucesos sucesivos, aplicado en los estudios financieros y, más concretamente, en los estudios del análisis de la evolución dinámica de la ETTI.

En dicho Test comprobamos que el valor que suele ofrecerse para la media del número de rachas es correcto, sin embargo constatamos que se produce un error para el valor que se ofrece para la varianza de dicho número de rachas. Es un valor inferior al real.

Ese error es fundamental, pues para un nivel de confianza dado, al infravalorarse la varianza de dicho número de rachas, se toman intervalos de confianza menos amplios de los debidos lo que provoca que pueda haber casos que queden fuera de los mismos sin que tuviera que ser así. Obviamente los casos afectados serán los más cercanos a la frontera del intervalo de confianza.

Para ilustrarlo, recalculamos el tamaño, en términos de probabilidad, de los intervalos que ya calcularon Iturricastillo (2007) e Iturricastillo y De La Peña (2009).

Los resultados corregidos muestran que:

1. como es lógico, para una misma distancia con la media, disminuye la probabilidad necesaria del intervalo de confianza para que el mismo recoja la observación realizada, dada la mayor varianza, y

2. como los datos observados en los estudios realizados previamente no estaban en la frontera entre ser rechazados y no ser rechazados, no cambian las conclusiones que se obtuvieron.

## **Palabras clave**

Test de Rachas, Varianza, Intervalos de Confianza, Independencia, ETTI, Hipótesis de las Expectativas Racionales, Inmunización Dinámica.

## **1. INTRODUCCIÓN**

Para establecer una estrategia inmunizadora, es necesaria la realización de hipótesis sobre la evolución futura de los tipos de interés. La versión más simple con expresiones más directas y que ya empleó Redington (1952), estructuran carteras de títulos con una estructura de tipos de interés plana, esto es, con iguales valores de los tipos de interés a corto como a largo plazo. Este caso no es más que una simplificación de la realidad. De hecho, no sólo los tipos de interés son diferentes a corto como a largo plazo, sino que dada una estructura de tipos de interés se puede aplicar una estrategia inmunizadora y, a medida que cambia el tiempo y las condiciones financieras, los tipos de interés toman diferentes valores. En este caso, la inmunización realizada sobre la cartera de inversiones puede no ser óptima y se debería proceder al rebalanceo. Iturricastillo y De La Peña (2003) establecieron una estrategia inmunizadora que permite evitar los rebalanceos continuos en una cartera siempre que los tipos de interés sigan la Hipótesis de las Expectativas Racionales (HER), esto es, mientras los tipos de interés futuros sean los esperados (los tipos implícitos), la cartera permanecerá inmunizada en el plazo que se haya escogido.

Igualmente, Iturricastillo (2007) ha demostrado que siguiendo la HER, los desplazamientos paralelos en la ETTI (Estructura Temporal de Tipos de Interés) se trasladarían a las futuras ETTI de un modo cuasi-paralelo.

Esto hace que, incluso cuando haya un desplazamiento inesperado de la ETTI, podamos mantener la cartera sin rebalances siempre que haya sido paralelo. Dicho de otro modo, sólo cuando haya un desplazamiento inesperado no paralelo se deberá proceder a revisar la cartera.

Por todo ello, Iturricastillo (2007) ha señalado que en función de cuál sea la evolución dinámica de la ETTI, se podrá, o no, establecer una estrategia inmunizadora que no sólo inmunice la cartera ante cambios inmediatos en los tipos de interés en un momento determinado, sino que también la inmunice en el futuro, sin necesidad de realizar continuos rebalances, con los continuos costes que supondrían estos rebalances para el gestor.

Como conclusión, es vital el discernir el modelo de evolución dinámica que sigue la ETTI, pues, dependiendo de su evolución, dependerá que se pueda o no aplicar alguna estrategia de inmunización.

Para comprender la evolución que sigue los valores de la ETTI se puede aplicar el Test de rachas. Este instrumento permite analizar la aleatoriedad de una serie de sucesos sucesivos, y es comúnmente aplicado en los estudios financieros y, más concretamente, en los estudios del análisis de la evolución dinámica de la ETTI.

Como alternativa al Análisis de Componentes Principales, Iturricastillo (2007) ofreció un sistema que ofrece un dato entendible intuitivamente que señala cuál es el porcentaje de los desplazamientos ocurridos en el pasado que han sido debidos a movimientos paralelos.

Dicho trabajo ha sido revisado y completado por Iturricastillo y De La Peña (2009), ofreciendo unos resultados similares.

De todos modos, el hecho de que el desplazamiento sea o no paralelo no muestra por sí sólo la naturaleza de la evolución dinámica de la ETTI. Por ello, Iturricastillo (2007) lo completó con un test de rachas.

Dicho test nos ofrece un resultado muy interesante, al mostrarnos que la HER es compatible con sucesos aleatorios mientras que el suponer

que el tipo de interés presente es la mejor estimación del tipo de interés futuro (lo que suele calificarse como de eficiencia del mercado) parece mostrar una clara dependencia, lo que significa que la HER sería una mejor explicación del comportamiento dinámico de la ETTI.

En el Test de Rachas comprobamos que el valor que suele ofrecerse para la media del número de rachas es correcto, sin embargo constatamos que se produce un error para el valor que se ofrece para la varianza de dicho número de rachas. Es un valor inferior al real.

Ese error es fundamental, pues para un nivel de confianza dado, al infravalorarse la varianza de dicho número de rachas, se toman intervalos de confianza menos amplios de los debidos lo que provoca que pueda haber casos que queden fuera de los mismos sin que tuviera que ser así. Obviamente los casos afectados serán los más cercanos a la frontera del intervalo de confianza.

Dicho test de rachas, de múltiples aplicaciones, es el que se presenta y corrige en este trabajo.

## **2. EL TEST DE RACHAS**

Con el Test de Rachas se pretende averiguar si una serie de sucesos sucesivos son aleatorios o no en base al número de rachas presentes en dicha serie de sucesos sucesivos.

El Test de Rachas puede ser realizado estudiando los sucesos por encima de la mediana y los sucesos por debajo de la misma, como muestra Peña (2001), o bien los sucesos por encima y por debajo de un valor dado, por ejemplo el 0, con lo que estudiamos en dicho caso las rachas de sucesos con valores positivos y de sucesos con valores negativos, como muestran, por ejemplo, Font y Parras (2005) y Carrasco (2004).

Como punto de partida y tomando una serie de datos, algunos de ellos positivos y otros negativos mediante este Test se estudia si los suce-

sivos valores que van tomando son aleatorios o no observando el número de rachas, esto es, el número de grupos de sucesos sucesivos del mismo signo. Si, de hecho, son aleatorios, no será esperable que el número de rachas sea excesivamente reducido ni excesivamente elevado. Si, por el contrario, dicho número fuera así (excesivamente reducido o excesivamente elevado), significaría que habría una dependencia directa o inversa, respectivamente.

Para ello supongamos que tenemos una serie de  $n$  datos entre los cuales  $n_1$  son positivos y  $n_2$  son negativos. Siendo:

$$n = n_1 + n_2$$

También supongamos que dichos datos fueran aleatorios. En dicho caso, la probabilidad de que a un caso negativo le sucediera uno positivo, esto es, la probabilidad de que hubiera un cambio de racha, sería la siguiente:

$$P(\text{cambio de racha / negativo}) = \frac{\text{N}^\circ \text{ de positivos}}{\text{N}^\circ \text{ de casos posibles}} = \frac{n_1}{n_1 + n_2 - 1}$$

Igualmente, la probabilidad de que a un caso positivo le sucediera uno negativo, esto es, la probabilidad de que hubiera un cambio de racha, sería la siguiente:

$$P(\text{cambio de racha / positivo}) = \frac{\text{N}^\circ \text{ de negativos}}{\text{N}^\circ \text{ de casos posibles}} = \frac{n_2}{n_1 + n_2 - 1}$$

Combinando ambas, conseguimos la probabilidad de que a un suceso, del cuál desconocemos el signo, le suceda un cambio de signo, esto es, conseguimos la probabilidad de que haya un cambio de racha tras un suceso cualquiera:

$$P(\text{cambio de racha}) = P(\text{negativo}) \cdot P(\text{cambio de racha / negativo}) + P(\text{positivo}) \cdot P(\text{cambio de racha / positivo})$$

Esto es:

$$P(\text{cambio de racha}) = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \cdot \frac{n_1}{n_1 + n_2 - 1} + \frac{n_1}{n_1 + n_2} \cdot \frac{n_2}{n_1 + n_2 - 1}$$

Lo que resumido resulta ser:

$$P(\text{cambio de racha}) = \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2}{(n_1 + n_2) \cdot (n_1 + n_2 - 1)}$$

Corresponde a la probabilidad de que un suceso suponga un cambio de racha respecto al suceso anterior. Por ello, podría entenderse que la variable aleatoria “cambio de racha para un suceso” sigue una Distribución de Bernoulli en la que la probabilidad de ocurrencia es la anterior, y la denotaremos por  $p$ , y la probabilidad de no ocurrencia (no cambio de racha) es la probabilidad complementaria de la anterior ( $1-p$ ), y la denotaremos por  $q$ .

Denotando por:

$r_i$  : Variable aleatoria cambio de racha en el suceso  $i$ -ésimo

Podemos entender la variable aleatoria:

$R$  : Número de rachas

Como la suma de las siguientes variables aleatorias:

$$R = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \dots + r_n = 1 + r_2 + r_3 + r_4 + \dots + r_n$$

Siguiendo el razonamiento anterior, el primer suceso supondrá el inicio de la primera racha, hecho que no será aleatorio ya que no depende del signo del cuál sea, y en el caso del resto de los sucesos el número de rachas irá aumentando siguiendo la distribución señalada.

Dicho de otro modo: la variable aleatoria número de rachas, o  $R$ , será la suma de una constante –la unidad- y de  $n-1$  variables que siguen una Distribución de Bernoulli.

Es bien conocido que la suma de variables que siguen la distribución de Bernoulli genera una variable aleatoria que sigue una binomial. Igualmente es conocido que la binomial, cuando el número de ele-

mentos es lo suficientemente elevado, seguirá aproximadamente una distribución normal.

Siguiendo este razonamiento, el Test de Rachas se basa en que, caso de ser aleatorios los sucesivos sucesos, el número de Rachas seguirá una distribución normal con media ( $m$ ) y varianza ( $\sigma^2$ ):

$$m = 1 + \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \quad (\text{fórmula 1})$$

$$\sigma^2 = \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot [2 \cdot n_1 \cdot n_2 - n_1 - n_2]}{(n_1 + n_2)^2 \cdot (n_1 + n_2 - 1)} \quad (\text{fórmula 2})$$

### 3. CORRECCIÓN DEL TEST DE RACHAS

Como mostraremos a continuación, existe un error en la expresión que señala la varianza de la distribución normal que sigue el número de Rachas, caso de ser independientes los sucesivos sucesos.

La media de la distribución normal generada a partir de una distribución binomial es el producto de la probabilidad  $p$  y del número de variables tipo Bernoulli que la misma contiene,  $n-1$  casos aleatorios en nuestro caso. Para el ejemplo que tratamos, como el primer caso es seguro, la media resulta ser la suma de una unidad y el producto anterior:

$$m = 1 + (n_1 + n_2 - 1) \cdot \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2}{(n_1 + n_2) \cdot (n_1 + n_2 - 1)} = 1 + \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2}{(n_1 + n_2)}$$

Expresión que coincide con la que se encuentra en la bibliografía habitual, recogida anteriormente como fórmula 1.

La varianza de dicha distribución es el producto de la probabilidad  $p$ , de la probabilidad complementaria  $1-p$  y del número de variables tipo Bernoulli que la misma contiene, en nuestro caso  $n-1$  casos aleatorios. Igualmente, como el primer caso es seguro, la varianza resulta

ser la varianza señalada en el producto anterior, puesto que el caso no aleatorio no añade ninguna varianza (simplemente aumenta la media y los distintos valores en una cifra fija):

$$s^2 = (n_1 + n_2 - 1) \cdot \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2}{(n_1 + n_2) \cdot (n_1 + n_2 - 1)} \cdot \left[ 1 - \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2}{(n_1 + n_2) \cdot (n_1 + n_2 - 1)} \right]$$

Operando, obtenemos que:

$$s^2 = \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot [(n_1 + n_2) \cdot (n_1 + n_2 - 1) - 2 \cdot n_1 \cdot n_2]}{(n_1 + n_2)^2 \cdot (n_1 + n_2 - 1)}$$

O, lo que es lo mismo:

$$s^2 = \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot [n_1^2 + n_1 \cdot n_2 - n_1 + n_1 \cdot n_2 + n_2^2 - n_2 - 2 \cdot n_1 \cdot n_2]}{(n_1 + n_2)^2 \cdot (n_1 + n_2 - 1)}$$

Lo que, finalmente nos ofrece la siguiente expresión:

$$s^2 = \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot [n_1^2 + n_2^2 - n_1 - n_2]}{(n_1 + n_2)^2 \cdot (n_1 + n_2 - 1)} \quad (\text{fórmula 3})$$

Expresión que no coincide con la que se encuentra en la bibliografía habitual, recogida anteriormente como fórmula 2.

La diferencia entre ambas se encuentra en los sumandos del corchete del numerador.

En la fórmula de la bibliografía estos sumandos suponen:

$$\text{Sumandos fórmula 2} = 2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

En la fórmula correcta estos sumandos suponen:

$$\text{Sumandos fórmula 3} = n_1^2 + n_2^2$$

En principio, el número de sucesos positivos no tiene por qué ser igual al número de sucesos negativos. En dicho caso, podríamos entender que:

$$n_1 = n_2 + h$$

Siéndonos indiferente si  $h$  es positivo o negativo, esto es, siendo irrelevante si es mayor el número de sucesos positivos o el de los negativos.

Desarrollando los sumandos de la fórmula 3, obtenemos que:

$$\text{Sumandos fórmula 3} = (n_2 + h)^2 + n_2^2 = n_2^2 + 2 \cdot n_2 \cdot h + h^2 + n_2^2 = 2 \cdot n_2^2 + 2 \cdot n_2 \cdot h + h^2$$

Esto es:

$$\text{Sumandos fórmula 3} = 2 \cdot n_2 \cdot (n_2 + h) + h^2 = 2 \cdot n_2 \cdot n_1 + h^2$$

Y, sustituyendo:

$$\text{Sumandos fórmula 3} = \text{Sumandos fórmula 2} + h^2$$

En la siguiente reformulación de la fórmula correcta, recogemos separadamente, con dicha notación, la diferencia que faltaba en la formulación habitual:

$$s^2 = \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot [2 \cdot n_1 \cdot n_2 - n_1 - n_2]}{(n_1 + n_2)^2 \cdot (n_1 + n_2 - 1)} + \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot h^2}{(n_1 + n_2)^2 \cdot (n_1 + n_2 - 1)}$$

O, lo que es lo mismo:

$$s^2 = \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot [2 \cdot n_1 \cdot n_2 - n_1 - n_2]}{(n_1 + n_2)^2 \cdot (n_1 + n_2 - 1)} + \frac{2 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot (n_2 - n_1)^2}{(n_1 + n_2)^2 \cdot (n_1 + n_2 - 1)}$$

Todo lo anterior significa que el valor de la varianza será mayor que el valor que ofrece la expresión incorrecta, lo que provoca que los intervalos de confianza en los que se basa el Test de Rachas debieran haberse considerado mayores de lo que se venían considerando. De todos modos, a simple vista parece que la diferencia no será excesiva, salvo en los casos en los cuales la diferencia entre los casos positivos y los negativos sea muy grande.

Todo lo anterior significa que, en los estudios realizados con la expresión habitual, en los casos límite, -al haberse reducido el tamaño

de los intervalos que debían haberse considerado para el nivel de confianza que se considerase adecuado-, se ha podido rechazar la independencia cuando no debía haber sido rechazada.

Para corroborarlo, compararemos en el siguiente apartado los resultados ofrecidos por Iturricastillo (2007) y por Iturricastillo y De La Peña (2009) con los que debían haber sido ofrecidos.

Puede ser que esta diferencia no se haya tenido en cuenta en la bibliografía habitual del Test de Rachas debido a que, según Peña (2001), se realiza el análisis dividiendo los sucesos a la altura de la mediana, esto es, dividiendo en dos partes iguales la muestra, lo que hace que, en dicho caso,  $h$  valga 0.

#### **4. COMPARATIVA DE RESULTADOS**

Como se ha mostrado anteriormente, en los Test de Rachas realizados en el pasado, al tomarse un valor de la varianza inferior al que debiera haberse tomado, puede haberse rechazado la independencia en casos límite o cercanos a la frontera en los cuales dicho rechazo no debiera haberse hecho.

En un estudio de inferencia habitual se establece cuál es el nivel de confianza (normalmente de entre un 1% a un 5%), el cuál, supuesto que la hipótesis a ser analizada fuera cierta, señalaría el porcentaje de casos en los cuales, aún siendo cierta dicha hipótesis, la daríamos por falsa.

En el Test de Rachas, como se está analizando si hay independencia, dicha probabilidad se reparte tanto entre los casos en los que el número de rachas es excesivamente reducido (lo que implicaría una dependencia directa) como entre los casos en los que el número de rachas es excesivamente elevado (lo que implicaría una dependencia inversa).

En los estudios realizados por Iturricastillo (2007) y por Iturricastillo y De La Peña (2009) se ha procedido al revés. Dado, por un lado, el

número de rachas observadas y dados, por otro lado, los valores de la media y de la varianza / desviación estándar que se deducen de los datos observados, se calcula la probabilidad mínima que debe incluir el intervalo de confianza para incluir el dato observado. De este modo, *a sensu contrario*, se puede calcular el nivel de confianza que debiéramos haber establecido para rechazar la hipótesis nula. De esta forma, si la probabilidad de dichos intervalos supera el 95% ó el 99% (según el nivel de confianza), sería cuando se rechazase la independencia.

#### **4.1. Iturricastillo (2007)**

Iturricastillo (2007) analizó los cambios en el MIBOR / EURIBOR con datos basados en la página web del Banco de España ([www.bde.es](http://www.bde.es)), tomando en consideración para el estudio únicamente los tipos de interés a 3, 6, 9 y 12 meses para el primer día de cada trimestre y para los 68 periodos trimestrales que van desde enero de 1988 hasta enero de 2005.

Dicho análisis fue realizado tanto para la HER como para la Hipótesis Cándida / de eficiencia de los mercados, tanto de un modo global como para los plazos a 3, 6 y 9 meses (al ser imposible hacer el de 12 meses bajo la HER) –plazos 1, 2 y 3-.

En las siguientes dos tablas se recoge la probabilidad necesaria para incluir el dato observado en los diferentes intervalos tanto con la formulación correcta de la varianza como con la formulación incorrecta (con la que se venía siguiendo hasta el momento) y para los distintos análisis que se realizaron: global y a plazos (1; 2 y plazo 3).

**TABLA 1**  
**Probabilidad necesaria para inclusión del dato: global**

		( $\sigma^2$ ) Correcta	( $\sigma^2$ ) Incorrecta
		Probabilidad necesaria para incluir el dato observado en el intervalo	Probabilidad necesaria para incluir el dato observado en el intervalo
HER	Global	41,97649%	49,06157%
H Cándida	Global	99,32575%	99,69499%

**TABLA 2**  
**Probabilidad necesaria para inclusión del dato: plazos**

		( $\sigma^2$ ) Correcta	( $\sigma^2$ ) Incorrecta
		Probabilidad necesaria para incluir el dato observado en el intervalo	Probabilidad necesaria para incluir el dato observado en el intervalo
HER	Plazo 1	72,81590%	88,93818%
HER	Plazo 2	4,64225%	5,55300%
HER	Plazo 3	72,41565%	77,53487%
H Cándida	Plazo 1	99,68661%	99,87641%
H Cándida	Plazo 2	99,86628%	99,93172%
H Cándida	Plazo 3	99,32575%	99,69490%

Al realizar esta comparación podemos observar que:

- i) La probabilidad necesaria para incluir el dato observado se reduce. Dado que aumenta la varianza, no podía ser de otro modo.
- ii) En el caso de la Hipótesis Cándida, esto es, en el caso de suponer que el tipo de interés presente es la mejor estimación del tipo de interés futuro, sigue siendo claro el rechazo de la independencia de la serie. Esto es, se puede rechazar que la eficiencia del mercado, tantas veces argüida, sea real.
- iii) Para el caso de la Hipótesis de las Expectativas Racionales es aún más claro que no puede rechazarse la independencia de la serie. Esto es, en principio es razonable afirmar que la HER define razonablemente la dinámica de la ETTI.

## 4.2. Iturricastillo y De La Peña (2009)

Iturricastillo y De La Peña (2009) han analizado los datos de final de mes del Euribor a 1, 2, 3, ..., 11 y 12 meses, desde su nacimiento a finales de 1998 hasta diciembre de 2008. Bajo la Hipótesis Cándida se pueden realizar 12 análisis, bajo la HER sólo 11.

En la siguiente tabla 3 se recoge el análisis para la Hipótesis Cándida:

**TABLA 3**  
**Probabilidad para inclusión del dato según hipótesis cándida**

	( $\sigma^2$ ) Correcta	( $\sigma^2$ ) Incorrecta
Plazo del Tipo de interés (en meses)	Amplitud (en probabilidad) del intervalo para incluir el dato observado	Amplitud (en probabilidad) del intervalo para incluir el dato observado
1	98,81937993%	98,85660667%
2	99,98971639%	99,99178131%
3	99,94822268%	99,95917775%
4	99,99812053%	99,99892350%
5	99,99446317%	99,99698027%
6	99,99257247%	99,99632291%
7	99,99257247%	99,99632291%
8	99,99918849%	99,99955677%
9	99,95014418%	99,96849833%
10	99,93729464%	99,95326246%
11	99,81588745%	99,87317707%
12	97,96311864%	98,23662794%

En esta comparación observamos que:

- i) Como no podía ser de otro modo, la probabilidad necesaria para incluir el dato observado se reduce, dado que aumenta la varianza,
- ii) Sigue siendo claro el rechazo de la independencia de la serie. Esto es, se puede rechazar que la eficiencia del mercado, tantas veces argüida, sea cierta.

En la siguiente tabla se recoge el análisis para la HER:

**TABLA 4**  
**Probabilidad para inclusión del dato según Her**

Plazo del Tipo de interés (en meses)	( $\sigma^2$ ) Correcta	( $\sigma^2$ ) Incorrecta
	Amplitud (en probabilidad) del intervalo para incluir el dato observado	Amplitud (en probabilidad) del intervalo para incluir el dato observado
1	42,25240010%	59,77957704%
2	47,20407511%	62,42706861%
3	62,75219880%	70,01504779%
4	39,53821040%	42,58302315%
5	53,86671029%	55,41243982%
6	19,55049050%	19,99753087%
7	24,01097573%	24,67755371%
8	19,55049050%	19,99753087%
9	8,75937772%	8,84868983%
10	29,52468570%	29,55971942%
11	28,84291849%	28,85498977%

Para esta Tabla 4 observamos que:

- i) La probabilidad necesaria para incluir el dato observado se reduce. Dado que aumenta la varianza, no podía ser de otro modo.
- ii) Al reducirse las probabilidades necesarias para incluir el dato observado en los intervalos de confianza, es aún más claro que no puede rechazarse la independencia de la serie. Esto es, en principio es razonable afirmar que la HER define razonablemente la dinámica de la ETTI.
- iii) Parece claro que en los plazos más largos es más evidente que la dinámica de la ETTI se ajusta a la HER, siendo clave la evolución de la ETTI en los plazos más largos para la estrategia de inmunización propuesta por Iturricastillo y De La Peña (2003) y desarrollado por Iturricastillo (2007), dado que en la misma se establece una congruencia absoluta en el corto plazo.

## 5. CONCLUSIONES

- a) El Test de Rachas resulta una herramienta útil para analizar la independencia de una serie de datos sucesivos. Dicho análisis es, por ejemplo, clave para alcanzar una mayor comprensión de las finanzas.
- b) En el Test de Rachas presentado desde sus principios teóricos más básicos, se encuentra un error que se reproduce en todos los manuales consultados y que debiera ser corregido. Puede ser que esta diferencia no se haya tenido en cuenta en la bibliografía habitual del Test de Rachas debido a que, según Peña (2001), se realiza el análisis dividiendo los sucesos a la altura de la mediana, esto es, dividiendo en dos partes iguales la muestra, lo que hace que, en dicho caso,  $h$  valga 0, sin embargo cuando se divide en función de un límite lógico y no meramente estadístico, como, por ejemplo, en función de si sube o cae una determinada variable, se alcanzan expresiones diferentes que producen resultados y conclusiones diferentes. Debiera, por lo tanto, al menos matizarse.
- c) Con la corrección apuntada en el presente trabajo y para aquellos estudios realizados en el pasado en los que se haya rechazado la independencia por una pequeña diferencia, se puede dar el caso del no rechazo. De todos modos, ante un caso que esté en el límite entre el rechazo y el no rechazo, en valores cercanos a la frontera, siempre debe optarse por la prudencia y buscar más datos.
- d) En los estudios realizados por Iturricastillo (2007) y por Iturricastillo y De La Peña (2009), tras realizar dicha corrección, no se han producido cambios en las conclusiones originales ya que, mientras el rechazo de la independencia en el caso de la Hipótesis de Eficiencia del Mercado era realizado por un amplio margen, el no rechazo de la independencia en el caso de la Hipótesis de Expectativas Racionales era también realizado por un amplio margen.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carrasco Arroyo, Salvador (2004): “*Análisis de Datos en Economía.*” *Aptdo: “Otros Contrastes No Paramétricos.”* Universidad de Valencia. Disponible en: <http://www.uv.es/carrascs/>

Font, Elisa y Parras Guijosa, Luis (2005) “*Bioestadística: Métodos y Aplicaciones.*” *Aptdo: “12.4. Aleatoriedad de una muestra: Test de rachas.”* Universidad de Málaga, Facultad de Medicina. Málaga.

Iturricastillo y De La Peña (2009): “*Aportaciones al Análisis Empírico de la ETTI.*” VIº EFSI: Encuentro Iberoamericano de Finanzas y Sistemas de Información. Lisboa.

Iturricastillo Plazaola, Iván (2007): “*Medición y gestión de riesgos en las entidades financieras a través de la inmunización del riesgo de interés.*” Tesis Doctoral. Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea. Departamento de Economía Financiera I / Finantza Ekonomia I Saila. Bilbao.

Iturricastillo Plazaola, Iván y De La Peña Esteban, J. Iñaki (2003): “*The Rebalancing Issue In The Immunized Portfolios By The Horizon Matching.*” 6th Italian-Spanish Conference On Financial Mathematics. Trieste, Italy, July, 1-5, 2003. Pp. II-399 - II-421.

Peña Sánchez de Rivera, Daniel (2001): “*Fundamentos de Estadística.*” Alianza Editorial. Madrid. 2001.

Redington, F.M. (1952). “*Review of the principles of Life-Office Valuations.*” The Journal of the Institute of Actuaries, nº 78, 1.952, London. pp- 286 - 340

## Ponencia 10

### BAYES PREMIUM IN A COMPOUND GEOMETRIC MODEL

J. M. Pérez-Sánchez, E. Gómez-Déniz, A. Hernández-Bastida,

#### ABSTRACT

On the problem of calculating statistical actuarial premiums, best estimate of the true individual premium is the Bayes premium. This paper identifies the Bayes premium into a Compound Risk model by using a geometric distribution as primary distribution and an exponential one as secondary distribution.

**Key Words:** Compound Risk Model; Premium calculation; Geometric distribution; Exponential distribution; Bayes Premium.

#### 1. INTRODUCTION

The Collective Risk Model is described by a frequency distribution for the number of claims  $K$  and a sequence of independent and identically distributed random variables representing the size of the single claims  $X_i$ . Number of claims  $K$  and severities  $X_i$  are assumed to be independent. Note that the independence assumed here is conditional on distribution parameters. There is an extensive literature on modeling the risk process, see e.g. McNeil et al. (2005).

Estimation of the annual loss distribution by modeling frequency and severity of losses is a well known actuarial technique. It is also used for modeling solvency requirements in the insurance industry; see e.g. Sandström, A. (2006) and Wüthrich, M.V. (2006).

The aggregate loss  $S$  is the sum of the individual claim size, i.e.

$$S = \sum_{i=1}^K X_i \text{ for } K > 0, \text{ and } S = 0 \text{ for } K = 0.$$

A modeling of the collective risk model, with little application in the literature, is the one that consists of considering that the primary distribution, that is to say the distribution of  $K$ , follows a Geometric distribution and the secondary distribution, in our case the distribution of the severity of the claims, it is an Exponential distribution. A set of interesting results on the sum of random variables with an exponential distribution and a random number of summands is presented in Kozubowski and Panoska (2005). Furthermore, we can find a comprehensive collection of approximate forms for the compound mixed Poisson distribution in Nadarajah and Kotz (2006a; 2006b). Hernández-Bastida et al. (2009) considered a Poisson distribution for the number of claims in the collective risk model. From the Bayesian point of view, an unifying survey of models in different areas of actuarial mathematics is presented in Schmidt (1998).

Overdispersion is possible in those cases in which the variance of the number of claims exceeds the average, given the respective assumed distribution. This has led to the consideration of alternative distributions to Geometric or Poisson distributions in modeling the distribution of the random variable  $K$ ; specially the mixed Poisson distributions in which the overdispersion takes place, see for example Grandell (1997) or Nikoloulopoulos and Karlis (2008); among others.

The aim of this work is to determinate the Bayes Premium in the compound geometric model proposed above. For a review of the Premium calculation principles the lector is remitted to the papers of Gerber (1979), Goovaerts and De Vylder (1979), Heilmann (1988), Hürlimann (1994), Rolski et al (1999), Young (2004) and Klugman et al (2004), among others. In this sense, this paper presents an explicit calculation of the Bayes Premium, without using linear approximations (see Klugman (1992), p. 64) and always under the assumption of a collective risk model.

$$\text{From now, } {}_pF_q \left[ \{a_1, a_2, \dots, a_p\}; \{b_1, b_2, \dots, b_q\}; z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_k}{\prod_{j=1}^q (b_j)_k} \frac{z^k}{k!}$$

represents the Gaussian hypergeometric function, and

$(\alpha)_j = \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + j - 1)$  for  $j \geq 1$ ,  $(\alpha)_0 = 1$  is the Pochhammer's symbol. The expression is absolutely convergent if  $p \leq q$ . If  $p = q + 1$ , then it converges if  $|z| < 1$  (see Yakubovich and Luchko, 1994; Mathai, 1993 or <http://functions.wolfram.com>).

The paper is organized as follows. Section 2 describes the compound collective model by presenting the likelihood function, the marginal and the posterior distributions. Section 3 addresses the analysis of the risk, collective and Bayes premiums. Last section is devoted to a discussion of the results and conclusions.

## 2. THE MODEL

We analyze the compound collective model from these assumptions (GE in advanced): The numbers of claims follow a Geometric distribution with parameter  $\theta_1 \in (0, 1)$ ,  $Ge(\theta_1)$ , with probability function  $P[K = k | \theta_1] = \theta_1 (1 - \theta_1)^k$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $E[K] = (1 - \theta_1)/\theta_1$ ;  $\text{Var}[K] = (1 - \theta_1)/\theta_1^2$  and moments generating function  $M_1(t, \theta_1) = \theta_1 / (1 - \theta_1 e^t)$ . Observe that this distribution is overdispersed, i.e.  $\text{Var}(K) > E(K)$ .

The severity follows an Exponential distribution with parameter  $\theta_2 > 0$ ,  $\text{Exp}(\theta_2)$ , with density function  $f(x | \theta_2) = \theta_2 e^{-\theta_2 x}$  and  $x > 0$ ;  $E[X] = \frac{1}{\theta_2}$ ;  $\text{Var}[X] = \frac{1}{\theta_2^2}$  and moments generating function  $M_2(t, \theta_2) = \frac{\theta_2}{\theta_2 - t}$ .

### Proposition 1

For the GE model, the density function of total cost  $S$  is given by

$$f_{GE}(s | \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \theta_1(1-\theta_1)\theta_2 e^{-\theta_1\theta_2 s}; & s > 0 \\ \theta_1; & s = 0 \end{cases}$$

### Proof:

$$\begin{aligned} f_{GE}(s | \theta_1, \theta_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} P[K=k] f^{k*}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_1(1-\theta_1)^k \frac{\theta_2^k e^{-\theta_2 s} s^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \theta_1(1-\theta_1)\theta_2 e^{-\theta_2 s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_2 s(1-\theta_1)]^{k-1}}{(k-1)!} = \theta_1(1-\theta_1)\theta_2 e^{-\theta_2 s} e^{\theta_2 s(1-\theta_1)} \\ &= \theta_1(1-\theta_1)\theta_2 e^{-\theta_2 s \theta_1}. \end{aligned}$$

For the case  $s = 0$ , it is straightforward. □

We consider following prior distributions or structure functions for  $\theta_1$  and  $\theta_2$ :

- $\pi_{10}(\theta_1)$  is a Beta distribution with parameters  $c$  and  $d$ ,  $Be(c, d)$ ;

$$\text{so, } \pi_{10}(\theta_1) = \frac{1}{B(c, d)} \theta_1^{c-1} (1-\theta_1)^{d-1};$$

$$\text{with } B(c, d) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(c+d)}; \theta_1 \in [0, 1];$$

$c$  and  $d$  are positive real numbers;

$$E[\theta_1] = \frac{c}{c+d}; \text{ and } \text{Var}[\theta_1] = \frac{cd}{(c+d)^2(c+d+1)}.$$

- $\pi_{01}(\theta_2)$  is a Gamma distribution with parameters  $a$  and  $b$ ,  $Ga(a, b)$ ;

$$\text{so, } \pi_{01}(\theta_2) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta_2^{a-1} e^{-b\theta_2}; \text{ with } \theta_2,$$

$$a \text{ and } b \text{ positive real numbers, } E[\theta_2] = \frac{a}{b}; \text{ Var}[\theta_2] = \frac{a}{b^2}$$

$$\text{and Mode}[\theta_2] = \frac{a-1}{b}, \text{ for } a > 1.$$

- If parameters are independent, the bidimensional prior distribution is given by  $\pi_0(\theta_1, \theta_2) = \pi_{10}(\theta_1)\pi_{01}(\theta_2)$ .

**Remark 1** For obtaining the above result is required to assume that  $a > 1$ . This assumption ensures the existence of the first time inverse moment from a  $\text{Ga}(a, b)$  distribution.

Next Lemma will be useful for future operations.

**Lemma 1** The following equality is satisfied:

If we denote  $I(r, s, u, v, s) \equiv \int_{\theta_1=0}^1 \int_{\theta_2=0}^{\infty} \theta_1^r (1-\theta_1)^s \theta_2^u e^{-v\theta_2} e^{-\theta_2 S \theta_1} \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_2 d\theta_1$ ,

then,

$$I(r, s, u, v, s) = \left( \frac{B(c+r, d+s)\Gamma(a+u)}{B(c, d)\Gamma(a)b^u(v+1)^{a+u}} \right) F_1 \left( \{c+r, a+u\}; \{c+d+r+s\}; \frac{-s}{b(v+1)} \right).$$

**Proof:**

$$\begin{aligned} I(r, s, u, v, s) &= \frac{b^a}{B(c, d)\Gamma(a)} \int_{\theta_2=0}^{\infty} \theta_2^{a+u-1} e^{-b(v+1)\theta_2} d\theta_2 \int_{\theta_1=0}^1 \theta_1^{c+r-1} (1-\theta_1)^{d+s-1} e^{-\theta_2 S \theta_1} d\theta_1 \\ &= \frac{b^a B(c+r, d+s)}{B(c, d)\Gamma(a)} \int_{\theta_2=0}^{\infty} \theta_2^{a+u-1} e^{-b(v+1)\theta_2} \\ &\quad \times \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+r+j)\Gamma(c+d+r+s)(-\theta_2)^j}{\Gamma(c+d+r+s+j)\Gamma(c+r)j!} \right] d\theta_2 \\ &= \frac{b^a B(c+r, d+s)}{B(c, d)\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+r+j)\Gamma(c+d+r+s)(-s)^j}{\Gamma(c+d+r+s+j)\Gamma(c+r)j!} \\ &\quad \times \int_{\theta_2=0}^{\infty} \theta_2^{a+u+j-1} e^{-b(v+1)\theta_2} d\theta_2 \\ &= \frac{b^a B(c+r, d+s)}{B(c, d)\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+r+j)\Gamma(c+d+r+s)(-s)^j}{\Gamma(c+d+r+s+j)\Gamma(c+r)j!} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(a+u+j)}{b^{a+u+j}(v+1)^{a+u+j}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^a B(c+r, d+s) \Gamma(a+u)}{b^{a+u} B(c, d) \Gamma(a) (v+1)^{a+u}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c+r+j) \Gamma(a+u+j)}{\Gamma(c+d+r+s+j)} \frac{\Gamma(a+u)}{\Gamma(c+d+r+s)} \left( \frac{-s}{b(v+1)} \right)^j \\
&= \frac{B(c+r, d+s) \Gamma(a+u)}{b^u B(c, d) \Gamma(a) (v+1)^{a+u}} {}_2F_1 \left( \{c+r; a+u\}; \{c+d+r+s\}; \frac{-s}{b(v+1)} \right).
\end{aligned}$$

□

**Proposition 2** For the GE model, the marginal distribution is given by

$$m_{GE}(s | \pi_0) = \begin{cases} \frac{acd}{b(c+d)(c+d+1)} {}_2F_1 \left( \{c+1; a+1\}; \{c+d+2\}; \frac{-s}{b} \right); & s > 0 \\ \frac{c}{c+d}; & s = 0 \end{cases}$$

**Proof:**

$$m_{GE}(s | \pi_0) = \int_{\theta_2} \int_{\theta_1} \theta_1 (1-\theta_1) \theta_2 e^{-\theta_1 \theta_2 s} \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_2 d\theta_1 = I(1, 1, 1, 0, s),$$

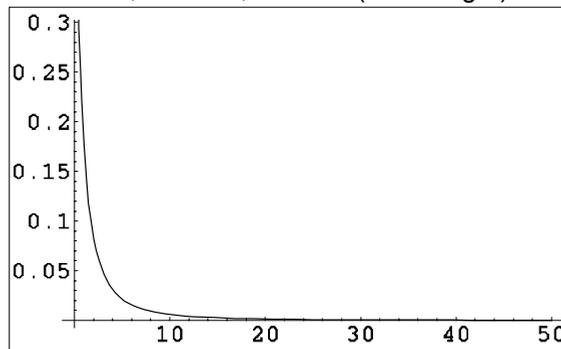
and result is obtained by making simple operations. The case  $s = 0$  is straightforward.

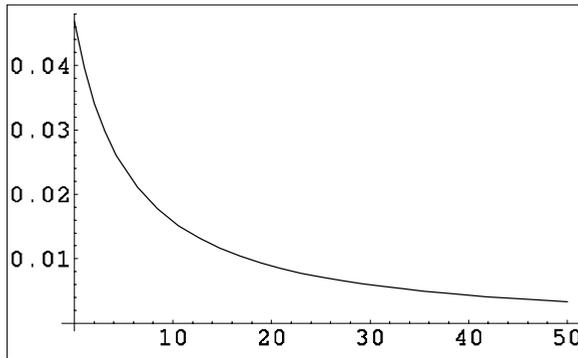
For illustration purposes, figure 1 shows a plot for the marginal distribution with the specified parameters.

□

**Figure 1**

Marginal distribution with  $a = 3$ ;  $b = 1$ ;  $c = 1.5$ ;  $d = 3$  (on the left) and  $a = 3$ ;  $b = 1$ ;  $c = 0.5$ ;  $d = 0$  (on the right).





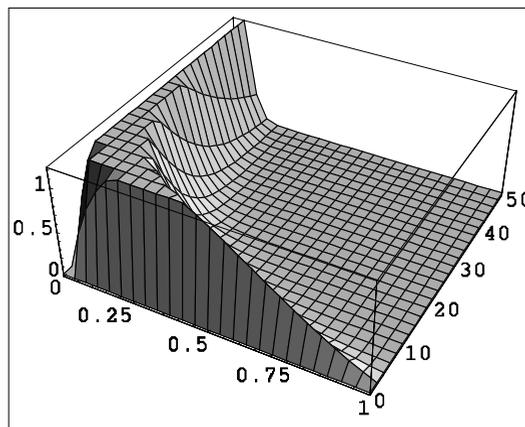
**Proposition 3** For the GE model, the posterior distribution is

$$\pi_0(\theta_1, \theta_2 | s) = \frac{f_{GE}(s | \theta_1, \theta_2) \pi_0(\theta_1, \theta_2)}{m_{GE}(s | \pi_0)}$$

**Proof:** It is straightforward. □

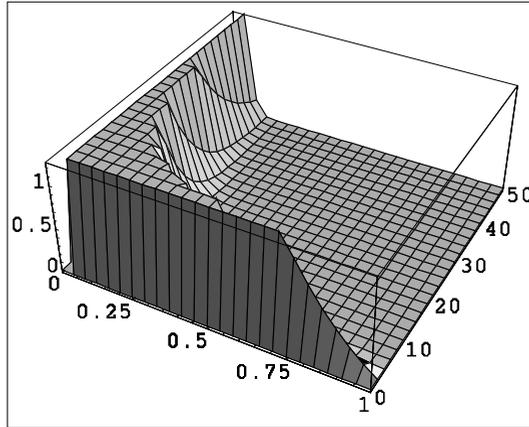
**Figure 2**

shows the posterior distribution for the two sets of parameter considered in the previous figure and considering that  $s=1$ .



**Figure 2**

Posterior distribution with  $a = 3; b = 1; c = 1.5; d = 3; s = 1$  (on the left) and  $a = 3; b = 1; c = 0.5; d = \emptyset; s = 1$  (on the right).



### 3. THE BAYES PREMIUM

#### Theorem 1.

For the GE model, the Risk Premium is  $P_{GE} = \frac{1-\theta_1}{\theta_1} \frac{1}{\theta_2} = E[K]E[S_i]$ .

**Proof:** It is straightforward. □

#### Theorem 2

For the GE model, the Collective Premium is  $P'_{GE} [\pi_0(\theta_1, \theta_2)] = \frac{d}{c-1} \frac{b}{a-1}$ ,

with  $a > 1$

**Proof:** It is straightforward. □

#### Corollary 1

(i) If we suppose that  $\theta_1$  is constant (and  $\theta_2$  follows a  $Ga(a, b)$ ) then,

$$P'_{GE} [\pi_{01}(\theta_1, \theta_2)] = \frac{1-\theta_1}{\theta_1} \frac{b}{a-1} = \frac{E[K]}{\text{Mode}[\theta_2]}, \text{ if } a > 1.1$$

(ii) If we suppose that  $\theta_2$  is constant (and  $\theta_1$  follows a  $\mathcal{B}(c, d)$ ) then,

$$P'_{GE} [\pi_{10}(\theta_1, \theta_2)] = \frac{d}{c-1} \frac{1}{\theta_2}.$$

**Proof:** It is straightforward. □

### Theorem 3

*For the GE the Bayes Premium is*

$$P^*_{GE} [\pi_0(\theta_1, \theta_2 | s)] = \begin{cases} \frac{b(d+1)}{ac} \frac{{}_2F_1\left(\{c; a\}; \{c+d+2\}; \frac{-s}{b}\right)}{{}_2F_1\left(\{c+1; a+1\}; \{c+d+2\}; \frac{-s}{b}\right)}; & s > 0 \\ \frac{bd}{c(a-1)}; & s = 0 \end{cases}$$

**Proof:**

$$\begin{aligned} P^*_{GE} [\pi_0(\theta_1, \theta_2 | s)] &= \int \int_{\theta_1 \theta_2} \frac{1-\theta_1}{\theta_1} \frac{1}{\theta_2} \pi_0(\theta_1, \theta_2 | s) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \frac{1}{m(s | \pi_0)} \int \int_{\theta_1 \theta_2} \frac{1-\theta_1}{\theta_1} \frac{1}{\theta_2} \theta_1 (1-\theta_1) \theta_2 e^{-s\theta_1 \theta_2} \pi_0(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \frac{I(0; 2; 0; 0; s)}{m(s | \pi_0)}, \end{aligned}$$

and result is obtaining by making simple operations. The case  $s = 0$  is straightforward. □

**Table 1**  
Bayes Premiums for the two sets of hyperparameters

s	Premiums <sub>1</sub>	Premiums <sub>2</sub>
0.1	0.964	20.952
0.2	1.038	21.235
0.3	1.112	21.517
0.4	1.186	21.796
0.5	1.259	22.075
0.6	1.332	22.351
0.7	1.405	22.627
0.8	1.477	22.901
0.9	1.549	23.173
1	1.622	23.444

Table 1 shows the Bayes premiums for the sets of hyperparameters considered in this paper. We can observe that the premiums for the second set are higher than the first ones.

#### 4. FINAL REMARKS

In this paper it is presented a new compound collective model for obtaining risk, collective and Bayes premiums. As we can observe, this model can represent the overdispersion which can occurs in insurance field; and concretely in the calculation of insurance premiums. In this sense, we present simple expressions for computing these premiums that can be implemented in an easy way.

## ACKNOWLEDGEMENTS

EGD and AHB are funded by Ministerio de Educación y Ciencia, Spain, under project SEJ2006-12685.

## BIBLIOGRAPHIES REFERENCES

Gerber, HU. An introduction to mathematical risk theory. Huebner Foundation Monograph 8, 1979.

Goovaerts, MJ. and De Vylder, F. A note on iterative premium calculation principles. *Astin Bulletin*, 1979, 10: 326-339.

Grandell, J. Mixed Poisson Processes. New York: Chapman and Hall, 1997.

Heilmann, W. Decision theoretic foundations on credibility theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1988, 8: 77-95.

Hernández-Bastida, A.; Gómez-Deniz, E. and Pérez-Sánchez, JM. Bayesian Robustness of the Compound Poisson Distribution under Bidimensional Prior: an Application to the Collective Risk Model. *Journal of Applied Statistics*, 2009. To appear.

Hürlimann, W. A note on experience rating, reinsurance and premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1994, 14: 197-204.

Klugman, SA. Bayesian Statistics in Actuarial Science: with Emphasis on Credibility. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992.

Klugman, SA.; Panjer, HH. and Willmot, G.E. Loss Models: From Data to Decisions. Malden: Ed. Wiley Interscience, 2<sup>a</sup> ed., 2004.

Kozubowski, TJ. and Panoska, AK. A mixed bivariate distribution with exponential and geometric marginals. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2005, 134: 501-520.

Mathai, AM. A Handbook of Generalized Special Functions for Statistical and Physical Sciences. Oxford: Clarendon Press, 1993.

McNeil, A.; Frey, R. and Embrechts, P. Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton: Princeton University Press, 2005.

Nadarajah, S. and Kotz, S. Compound mixed Poisson distributions I. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2006a, 3: 141-162.

Nadarajah, S. and Kotz, S. Compound mixed Poisson distributions II. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2006b, 3: 163-181.

Nikoloulopoulos, A.K. and Karlis, D. On modelling count data: a comparison of some well-known discrete distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2008, 78-3: 437-457.

Rolski, T.; Schmidli, H.; Schmidt, V. and Teugels, J. Stochastic process for Insurance and finance. New York: John Wiley & Sons, 1999.

Sandström, A. Solvency: Models, Assessment and Regulation. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006.

Schmidt, KD. Bayesian models in Actuarial Mathematics. *Mathematical Methods of Operational Research*, 1998, 48: 117-146.

Wüthrich, MV. Premium Liability Risks: Modelling Small Claims. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*. 2006, 1:27-38.

Yakubovich, SB. and Luchko YF. *The hypergeometric approach to integral transforms and convolutions*. The Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 1994.

Young, V. Premium principles. *Encyclopaedia of Actuarial Science*, 2004, 3: 1322-1331.

## Ponencia 11

### ANÁLISIS DE RIESGOS CON LA DISTRIBUCIÓN PARETO ESTABLE POSITIVA

José María Sarabia, Faustino Prieto, Emilio Gómez-Déniz

#### RESUMEN

La distribución Pareto estable positiva (que representaremos por PPS) se define por medio de una mixtura de la distribución clásica de Pareto con la clase de distribuciones de tipo estable positiva (Sarabia y Prieto, 2009). Dicha distribución es bastante flexible en el ajuste de datos e incluye a la distribución de Pareto, además de admitir situaciones de cero y unimodalidad.

En el presente trabajo se estudian aspectos teóricos y empíricos de la distribución PPS en análisis de riesgos. Se obtienen expresiones para las primas de reaseguros *excess loss*, además de algunas medidas clásicas de riesgo como el VaR y el TVaR. Así mismo, se lleva a cabo un análisis Bayesiano de la distribución.

A continuación se efectúa un estudio empírico utilizando diversos conjuntos de datos relativos a pérdidas y riesgos operacionales. Se realiza una comparación de la distribución propuesta con los modelos clásicos de pérdidas lognormal, Pareto y Pareto generalizada. Finalmente, y a partir de los datos analizados, se presenta una propuesta de tipología de distribuciones según el tipo de riesgo.

**Palabras Clave:** distribución clásica de Pareto, distribución lognormal, valor en riesgo.

## 1. INTRODUCCIÓN

La distribución Pareto estable positiva (que representaremos por PPS) se define por medio de una mixtura de la distribución clásica de Pareto con la clase de distribuciones de tipo estable positiva (Sarabia y Prieto, 2009).

Específicamente, supongamos un riesgo  $X$  que se distribuye según una distribución clásica de Pareto de parámetros  $\alpha > 0$  y  $\sigma > 0$ . Entonces, si el parámetro  $\alpha$  sigue una ley de tipo estable positiva, se obtiene la nueva distribución.

La distribución PPS ha sido utilizada para modelizar datos relativos al tamaño de ciudades, donde se trata de ajustar todo el rango de la muestra y no sólo la cola superior. Dicha distribución es bastante flexible en el ajuste de datos e incluye a la distribución de Pareto, además de admitir situaciones de cero y unimodalidad. Este último aspecto la convierte en buena candidata en el ajuste de datos de pérdidas. Diversos modelos de distribuciones de pérdidas pueden encontrarse en Klugman et al (2004), Sarabia et al. (2006), Boland (2007) y Gómez-Déniz y Sarabia (2008).

En el presente trabajo se estudian aspectos teóricos y empíricos de la distribución PPS en análisis de riesgos.

Los contenidos del trabajo son los siguientes. La Sección 2 presenta resultados de la distribución Pareto estable positiva. La Sección 3 se dedica al estudio de diversas medidas de riesgo de la distribución. Se obtienen expresiones para algunas medidas clásicas de riesgo como el VaR y el TVaR, así como para las primas de reaseguros excess loss. La Sección 4 se dedica al estudio de la distribución desde el punto de vista Bayesiano, donde se obtienen algunas fórmulas de credibilidad. En la Sección 5 se lleva a cabo un estudio empírico utilizando diversos conjuntos de datos relativos a pérdidas y riesgos operacionales. Se realiza una comparación de la distribución propuesta con los modelos clásicos de pérdidas lognormal, Pareto generalizada y Pareto. Finalmente, y a partir de los datos analizados,

se presenta una propuesta de tipología de distribuciones según el tipo de riesgo.

## 2. La distribución PPS

La distribución PPS se define en términos de función de distribución  $F(x) = \Pr(X \leq x)$ , de la siguiente forma:

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ -\lambda [\log(x/\sigma)]^\nu \right\} \quad x \geq \sigma \quad (1)$$

y  $F(x) = 0$  si  $x < \sigma$ , donde  $\lambda, \sigma, \nu > 0$ .

Una variable aleatoria con función de distribución (1) se representa por  $X \approx PPS(\lambda, \sigma, \nu)$ , siendo  $\lambda$  y  $\nu$  parámetros de forma y  $\sigma$  parámetro de escala.

La clase (1) incluye dos importantes casos particulares:

- La ley de Zipf ( $\lambda = \nu = 1$ ),
- La distribución clásica Pareto ( $\nu = 1$ ).

En este caso  $PPS(\lambda, \sigma, 1) \equiv Pa(\lambda, \sigma)$ .

Modelos más flexibles se obtienen cuando  $\nu > 1$  (ver Sección 5).

### 2.1. Propiedades básicas de la distribución PPS

La distribución PPS tiene un doble origen. El primer origen ya ha sido comentado y se refiere a una mezcla de la distribución clásica de Pareto con la distribución estable positiva. En segundo lugar, se puede obtener mediante una transformación monótona de la distribución de Weibull. Incluimos a continuación algunas propiedades de la distribución PPS, las cuales se encuentran expuestas con mayor amplitud en Sarabia y Prieto (2009).

La función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{\lambda v [\log(x/\sigma)]^{v-1}}{x} \exp \left\{ \lambda [\log(x/\sigma)]^v \right\} \quad x \geq \sigma \quad (2)$$

En relación al valor modal se verifica que:

- Si  $v > 1$ , la moda se alcanza en  $\sigma \exp(z_0)$ , siendo  $z_0$  la única solución de la ecuación  $\lambda v z^v + z - (v-1) = 0$
- Si  $v < 1$ , la distribución es cero-modal con un polo en  $x = \sigma$

La función de azar es:

$$h(x) = \frac{f(x)}{\Pr(X > x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\lambda v [\log(x/\sigma)]^{v-1}}{x}, \quad x > \sigma \quad (3)$$

que puede ser creciente o decreciente según  $v > 1$  ó  $v < 1$ , respectivamente. La función de cuantiles se obtiene fácilmente por medio de la expresión:

$$Q(p) = F^{-1}(p) = \sigma \exp \left\{ \left[ -\frac{1}{\lambda} \log(1-p) \right]^{1/v} \right\}. \quad (4)$$

El momento de orden  $r$  respecto del origen se puede obtener por medio de la integral:

$$E(X^r) = \lambda v \sigma^r \int_0^\infty z^{v-1} \exp(-\lambda z^v + rz) dz, \quad (5)$$

mientras que los momentos del logaritmo son:

$$E \left[ (\log(X/\sigma))^r \right] = \lambda^{-r/v} \Gamma \left( 1 + \frac{r}{v} \right) \quad (6)$$

## 2.2. Estimación y validación gráfica del modelo

La distribución PPS se puede ajustar mediante diversos procedimientos, que aparecen detallados en Sarabia y Prieto (2009). Se pueden obtener estimadores de momentos, de regresión y de máxima verosimilitud.

La validez del ajuste de la distribución PPS a los datos se puede realizar gráficamente de forma simple, partiendo de la expresión:

$$\log[-\log(1-F(x))] = \log\lambda + \upsilon \log[\log(x/\sigma)], \quad (7)$$

la cual se obtiene a partir de la expresión (1) tomando dos veces logaritmo en  $1-F(x)$ . En primer lugar, ordenamos de menor a mayor los datos de pérdidas:  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ , y obtenemos la función de distribución empírica. La validación del modelo se basa en el gráfico (que llamaremos doble log-log):

$$\log[-\log(1-F_n(x_{(i)}))] \text{ versus } \log[\log(x/\sigma)], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Si la distribución PPS es la adecuada para los datos, el gráfico anterior debería ser una línea recta con pendiente positiva. Por tanto, en la medida que el gráfico se aproxime a dicha línea recta se dispone de evidencia sobre la validez de la distribución PPS.

### 3. MEDIDAS DE RIESGO

Para la distribución PPS el valor en riesgo se obtiene fácilmente invirtiendo la función de distribución dada en (1). Se verifica entonces que,

$$VaR[p] = \sigma \exp \left\{ \left[ -\frac{1}{\lambda} \log(1-p) \right]^{1/\upsilon} \right\}, \quad 0 < p < 1. \quad (8)$$

Para la distribución PPS el valor en riesgo en la cola viene dado por,

$$TVaR[p] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 \sigma \exp \left\{ \left[ -\frac{1}{\lambda} \log(1-u) \right]^{1/\upsilon} \right\} du. \quad (9)$$

La expresión anterior se puede escribir como,

$$TVaR[p] = \frac{\lambda\sigma\upsilon}{1-p} \int_z^\infty u^{\upsilon-1} \exp \left\{ -\lambda u^\upsilon + u \right\} du, \quad (10)$$

donde:  $z = [-\log(1-p)/\lambda]$ . En el caso de la distribución clásica de Pareto, la integral (10) se convierte en:

$$TVaR[p] = \frac{\lambda\sigma}{\lambda-1}(1-p)^{-1/\lambda}.$$

En el caso  $\nu = 2$  también es posible obtener una fórmula cerrada.

La prima de reaseguro excess-loss para el principio de prima neta se puede obtener como,

$$E[X-d]_+ = \int_d^\infty [1-F_X(x)]dx. \quad (11)$$

En el caso de la distribución PPS, la expresión anterior se convierte en:

$$E[X-d]_+ = \sigma \int_{\log(d/\sigma)}^\infty \exp(-\lambda u^\nu + u) du. \quad (12)$$

Para la distribución clásica de Pareto la fórmula (12) se puede escribir como:

$$TVaR[p] = \frac{\sigma}{\lambda-1}(d/\sigma)^{1-\lambda}.$$

Si  $\nu = 2$  nuevamente es posible obtener una fórmula cerrada.

#### 4. ESTIMACIÓN BAYESIANA

En este apartado nos ocuparemos de la estimación desde el punto de vista Bayesiano. Suponemos disponible una muestra de datos de pérdidas procedentes de la distribución PPS. Escribimos  $\lambda = \alpha\beta$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y suponemos que  $\beta$  es la realización de una variable aleatoria  $B$  siguiendo alguna distribución de probabilidad. Tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.** Supongamos que  $B$  sigue a priori una distribución de tipo gamma con parámetros  $a > 0$  y  $b > 0$  de modo que  $\pi(\beta) \propto \beta^{\alpha-1} e^{-b\beta}$ . Entonces, se verifica que:

1. La distribución posterior de  $\beta$  dado  $n$  datos independientes de pérdidas  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  es de nuevo una distribución tipo gamma, donde los parámetros se actualizan mediante el esquema:

$$a \rightarrow a + n, \quad (13)$$

$$b \rightarrow b + \alpha \sum_{i=1}^n [\log(X_i/\sigma)]^\nu. \quad (14)$$

2. La distribución marginal de  $X$  tiene como función de densidad y como función de distribución:

$$f(x) = \frac{a\alpha\nu}{bx} [\log(x/\sigma)]^{\nu-1} \left\{ \frac{b}{b + \alpha [\log(x/\sigma)]^\nu} \right\}^{a+1},$$

$$F(x) = 1 - \left\{ \frac{b}{b + \alpha [\log(x/\sigma)]^\nu} \right\}^a,$$

respectivamente.

3. Si definimos la variable aleatoria  $Z = \log(X/\sigma)$ , los momentos respecto del origen de la distribución marginal transformada  $Z$  vienen dados por:

$$E[Z^r] = \left(\frac{\alpha}{b}\right)^{-r/\nu} \Gamma(1+r/\nu) \Gamma(a-r/\nu), \quad 0 < r < a\nu.$$

4. La variable aleatoria predictiva  $X_{n+1} | \underline{X}$  tiene como función de densidad:

$$f(x_{n+1} | \underline{X}) = \frac{(a+n)\nu\alpha [\log(x_{n+1}/\sigma)]^{\nu-1}}{x_{n+1}} \times \frac{\left\{ b + \alpha \left[ \sum_{i=1}^n \log(X_i/\sigma) \right]^\nu \right\}^{a+n}}{\left\{ b + \alpha \left[ \sum_{i=1}^{n+1} \log(X_i/\sigma) \right]^\nu \right\}^{a+n+1}}, \quad x_{n+1} \geq \sigma.$$

## 4.1 Estimadores Bayes y fórmulas de credibilidad

Si consideramos una función de pérdida de tipo cuadrático, el estimador Bayes es la media posterior del parámetro  $\beta$ . A partir de una muestra de datos  $\underline{X}$  dicho estimador viene dado por:

$$E[\beta/\underline{X}] = \frac{(a+n)}{b + \alpha \left[ \sum_{i=1}^n \log(X_i/\sigma) \right]^v}. \quad (15)$$

En consecuencia, la fórmula Bayesiana (15) se puede escribir como

$$E[\beta/\underline{X}] = Z_n g(\underline{X}) + (1 - Z_n) E(B), \quad (16)$$

donde  $g(\underline{X}) = n / \left( \alpha \sum_{i=1}^n [X_i]^v \right)$  y  $Z_n = \alpha \sum_{i=1}^n [X_i]^v / \left( b + \alpha \sum_{i=1}^n [X_i]^v \right)$ .

Para el caso particular que  $v=1$  (es decir, la distribución de Pareto clásica),  $g(\underline{X})$  es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de forma de Pareto. La expresión (16) es una fórmula de credibilidad y el término  $Z_n$  es el factor de credibilidad. En otras palabras, el valor medio de la distribución predictiva de la variable aleatoria  $Z = \log(X/\sigma)$  viene dada por:

$$E[Z_{n+1} | Z_1, Z_2, \dots, Z_n] = (a+n) \left[ \frac{b}{\alpha} + \left( \sum_{i=1}^n Z_i \right)^v \right]^{1/v} B(a+n-1/v, 1/v+1),$$

donde  $B(\cdot, \cdot)$  representa la función beta.

## 5. UN ESTUDIO COMPARATIVO DE LA PPS CON DATOS DE PÉRDIDAS

### 5.1. Datos y Metodología

En el presente trabajo, se han considerado los siguientes conjuntos de datos relativos a pérdidas y riesgos operacionales: pérdidas operacionales por un valor superior a 1 millón de euros observadas en

un banco publicadas por Bühlmann et al. (2007), datos normalizados de daños debidos a huracanes en USA entre 1925-95 publicados por Pielke y Landsea (1998), daños causados por incendios en Dinamarca y en Noruega (McNeil, 1997), y datos de reclamaciones por robo (Boland, 2007).

Para cada uno de los conjuntos de datos citados, se han ajustado y comparado cuatro modelos: la distribución clásica de Pareto, la distribución lognormal triparamétrica, la distribución Pareto Generalizada y la distribución PPS, cuyas funciones de densidad vienen dadas, respectivamente, por:

– Distribución clásica de Pareto:  $f(x; \alpha, \sigma) = \frac{\alpha \sigma^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq \sigma > 0 \quad (17)$

– Distribución Lognormal Triparamétrica:

$$f(x; \mu, \sigma, \gamma) = \frac{1}{\sigma(x-\gamma)\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log(x-\gamma) - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad x > \gamma \quad (18)$$

– Distribución Pareto Generalizada

$$f(x; \lambda, q) = \frac{2-q}{\lambda} \left[ 1 - (1-q) \frac{x}{\lambda} \right]^{1/(1-q)}, \quad 0 \leq x \leq A_q, \quad (19)$$

donde  $A_q = (0, \infty)$  si  $q > 1$  y  $A_q = (0, \lambda/(1-q))$  si  $q < 1$ . El Caso  $q=1$  corresponde a la distribución exponencial.

– Distribución PPS (expresión (2)).

Dichos ajustes se han realizado mediante el método de máxima verosimilitud. Como criterio de selección del modelo más adecuado se ha utilizado el criterio de información de Akaike (AIC). Dicho criterio viene definido como:

$$AIC = 2 \log l - 2d \quad (20)$$

siendo  $\log l$  el logaritmo de máxima verosimilitud del modelo evaluado y  $d$  el número de parámetros de dicho modelo. El modelo elegido será aquel cuyo valor de AIC sea el mayor.

Finalmente, con el objetivo de estudiar gráficamente la adecuación del modelo elegido, se han obtenido dos gráficos diferentes: el doble log-log y el gráfico log-log, para cada conjunto de datos.

## 5.2 Resultados

Las tablas 1, 2, 3 y 4 muestran, respectivamente, los resultados (parámetros estimados y valor de AIC) para la distribución clásica de Pareto, la distribución lognormal triparamétrica, la distribución Pareto Generalizada y la distribución PPS, para cada uno de los conjuntos de datos considerados.

Comparando los valores de AIC obtenidos se observa que la distribución clásica de Pareto se presenta como el modelo más adecuado para ajustar pérdidas operacionales, la distribución PPS como modelo más adecuado para ajustar daños por huracanes y daños por incendios, y la distribución Pareto Generalizada como modelo más adecuado para ajustar reclamaciones por robo.

Si se optase por elegir un único modelo común para todos los conjuntos de datos, se observa que la distribución PPS sería el modelo seleccionado al tener el mayor valor de AIC para tres de los cinco conjunto de datos y el segundo mayor valor de AIC en los dos restantes, mientras que la distribución clásica Pareto es la peor elección en el caso de reclamaciones por robo, la distribución Pareto generalizada es la peor elección en el caso de daños por huracanes y por incendios, y la distribución lognormal no obtiene el mayor valor de AIC en ninguno de los cinco casos.

Los gráficos 1, 2, 3, 4 y 5 muestran los gráficos doble log-log y log-log para la distribución PPS en cada uno de los conjuntos de datos anteriores. Los datos reales se representan mediante puntos y en línea continúa el modelo teórico de la distribución PPS. Puede observarse cómo los gráficos doble log-log son aproximadamente lineales (salvo la desviación en el caso de incendios para pérdidas de poco valor que invita a seguir buscando un modelo aún mejor), y cómo en los

gráficos log-log se ajusta el modelo teórico basado en la distribución PPS a los datos reales, confirmando gráficamente la adecuación del modelo elegido.

**Tabla 1:**

Parámetros estimados y valor AIC obtenidos mediante ajuste de la distribución clásica de Pareto a los diferentes conjuntos de datos mediante máxima verosimilitud.

Riesgo	$\hat{\alpha}$	$\hat{\sigma}$	AIC
Pérdidas Operacionales	2,9104	1.001,0000	-1.440,8111
Daños por Huracanes	0,7690	2.266,0000	-600,7516
Daños por Incendios (Dinamarca)	1,2707	1,0000	-6.710,2566
Daños por Incendios (Noruega)	1,0831	500,0000	-147.965,5170
Reclamaciones por Robo	0,1809	3,0000	-2.244,0536

**Tabla 2**

Parámetros estimados y valor AIC obtenidos mediante ajuste de la distribución Lognormal Triparamétrica a los diferentes conjuntos de datos mediante máxima verosimilitud.

Riesgo	$\hat{\mu}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}$	AIC
Pérdidas Operacionales	5,5112	992,1995	1,3089	-1.445,8636
Daños por Huracanes	8,6257	1.766,6924	1,1707	-597,7255
Daños por Incendios (Dinamarca)	0,0000	0,9738	1,3921	-6.775,9501
Daños por Incendios (Noruega)	6,2556	486,8355	1,4797	-148.121,8617
Reclamaciones por Robo	6,6242	0,0000	1,5112	-2.035,4508

**Tabla 3**

Parámetros estimados y valor AIC obtenidos mediante ajuste de la distribución Pareto Generalizada a los diferentes conjuntos de datos mediante máxima verosimilitud.

Riesgo	$\hat{q}$	$\hat{\lambda}$	AIC
Pérdidas Operacionales	0,8505	1.960,1470	-1.666,2886
Daños por Huracanes	1,0652	10.483,6179	-606,8895
Daños por Incendios (Dinamarca)	1,1570	2,1732	-9.249,6664
Daños por Incendios (Noruega)	1,2039	1.162,8645	-156.870,4917
Reclamaciones por Robo	1,3471	649,9401	-2.028,4228

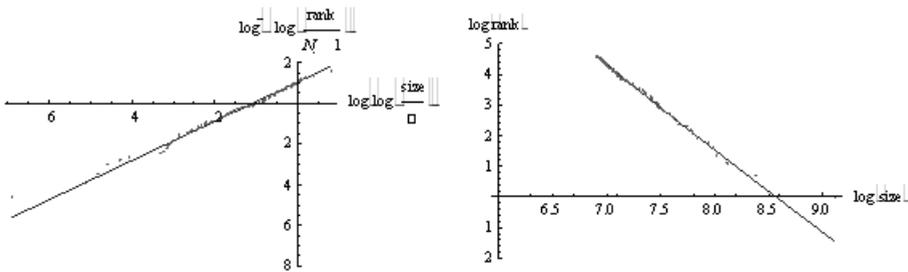
**Tabla 4**

Parámetros estimados y valor AIC obtenidos mediante ajuste de la distribución Pareto Estable Positiva (PPS) a los diferentes conjuntos de datos mediante máxima verosimilitud.

Riesgo	$\hat{\nu}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}$	AIC
Pérdidas Operacionales	0,9642	2,8373	999,9990	-1.443,1690
Daños por Huracanes	1,8908	0,3685	1.840,2578	-597,6889
Daños por Incendios (Dinamarca)	1,0991	1,2509	0,9993	-6.685,5222
Daños por Incendios (Noruega)	1,1107	1,0453	498,5334	-147.872,7485
Reclamaciones por Robo	6,6369	0,0000	0,1222	-2.033,0355

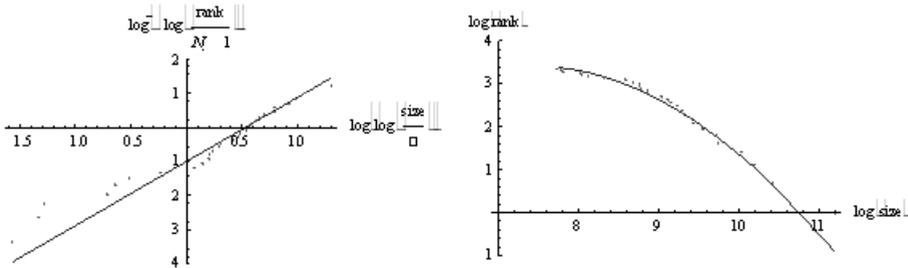
**Figura 1**

Gráficos doble log-log (izquierda) y log-log simple (derecha) correspondientes al ajuste de la distribución PPS a datos de pérdidas operacionales.



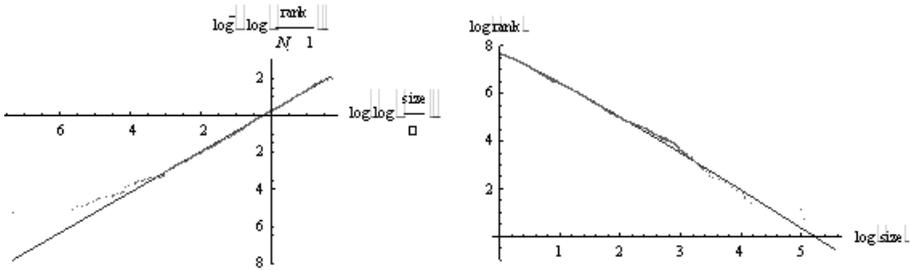
**Figura 2**

Gráficos doble log-log (izquierda) y log-log simple (derecha) correspondientes al ajuste de la distribución PPS a datos de daños por huracanes.



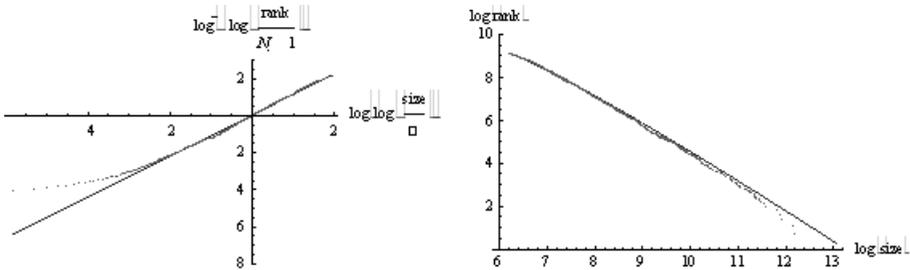
**Figura 3**

Gráficos doble log-log (izquierda) y log-log simple (derecha) correspondientes al ajuste de la distribución PPS a datos de daños por incendios (Dinamarca).



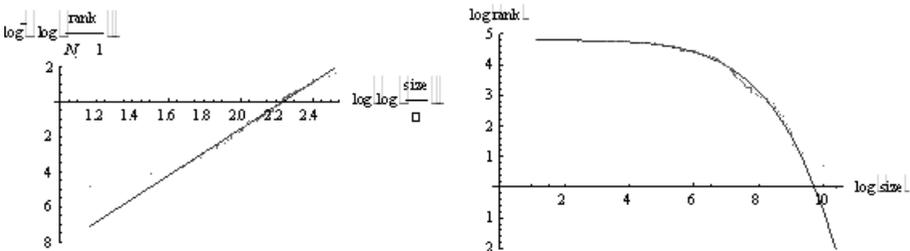
**Figura 4**

Gráficos doble log-log (izquierda) y log-log simple (derecha) correspondientes al ajuste de la distribución PPS a datos de daños por incendios (Noruega).



**Figura 5**

Gráficos doble log-log (izquierda) y log-log simple (derecha) correspondientes al ajuste de la distribución PPS a datos de reclamaciones por robo.



## 5. TIPOLOGÍA DE DISTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha analizado la adecuación de las distribuciones clásica de Pareto, lognormal triparamétrica, Pareto generalizada y Pareto Estable Positiva (PPS) a cinco conjuntos de datos de pérdidas y riesgos operacionales.

Así mismo, se han proporcionado las propiedades básicas de la distribución PPS, así como las expresiones para las primas de reaseguros excess loss y para las medidas clásicas de riesgo VaR y TVaR. Posteriormente, se ha llevado a cabo un análisis Bayesiano de dicha distribución PPS.

El cuadro siguiente muestra la tipología de distribuciones resultante del presente trabajo:

Riesgo	Modelo propuesto
Pérdidas Operacionales	Distribución Clásica de Pareto
Daños por Huracanes	Distribución Pareto Estable (PPS)
Daños por Incendios (Dinamarca)	Distribución Pareto Estable (PPS)
Daños por Incendios (Noruega)	Distribución Pareto Estable (PPS)
Reclamaciones por Robo	Distribución Pareto Generalizada

Los resultados obtenidos, basados en el cálculo del valor AIC, muestran que la distribución PPS es competitiva con la distribución clásica de Pareto, la distribución lognormal triparamétrica y la distribución Pareto generalizada para diferentes conjuntos de datos de pérdidas y riesgos operacionales, siendo el modelo más adecuado en tres de los cinco conjunto de datos y el segundo mejor modelo en los dos restantes.

Gráficamente, tanto la tendencia lineal del gráfico doble log-log como el gráfico log-log, confirman la utilidad de la distribución PPS para ajustar datos de pérdidas y riesgos operacionales.

## **AGRADECIMIENTOS**

Los autores agradecen al Ministerio de Educación y Ciencia (proyectos SEJ2007-65818 (JMS y FP) y SEJ2006-12685 (EGD)) por la financiación parcial de este trabajo.

## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Boland, P.J. *Statistical and Probabilistic Methods in Actuarial Science*. Chapman and Hall CRC, Boca Raton, 2007

Bühlmann, H., Shevchenko, P.V., Wüthrich, M.V. A “Toy” model for operational risk quantification using credibility theory. *Journal of Operational Risk*, 2007, 2, 3-20.

Gómez-Déniz, E., Sarabia, J.M. *Teoría de la Credibilidad: Desarrollo y Aplicaciones en Primas de Seguros y Riesgos Operacionales*. Fundación MAPFRE, Madrid, 2008.

Klugman, S.A., Panjer, H.H., Willmot, G.E. *Loss Models. From Data to Decisions*. John Wiley, New York, 2004.

McNeil, A.J. Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory. *Astin Bulletin*, 1997, 27, 117-137

Pielke, Jr., R. A. y C. W. Landsea. Normalized Hurricane Damages in the United States: 1925-1995. *Weather and Forecasting*, 1998, 13, 621-631.

Sarabia, J.M., Gómez-Déniz, E., Vázquez, F. *Estadística Actuarial. Teoría y Aplicaciones*. Pearson Prentice Hall, Madrid, 2006.

Sarabia, J.M. y Prieto, F. The Pareto-positive stable distribution: a new descriptive model for city size data. En revision, 2009.



## **II. SEGUROS GENERALES Y REASEGURO**



## Ponencia 12

### **FACTORES INFLUYENTES EN EL COSTE DE LIQUIDACIÓN DE LOS DAÑOS PERSONALES DERIVADOS DE ACCIDENTES DE CIRCULACIÓN ANTE LA FUTURA REFORMA DEL BAREMO**

Mercedes Ayuso Gutiérrez, Lluís Bermúdez i Morata  
y Miguel Santolino Prieto

#### **RESUMEN**

Ante la futura reforma del Sistema para la valoración de los daños y perjuicios causados a las personas en accidentes de circulación, se presume de gran importancia para las compañías aseguradoras analizar qué características de los siniestros influyen sobre el coste de liquidación de los mismos y con qué intensidad. Utilizando una muestra de 22.709 siniestros y 25.841 víctimas con daños corporales, se especifica un modelo de regresión que permite determinar los factores estadísticamente significativos en la explicación del coste de liquidación. Este análisis permite a las compañías evaluar qué factores tienen un mayor efecto sobre el coste medio de liquidación de los siniestros y, en consecuencia, cuáles tendrían un mayor impacto sobre el coste ante un eventual aumento de estas partidas indemnizatorias en una futura reforma del baremo.

#### **Palabras clave**

Siniestro, daño corporal, reforma, baremo, coste liquidación.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el artículo, a partir de una muestra de siniestros de automóvil en los que hubieron víctimas con daños corporales, se analizan las características de estos siniestros que nos ayudan a explicar el coste que representa para las compañías aseguradoras la liquidación de los mismos. Con este objetivo, se realiza el análisis mediante el ajuste de una regresión logarítmica en el que la variable dependiente es el coste de liquidación del siniestro. De este modo, además de conocer qué factores influyen en el coste de liquidación, podemos estimar el efecto marginal de cada uno de los regresores.

Desde la entrada en vigor de la Ley de Responsabilidad Civil y Seguro en la Circulación de Vehículos a Motor, aprobada a través de la Disposición adicional octava de la Ley 30/1995 de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, las indemnizaciones por daños corporales derivados de accidentes de circulación deben fijarse de acuerdo con el Sistema para la valoración de los daños y perjuicios causados a las personas en accidentes de circulación, más conocido como baremo de indemnización. Este baremo no ha estado exento de críticas desde su implantación (García, 2002).

En la reforma de la Ley de Responsabilidad Civil y Seguro en la Circulación de Vehículos a Motor, Ley 21/2007, de 11 de julio, se incrementaron los límites de cobertura del seguro de suscripción obligatoria a 70 millones de euros por daños personales y a 15 millones de euros por daños materiales, con el fin de incorporar la Quinta Directiva Europea (2005/12/CE) al derecho español. El aumento en los límites del seguro obligatorio ha planteado entre los expertos y las entidades aseguradoras la necesidad de revisar el actual baremo después de más de una década desde su implementación (Xiol, 2008).

Una sustancial reforma del baremo de indemnizaciones previsiblemente tendrá un importante impacto sobre los resultados de las compañías aseguradoras que operan en el ramo del automóvil. Ahora bien, el coste de liquidación de los siniestros no únicamente depende de la indemnización otorgada a las víctimas en concepto de lesiones

temporales o permanentes, sino que está compuesto por otros factores que también repercuten en su cuantía, como son los gastos hospitalarios, de abogados, intereses, etc. Entender qué características de los siniestros tienen capacidad explicativa sobre el coste de liquidación de los siniestros y en qué proporción es de suma importancia para las compañías aseguradoras. Esta información les va a permitir mejorar su eficiencia en un ramo tan competitivo como es el del seguro de automóvil.

A continuación, detallamos la estructura del resto del artículo. En el apartado 2 se realiza una breve descripción de la muestra. En el apartado 3 se describen los resultados obtenidos. Finalmente, en el capítulo 4 se resumen las principales conclusiones.

## **2. DATOS**

Disponemos de información sobre un total de 22.709 siniestros de automóvil ocurridos en España entre 2000 y 2007, en los que se ha producido al menos una víctima con daños corporales. Los datos hacen referencia fundamentalmente a las lesiones sufridas por los individuos, como el tipo de secuela padecida, los días de baja, y las indemnizaciones concedidas por cada uno de los daños sufridos. No obstante, se dispone también de información relevante sobre las características del siniestro, como el tiempo que se ha utilizado en su liquidación, o el lugar donde se ha producido el accidente.

La información disponible de cada siniestro se puede agrupar en:

- I. Características básicas del siniestro (año y lugar de ocurrencia).
- II. Características sociodemográficas de las víctimas (lugar de residencia, edad, sexo y posición en el vehículo).
- III. Proceso de tramitación de los daños (vía judicial o transacción).
- IV. Daños temporales sufridos por las víctimas (tipo y número de días de baja).
- V. Daños permanentes sufridos por las víctimas (principales secuelas y puntuación otorgada a las mismas).

VI. Coste total de liquidación (suma de las indemnizaciones por daños permanentes, indemnizaciones por daños temporales, factores correctores, gastos e intereses).

## **2.1. Características básicas de los siniestros**

La fecha de ocurrencia de los siniestros analizados ha sido fundamentalmente entre los años 2005 y 2007, habiéndose producido el 93,8% de los casos analizados en este intervalo temporal. Casi la totalidad de accidentes analizados se han producido en el territorio español, siendo menos del 0,1% de siniestros los ocurridos en el extranjero. El mayor número de registros se han producido en Barcelona, Sevilla, Madrid, Valencia y Murcia, representado entre estas provincias más del 34% de los siniestros.

## **2.2. Características sociodemográficas de las víctimas**

El número total de víctimas analizadas en la base de datos es de 25.841. El número medio de víctimas por siniestro es, por tanto, igual a 1,14. Los estadísticos descriptivos básicos sobre el lugar de residencia de los lesionados, su sexo, edad y la posición que ocupaban en el vehículo en el momento del accidente aparecen recogidos en los siguientes epígrafes. Realizado el cruzamiento de las provincias de residencia de los lesionados con la provincia de ocurrencia del siniestro podemos concluir que un 91,1% de las víctimas residen en la misma provincia donde se ha producido el accidente.

La edad de las víctimas agrupada por intervalos aparece en la tabla 1. La categorización utilizada es la misma que aparece en la tabla III de indemnizaciones básicas por lesiones permanentes del *Sistema para la valoración de los daños y perjuicios causados a las personas en accidentes de circulación*. Un 49,0% de las víctimas tienen edades comprendidas entre los 21 y los 40 años de edad. El porcentaje más bajo de individuos se encuentra en la categoría de más de 65 años de edad, con un 7,9% de los casos analizados.

**Tabla 1**  
Edad de las víctimas (en años)

		Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Edad	0-20	13,6%	13,6%
	21-40	49,0%	62,6%
	41-55	20,9%	83,5%
	56-65	8,6%	92,1%
	66-100	7,9%	100,0%
	Total	100,0%	

Valores perdidos: 14

En la tabla 2 presentamos el sexo de los lesionados. Como puede observarse, un 45,8% de las víctimas son hombres, y un 54,2% son mujeres. No obstante, remarcar que en un 15,2% de los registros iniciales (3.936 víctimas) no se dispone de información sobre esta variable.

**Tabla 2**  
Sexo de las víctimas

		Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Sexo	Mujer	11869	54,2%	54,2%
	Hombre	10036	45,8%	100,0%
	Total	21905	100,0%	

Valores perdidos: 3936

En cuanto al tipo de víctima, atendiendo a la posición ocupada en el vehículo, señalar que en un 50,4% de los casos la víctima es el conductor del vehículo, y en un 37,3% los lesionados son los ocupantes, tanto del vehículo asegurado como del vehículo contrario. El resto de las víctimas son peatones o ciclistas.

### 2.3. Proceso de tramitación de los daños

El acuerdo sobre la compensación de los daños sufridos por las víctimas (pago de indemnizaciones, gastos de curación, etc.) puede alcanzarse fundamentalmente por dos vías: transacción entre las partes, y resolución judicial. En el primero de los casos se abre un proceso de

negociación entre la compañía aseguradora responsable de los daños y el asegurado, que acaba cuando ambos llegan a un acuerdo sobre la cantidad a indemnizar. La resolución por vía judicial, mucho menos frecuente que la negociación entre las partes, tiene lugar cuando esta última fracasa en sus objetivos, siendo necesario resolver el conflicto mediante la intervención del sistema judicial. Similar a otros países, en menos del 6% de los casos analizados (víctimas) la indemnización ha sido dictada por sentencia (Derrig y Weisberg, 2004).

## **2.4. Análisis de los días de baja requeridos para la recuperación**

En cuanto a los daños temporales, se ha de diferenciar entre el tiempo que la víctima ha estado de baja hospitalaria y los días de baja impeditivos y no impeditivos. Destacar que más del 85% los individuos no requirieron de ingreso hospitalario. A diferencia de lo que observábamos para los días de baja hospitalarios, el número de días en los que la víctima se ha encontrado incapacitada para desarrollar su actividad laboral habitual es claramente superior. De hecho, sólo un 5,3% de los individuos no ha tenido que dejar de trabajar temporalmente. Por último, realizamos el análisis de los días de baja no impeditivos. Se trata, en este caso, de una situación en la que la víctima puede acudir a su lugar de trabajo, pero sigue presentando lesiones o daños temporales producidos a causa del accidente. Señalar que aproximadamente en la mitad de los casos la víctima no sufrió días de baja no impeditivos.

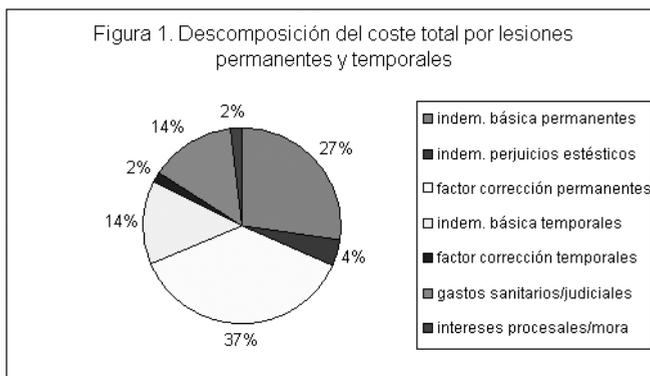
## **2.5. Análisis de secuelas y puntuaciones otorgadas**

Pasamos ahora a realizar un análisis de las secuelas más frecuentes presentadas por las víctimas y de los puntos que llevan asociadas. Las secuelas asociadas a algias postraumáticas, síndromes postraumáticos cervicales, artrosis y perjuicios estéticos ligeros son las más comunes, representando casi el 60% de las secuelas. En relación a la suma de puntos por las secuelas padecidas por las víctimas, que no estén asociadas a perjuicio estético, aproximadamente al 95% de los lesionados se les ha otorgado como máximo 14 puntos como con-

secuencia de los daños permanentes sufridos. Por lo tanto, la mayoría de puntuaciones están relacionadas con lesiones permanentes de menor gravedad. Por otro lado, las secuelas produjeron perjuicio estético casi al 22% de los lesionados, siendo en más del 96% de los casos de un grado ligero o moderado.

## 2.6. Coste total de liquidación

Finalmente, presentamos en este apartado el comportamiento de la variable que recoge el coste total de liquidación del siniestro. Esta variable está formada por la indemnización básica otorgada a la víctima por las secuelas permanentes y los perjuicios estéticos (Tabla III del baremo), por la derivada del periodo que ha estado de baja a consecuencia del accidente (Tabla V.a del baremo), y por la indemnización otorgada en concepto de factores de corrección (Tablas IV y V.b). Además, también está compuesta por los gastos relacionados con la curación de los daños y/o la compensación de los mismos (gastos hospitalarios, honorarios a abogados, derechos de procuradores, etc.) y finalmente, por los intereses de mora o procesales, si éstos se produjeron. Cabe señalar que en el 75% de los siniestros el coste de liquidación fue inferior a los 10.000 EUR, destinándose la mayor parte del mismo a la indemnización de los daños permanentes. En la figura 1 se muestra qué porcentaje representa cada apartado sobre el coste total de liquidación de los siniestros.



### 3. RESULTADOS

En este apartado especificamos un modelo de regresión lineal que permite determinar qué factores presentan coeficientes estadísticamente significativos en la explicación del coste de liquidación del siniestro. De la muestra de individuos utilizada en el estudio, se eliminan tres observaciones; dos de ellas porque el coste de liquidación del siniestro había sido nulo y, por tanto, fuera del objetivo de este capítulo y la tercera porque tenía un coste de liquidación muy bajo y únicamente en concepto de gastos de taxi. El tamaño muestral utilizado es, por tanto, de 25.838 observaciones. Para un total de  $n$  siniestros, el modelo de regresión lineal se define de la siguiente forma;

$$cliq_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n,$$

donde  $cliq_i$  es el coste de liquidación del siniestro  $i$ ,  $x_i$ 's son el conjunto de valores observados de las  $p$  variables explicativas para el siniestro  $i$ , los  $\beta$ 's son los parámetros no observados que se han de estimar y  $\varepsilon_i$  es el término de perturbación aleatorio asociado al siniestro  $i$ .

En el apartado anterior hemos realizado una descripción de la base de datos en la que se detalla la información observada de los siniestros. Excepto la información que nos indica el coste de liquidación (la variable dependiente), el resto de características susceptibles de influir en el coste pueden ser utilizadas como variables exógenas de la regresión. Algunas de las variables que pueden ayudar a explicar la gravedad del siniestro son cuantitativas como, por ejemplo, el tiempo transcurrido desde la apertura hasta la liquidación del siniestro, el número de días de baja, la puntuación de las secuelas, el porcentaje de corrección por perjuicios económicos, etc. Las variables cualitativas (factores) hacen referencia al género de la víctima, la provincia donde ocurrió el siniestro, la de residencia de la víctima, la posición del lesionado en el vehículo, el tipo de lesión o si el siniestro se ha liquidado por vía judicial o mediante transacción, entre otras.

El modelo de regresión lineal se basa en un conjunto de hipótesis sobre las cuales versa el grado de validez de la inferencia estadística

que posteriormente se realice. El conjunto de hipótesis en las que se basa hacen referencia a la relación lineal de la forma funcional, la correcta especificación del modelo (no omisión de variables relevantes ni inclusión de irrelevantes), matriz de regresores de rango completo (ausencia multicolinealidad) y perturbaciones esféricas distribuidas normalmente con valor esperado nulo (Greene, 1999).

Tras un detallado diagnóstico de la información descrita en el capítulo anterior, se ha procedido a la inclusión de la información en la regresión de tal forma que se garantice el cumplimiento de las hipótesis del modelo. El análisis de los resultados nos ha aconsejado categorizar las variables cuantitativas. La variable dependiente también ha requerido de una transformación. Concretamente, la hipótesis de normalidad de residuos no se cumplía al modelizar directamente el coste de liquidación del siniestro, por lo que la variable fue transformada logarítmicamente. En la tabla 3 se definen la variable endógena y los regresores que fueron finalmente incluidos en la regresión lineal.

**Tabla 3**

Descripción de las variables incluidas en el MRBM

ETIQUETAS	DESCRIPCIÓN
-----------	-------------

- *ln\_cliq*: Coste total de liquidación del siniestro (en logaritmos).
  
- o *Posición de la víctima*:

  - *peat*: Igual a 1 si la víctima era peatón; 0 en caso contrario.
  - *oc\_vc*: Igual a 1 si la víctima era ocupante del vehículo contrario; 0 en caso contrario.
  - *oc\_vp*: Igual a 1 si la víctima era ocupante del vehículo propio; 0 en caso contrario.
  - *cond*: Igual a 1 si la víctima era conductor del vehículo contrario; 0 en caso contrario.
  - *cicl*: Igual a 1 si la víctima era ciclista; 0 en caso contrario.

ETIQUETAS	DESCRIPCIÓN
-----------	-------------

○ *Gravedad de la lesión:*

- *pt\_seq0*: Igual a 1 si la puntuación por secuelas es de 0 puntos; 0 en caso contrario.
- *pt\_seq1*: Igual a 1 si la puntuación por secuelas está entre 1 y 2 puntos; 0 en caso contrario.
- *pt\_seq2*: Igual a 1 si la puntuación por secuelas está entre 3 y 5 puntos; 0 en caso contrario.
- *pt\_seq3*: Igual a 1 si la puntuación por secuelas está entre 6 y 10 puntos; 0 en caso contrario.
- *pt\_seq4*: Igual a 1 si la puntuación por secuelas está entre 11 y 30 puntos; 0 en caso contrario.
- *pt\_seq5*: Igual a 1 si la puntuación por secuelas está entre 31 y 50 puntos; 0 en caso contrario.
- *pt\_seq6*: Igual a 1 si la puntuación por secuelas está entre 51 y 75 puntos; 0 en caso contrario.
- *pt\_seq7*: Igual a 1 si la puntuación por secuelas es mayor de 75 puntos; 0 en caso contrario.
- *pt\_est0*: Igual a 1 si no tiene perjuicio estético; 0 en caso contrario.
- *pt\_est1*: Igual a 1 si tiene perjuicio estético moderado (de 1 a 12 puntos); 0 en caso contrario.
- *pt\_est2*: Igual a 1 si tiene perjuicio estético medio (de 13 a 24 puntos); 0 en caso contrario.
- *pt\_est3*: Igual a 1 si tiene perjuicio estético alto (de 25 a 50 puntos); en caso contrario.
- *dhos*: Igual a 1 si la víctima tuvo días de baja hospitalarios; 0 en caso contrario.
- *dimp*: Igual a 1 si la víctima tuvo días de baja impeditivos; 0 en caso contrario.
- *dnimp*: 1 si la víctima tuvo días de baja no impeditivos; 0 en caso contrario.

○ *Características socioeconómicas del individuo:*

- *sexle*: Igual a 1 si la víctima es hombre; 0 en caso contrario.
- *edle0*: Igual a 1 si la edad de la víctima es inferior o igual a 20 años; 0 en caso contrario.

- *edle1*: Igual a 1 si la edad de la víctima está entre los 21 y 40 años; 0 en caso contrario.
  - *edle2*: Igual a 1 si la edad de la víctima está entre los 41 y 55 años; 0 en caso contrario.
  - *edle3*: Igual a 1 si la edad de la víctima está entre los 56 y 65 años; 0 en caso contrario.
  - *edle4*: Igual a 1 si la edad de la víctima es superior a los 65 años; 0 en caso contrario.
  - *fcp0*: Igual a 1 si no hay factor corrector por perjuicios económicos; 0 en caso contrario.
  - *fcp1*: Igual a 1 si el factor corrector por perjuicios económicos está entre 1% y 10%; 0 en caso contrario.
  - *fcp2*: Igual a 1 si el factor corrector por perjuicios económicos está entre 11% y 20%; 0 en caso contrario.
  - *fcp3*: Igual a 1 si el factor corrector por perjuicios económicos es superior al 20%; 0 en caso contrario.
- *Tramitación del siniestro*:
- *slip*: Igual a 1 si el siniestro se liquida mediante decisión judicial; 0 en caso contrario.

Como se observa en la tabla, las variables explicativas pueden clasificarse en cuatro grupos. El primer grupo hace referencia a las variables que indican la posición del lesionado en el vehículo, cuando ocurrió el accidente o si era peatón o ciclista. En segundo lugar, las variables relacionadas con la gravedad de la lesión. Este grupo engloba a las variables que informan de la puntuación por secuelas otorgada a la víctima (en una escala con 8 categorías ordenadas), si sufrió perjuicio estético y en qué grado (moderado, medio o alto), o si necesitó de días de baja para la recuperación y de qué tipo. El tercer grupo recoge características socioeconómicas del individuo. En concreto, se considera el género de la víctima, la edad, y el nivel de corrección de la indemnización básica atribuible a los perjuicios económicos (a mayor nivel de ingresos mayor nivel de corrección). Finalmente, la variable que señala si la cuantificación de la indemnización fue realizada por jueces o, por el contrario, las partes llegaron a un acuerdo amistoso.

En la tabla 4 se muestran los coeficientes estimados de los parámetros.

**Tabla 4**  
Estimación de los coeficientes de la regresión

Coeficiente	$\beta$	Exp( $\beta$ )	Error estándar	p-valor
<i>constante</i>	7,707	-	0,023	0,000
<i>oc_vc</i>	0,021	1,021	0,012	0,074
<i>oc_vp</i>	-0,093	0,911	0,011	0,000
<i>cond</i>	-0,078	0,925	0,011	0,000
<i>cicl</i>	-0,107	0,899	0,030	0,000
<i>pt_seq1</i>	0,484	1,623	0,014	0,000
<i>pt_seq2</i>	0,997	2,710	0,015	0,000
<i>pt_seq3</i>	1,461	4,310	0,017	0,000
<i>pt_seq4</i>	2,044	7,721	0,018	0,000
<i>pt_seq5</i>	2,922	18,578	0,034	0,000
<i>pt_seq6</i>	3,574	35,659	0,055	0,000
<i>pt_seq7</i>	4,486	88,766	0,063	0,000
<i>pt_est1</i>	0,250	1,284	0,009	0,000
<i>pt_est2</i>	0,670	1,954	0,036	0,000
<i>pt_est3</i>	0,734	2,083	0,063	0,000
<i>dhos</i>	0,429	1,536	0,011	0,000
<i>dimp</i>	0,319	1,376	0,013	0,000
<i>dnimp</i>	-0,097	0,908	0,006	0,000
<i>sexle</i>	-0,022	0,978	0,006	0,000
<i>edle1</i>	0,034	1,035	0,009	0,000
<i>edle2</i>	0,053	1,054	0,011	0,000
<i>edle3</i>	0,021	1,021	0,013	0,106
<i>edle4</i>	-0,067	0,935	0,014	0,000
<i>fcp1</i>	0,066	1,068	0,006	0,000
<i>fcp2</i>	0,136	1,146	0,026	0,000
<i>fcp3</i>	0,231	1,260	0,052	0,000
<i>sliq</i>	0,275	1,317	0,013	0,000

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon} = 0,428 ; F_{(26, 21.855)} = 2.595 \text{ (p-valor: 0,000)}; R^2 \text{ ajustada: 0,755.}$$

Antes de interpretar los parámetros estimados en la tabla 4, debemos analizar el comportamiento de los residuos de la regresión. El análisis de los residuos nos permitirá evaluar si se satisfacen las hipótesis del modelo. En concreto, nos puede ayudar a detectar problemas de especificación de la forma funcional del modelo, es decir, que no haya

una relación lineal entre la variable dependiente y las explicativas, la no normalidad en la distribución de los residuos o que muestren una varianza no constante, así como la presencia de valores atípicos (en inglés, *outliers*). Este apartado es muy importante puesto que la existencia de alguno de estos problemas reduciría la fiabilidad de los estimadores, contrastes y predicciones realizadas (Greene, 1999).

Para llevar a cabo el diagnóstico de los residuos nos basaremos en los cuatro gráficos de la Figura 2. El primer gráfico nos sirve para contrastar la hipótesis de linealidad en la forma funcional así como de homoscedasticidad de los residuos. A simple vista no parece que los residuos muestren una pauta de comportamiento fuera de las hipótesis, localizándose aleatoriamente en torno a cero. Por lo tanto, parece adecuada la hipótesis de linealidad entre la variable dependiente y los regresores. La hipótesis de homoscedasticidad se satisface cuando la nube de residuos mantiene una amplitud constante para cualquier valor ajustado  $\hat{y}_i$ . En nuestro caso, la nube de residuos es aproximadamente constante o ligeramente decreciente a medida que aumenta  $\hat{y}_i$ . Para este estudio aceptaremos la hipótesis de homoscedasticidad del término de perturbación, dejando para posteriores investigaciones un análisis más detallado sobre la varianza. En cualquier caso, cabe señalar que asumir varianza constante cuando no lo es representa un problema de menor gravedad en comparación con incumplir el resto de hipótesis del modelo<sup>4</sup>, existiendo diferentes técnicas estadísticas para corregirlo.

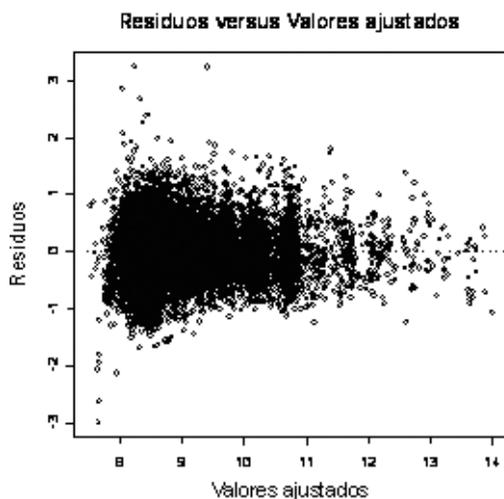
El segundo gráfico nos permite examinar si los errores se distribuyen según una distribución normal. Los residuos se extienden adecuadamente sobre el eje de 45°, excepto para las colas, donde son más anchas las de la distribución empírica de los residuos que la distribución teórica normal. Éste es un comportamiento frecuentemente observado en las variables que recogen cuantías monetarias y que ha sido suavizado al considerar el logaritmo en lugar de utilizar directamente el coste de liquidación. En general, podemos aceptar que los residuos se distribuyen normalmente.

---

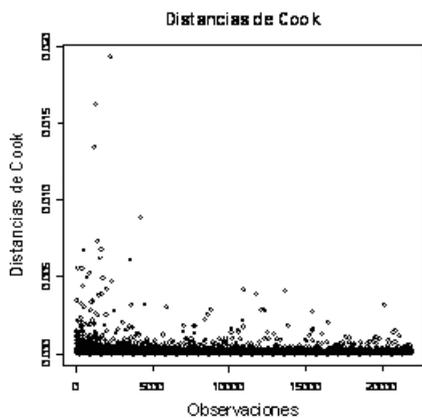
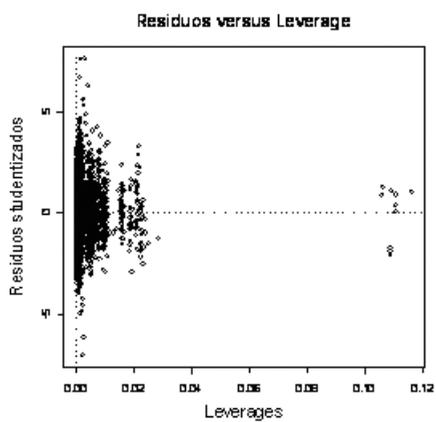
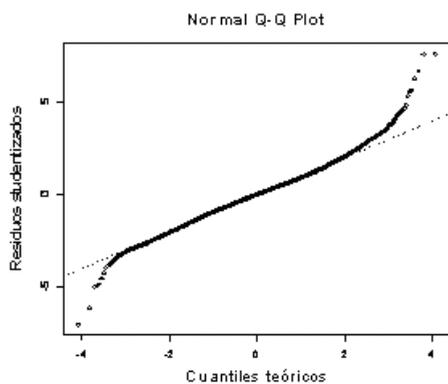
<sup>4</sup> El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios sigue siendo lineal, insesgado y consistente pero deja de ser eficiente (varianza mínima) cuando la varianza no es constante (Greene, 1999).

Los dos últimos gráficos se utilizan para detectar la presencia de observaciones influyentes en la regresión ajustada. En concreto, las observaciones serán potencialmente más influyentes cuanto más alejadas se encuentren de cero. En la parte derecha del tercer gráfico se aprecian unas pocas observaciones con valores absolutos para los puntos de *leverage* mayores al resto. Estas observaciones son las mismas que muestran unos valores más elevados de las distancias de Cook (en la parte superior izquierda del cuarto gráfico), unos residuos superiores en el primer gráfico, siendo además las que están más alejadas de la línea teórica en el gráfico Q-Q (en las colas de la distribución). No obstante, se encuentran dentro de los intervalos tanto para las distancias de Cook como para los puntos de *leverage* por lo que las mantendremos en la estimación al considerar que, aún siendo atípicos, no influyen en los resultados<sup>5</sup>. En general, de acuerdo al análisis conjunto de los gráficos, podemos afirmar que aparentemente se satisfacen todas las hipótesis y, por tanto, el modelo está correctamente definido.

**Figura 2**  
Análisis gráfico de los residuos



<sup>5</sup> En general, un punto se considera influyente si el valor de la distancia de Cook es superior a 1 (Cook y Weisberg, 1994)



Una vez aceptadas las hipótesis del modelo procedemos a la interpretación de los resultados (tabla 4). En relación a la bondad del ajuste, cabe señalar que el coeficiente de determinación ajustado<sup>6</sup> es elevado alcanzando el 0,755. El estadístico  $F^*$ , que contrasta si todos los coeficientes excepto la constante son cero, toma valor 2.595 con 26 grados de libertad en el numerador y 21.855 en el denominador, y nivel de significación del 1%. Por lo tanto, la ecuación de regresión considerada es significativa para explicar el logaritmo del coste de liquidación del siniestro<sup>7</sup>.

El contraste individual de los coeficientes de la regresión se realiza por medio del estadístico  $t$  (Greene, 1999). Todos los regresores muestran coeficientes significativos al 1%, excepto el regresor que nos señala si la víctima tiene una edad comprendida entre 55 y 65 años (*edle3*) y aquel que recoge si la víctima era ocupante del vehículo contrario en el momento del accidente (*oc\_vc*), teniendo este último un coeficiente significativo al 10%. Un primer resultado es que el coste esperado de liquidación del siniestro varía positivamente con la gravedad de las lesiones permanentes, como así lo indica el incremento progresivo del valor de los coeficientes de los regresores a medida que aumenta el nivel de puntuación por secuelas. La puntuación por perjuicios estéticos tiene un comportamiento similar al descrito para las secuelas. De este modo, el coste esperado de liquidación aumentará con el grado de perjuicio estético causado por el accidente. También se observa una relación positiva entre el porcentaje de corrección por perjuicios económicos y el coste de liquidación del siniestro. En relación a los días de baja, el haber estado hospitalizado o incapacitado durante la recuperación influye positivamente sobre el coste del siniestro. Por el contrario, el coste esperado de liquidación del siniestro disminuye cuando la víctima tuvo días de baja no impeditivos. Una posible explicación sería que esta variable estuviese recogiendo aquellos siniestros que son menos graves.

---

<sup>6</sup> El coeficiente de determinación mide la proporción del total de variación de la variable dependiente que viene representada por la variación de los regresores. Esta medida tiene el inconveniente de que aumenta por la simple inclusión de nuevos factores. El coeficiente de determinación ajustado, en cambio, tiene en cuenta el número de factores incluidos (Greene, 1999).

<sup>7</sup>  $F^* = \frac{R^2 / (k-1)}{(1-R^2) / (n-k)}$  es el estadístico que sigue una distribución  $F$  con  $k-1$  y  $n-k$  grados de libertad, donde  $n$  es el tamaño de la muestra y  $k$  el número de parámetros (Greene, 1999).

La relación entre la edad de la víctima y el coste del siniestro muestra resultados interesantes. En concreto, la edad tiene un efecto positivo sobre el coste esperado de liquidación que se intensifica hasta los 55 años. A partir de entonces decrece, llegando incluso a tener un valor negativo el coeficiente del regresor asociado a las víctimas con más de 65 años. Este comportamiento puede responder al hecho de que el lucro cesante futuro a compensar disminuya para las edades más avanzadas.

Un resultado que cabía esperar es que los siniestros liquidados por vía judicial tienen un coste superior en comparación a los que se liquidan mediante negociación. A parte de los mayores gastos (tasas judiciales, minutas de abogados, etc.) en los que se incurre, debemos tener en cuenta que las entidades aseguradoras sólo están dispuestas a recurrir a la vía judicial en siniestros considerados graves. Finalmente, señalar que los siniestros con un coste de liquidación más elevado son aquellos en los que el lesionado iba de ocupante en el vehículo contrario al del asegurado en el momento del accidente, o era un peatón.

A continuación calcularemos el efecto marginal estimado sobre el coste de liquidación del siniestro de la variación de un regresor. Cabe recordar que para una variable lognormal  $x$  se cumplen las siguientes igualdades (Greene, 1999; pág.62),

$$E(x) = \exp\left(\mu_i + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}\right)$$

$$Var(x) = \exp(2\mu_i + \sigma_\varepsilon^2) \left\{ \exp(\sigma_\varepsilon^2) - 1 \right\}$$

donde  $\mu_i$  es el valor esperado de la distribución lognormal, y  $\sigma_\varepsilon$  la desviación estándar residual. Por lo tanto, el coste esperado de liquidación del siniestro base<sup>8</sup> se computa como el valor de la expresión  $\exp(7,707 + 0,428^2/2)$  que es igual a 2.437,17 EUR, donde 7,707 es el valor de la constante y 0,428 el de la desviación estándar residual.

<sup>8</sup> Es el siniestro para el que los regresores toman valor cero excepto las categorías de referencia de las variables dicotomizadas, que toman valor uno (*peaton*, *pt\_seq0*, *pt\_est0*, *edle0*, *fcp0*).

Para calcular la variación esperada del coste de liquidación ante la variación de la variable  $x_k$ , para  $k=1, \dots, p$ , se debe multiplicar el valor esperado  $E(x)$  por  $\exp(\beta_k)$ . En la tercera columna de la tabla 4 se muestra el valor de la exponencial elevada al coeficiente estimado. A modo de ejemplo, supongamos que queremos calcular como varía el coste esperado de liquidación del siniestro base cuando la víctima es un hombre en vez de una mujer y el resto de características no varían. En este caso, deberemos multiplicar el coste medio estimado de liquidación por 0,978 o, lo que es lo mismo, el coste esperado de liquidación se reduce en un 2,2% hasta alcanzar los 2.388,43 EUR.

Si el mismo siniestro base se liquida por vía judicial en vez de negociación ( $slq=1$ ), el coste esperado de liquidación aumenta en promedio en más de un 30% hasta los 3.192,69 EUR. En este sentido, destacar que el regresor que ejerce un mayor impacto sobre el coste esperado de liquidación es el de la categoría que nos indica que el individuo tiene una puntuación por secuelas mayor de 75 puntos ( $pt\_seq7=1$ ). En concreto, cuando la víctima tiene más de 75 puntos por secuelas, el coste de liquidación base se multiplica por 88,766 veces. Este resultado es, por otro lado, esperable ya que la categoría de referencia de la puntuación por secuelas es aquella que indica que el individuo tiene 0 puntos.

Lógicamente, cuando varía más de un regresor en relación a las características del siniestro base, el coste esperado de liquidación se obtiene como la multiplicación de sus efectos marginales. De este modo, si por ejemplo queremos calcular cuál será el coste esperado de liquidación de un siniestro en el que la víctima es un hombre con más de 75 puntos por secuelas y la liquidación se realizó por sentencia judicial, siendo el resto de características iguales a las del siniestro base, se estima como la multiplicación de  $2.437,17 \times 0,978 \times 1,317 \times 88,766$ , que asciende a un total de 278.647,75 EUR.

### 3. CONCLUSIONES

La futura reforma del el Sistema para la valoración de los daños y perjuicios causados a las personas en accidentes de circulación previsiblemente aumentará algunas de las actuales partidas indemnizatorias en los siniestros con daños corporales. A partir de una cartera real de siniestros, en este artículo hemos analizado los factores observados que influyen en el coste de liquidación de los mismos.

Los resultados obtenidos en este artículo ofrecen una guía que ayuda a las compañías a estimar el coste esperado de liquidación de los siniestros. Del mismo modo, mediante la estimación de los efectos marginales de los factores, puede conocer el impacto esperado de cada uno de los regresores sobre su coste de liquidación.

Entre otros resultados, destacamos que la mayor incidencia sobre el coste esperado de liquidación del siniestro la ejercen aquellos regresores relacionados con la puntuación por secuelas. En cambio, otros factores como el hecho de que la víctima haya sufrido lesiones temporales, perjuicio estético y/o económico derivado de la lesión tienen un impacto mucho menor sobre el coste esperado de liquidación del siniestro. Por consiguiente, cualquier reforma del baremo que pase por incrementar la indemnización del punto por secuelas será la que mayor impacto tenga sobre el coste esperado de liquidación del siniestro.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la ayuda recibida de la Fundación Mapfre, así como las ayudas del Ministerio de Ciencia e Innovación-FEDER ECO2008-01223/ECON y SEJ2007-63298.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cook, R. D., Weisberg, S. (1994). *An Introduction to Regression Graphics*. Hoboken NJ: John Wiley.

Derrig, R., Weisberg, H. (2004). "Determinants of Total Compensation for Auto Bodily Injury Liability Under No-Fault: Investigation, Negotiation and the Suspicion of Fraud". *Insurance and Risk Management*, 71(4), 633-662.

García, C. (2002). "La anunciada inconstitucionalidad del nuevo sistema de valoración de daños personales derivados de los accidentes de circulación." *Revista internauta de práctica jurídica*, **10**.

Greene, W.H. (1999). *Análisis Económico*. Tercera Edición. Madrid: Prentice Hall Iberia.

Xiol, J.A. (2008). "Necesidad de un cambio en el Sistema de Valoración del daño corporal" En: *XVI Congreso de Responsabilidad Civil*, 6-7 marzo, Barcelona.

## Ponencia 13

# ESTUDIO DE LA OPTIMALIDAD DE LOS CONTRATOS DE REASEGURO RESPECTO DE MEDIDAS GENERALES DEL RIESGO

Alejandro Balbás, Beatriz Balbás y Antonio Heras

## RESUMEN

Se denomina *Problema del Reaseguro Óptimo* al problema consistente en determinar el contrato de reaseguro que resulte ser óptimo respecto de algún criterio de minimización del riesgo elegido previamente. Si bien los primeros artículos dedicados a este tema datan de los años sesenta del pasado siglo e incluso se pueden rastrear hasta los años cuarenta, durante los últimos diez años el tema ha conocido una revitalización, ya que se han publicado un gran número de artículos proponiendo contratos óptimos en los que se utilizan diferentes medidas del riesgo (casi siempre medidas de desviación). En el presente artículo pretendemos alcanzar resultados con un mayor nivel de generalidad, ya que estudiamos las condiciones que deben cumplir los contratos óptimos cuando el riesgo se mide mediante cualquier medida de desviación y asimismo mediante cualquier medida acotada por la media. Los contratos óptimos se estudian a la vez desde el punto de vista de la compañía cedente, de la aceptante o de ambas a la vez. Asimismo estudiamos con detenimiento dos importantes contratos particulares, el *Stop-Loss* y el *Cuota-Parte*.

## Palabras Clave:

Reaseguro Óptimo, Medidas del Riesgo, Stop-Loss, Cuota-Parte.

## 1. EL PROBLEMA DEL REASEGURO ÓPTIMO

El *Reaseguro* se define como la transferencia de riesgos de una compañía aseguradora (la “cedente”) a otra (la reaseguradora o “aceptante”), a cambio evidentemente del pago de una prima. El *Problema del Reaseguro Óptimo* consiste en la determinación del contrato de reaseguro que resulta ser óptimo respecto de algún criterio elegido previamente.

La clasificación más habitual divide a los contratos de reaseguro en dos tipos, los *reaseguros proporcionales* y los *no proporcionales*. El reaseguro proporcional más simple es el llamado *Cuota-Parte*, en el que se transfiere a la reaseguradora un porcentaje de la siniestralidad. Entre los reaseguros no proporcionales el más famoso es el *Stop-Loss*, en el cual se cede a la reaseguradora la parte de la siniestralidad total que excede de un cierto límite prefijado. Evidentemente hay muchos otros contratos de reaseguro, aunque los dos que acabamos de citar son los más conocidos y estudiados.

Aunque toda operación de reaseguro involucra necesariamente a dos actores, la compañía cedente del riesgo y la compañía aceptante, casi todos los artículos han tratado el tema desde el punto de vista de la cedente. Un enfoque bastante habitual trata de minimizar alguna medida del riesgo cedido después del reaseguro, sujeta a ciertas condiciones sobre las primas. El primer artículo que adoptó este enfoque se debe a Borch (1960), quien demostró que el reaseguro Stop-Loss minimiza la varianza de la siniestralidad retenida, suponiendo que las primas se calculan de acuerdo con el principio del valor esperado. Poco tiempo después, Arrow (1963) mostró que el Stop-Loss maximiza la utilidad esperada de la riqueza final de un asegurador averso al riesgo, siempre que las primas sigan calculándose de acuerdo al mismo principio. Como maximizar la utilidad  $u(x)$  equivale a minimizar la pérdida  $w(x)=-u(-x)$ , ambos enfoques son semejantes en el sentido de que procuran minimizar una cierta medida del riesgo, sujetándose a la restricción del cálculo de primas mediante el principio del valor esperado.

Las investigaciones posteriores siguieron la misma línea de trabajo, intentando tomar en consideración medidas del riesgo y/o principios de

cálculo de primas más generales, y demostrando en algunos casos la optimalidad de contratos diferentes del Stop-Loss (entre los cuales casi nunca se encuentra el Cuota-Parte). En los últimos años se han publicado un gran número de artículos al respecto. Así, por ejemplo, Kaluszka (2001) asume todavía la varianza de la siniestralidad retenida como medida del riesgo que debe ser minimizada, pero considera diferentes principios de cálculo de primas como el de la desviación típica o el de la varianza. Gajec y Zagrodny (2004) consideran diferentes medidas del riesgo tanto simétricas como asimétricas, tales como la desviación absoluta esperada y la varianza truncada de la siniestralidad retenida, bajo el principio de primas de la desviación típica. Young (1999) maximiza la utilidad esperada de la riqueza final bajo el principio de primas de Wang. Kaluszka (2005) considera varias medidas convexas del riesgo y varios principios convexos para el cálculo de primas. Cai y Tan (2007), y Cai, Tan, Weng y Zhang (2008) utilizan como medidas del riesgo el Valor en Riesgo VaR y el Valor en Riesgo Condicional (CVaR), bajo el principio del valor esperado. Finalmente, Balbás, Balbás y Heras (2009), asumiendo de nuevo el principio del valor esperado para el cálculo de primas, encuentran condiciones necesarias y suficientes de optimalidad para medidas del riesgo muy generales como son todas las medidas de desviación y todas las acotadas por la media.

En el presente artículo seguiremos el enfoque de Balbás, Balbás y Heras (2009) tomando en consideración no solo el punto de vista de la compañía cedente sino también el de la aceptante. Asimismo dedicaremos una atención especial al reaseguro Cuota-Parte, que como hemos dicho anteriormente difícilmente se obtiene como contrato óptimo desde el punto de vista de la compañía cedente. Demostraremos que sí puede ser un contrato óptimo en condiciones muy generales cuando se combinan los intereses de ambas compañías, la cedente y la aceptante.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos el espacio de probabilidad  $(\Omega, F, \mu)$  compuesto por el conjunto de estados de la naturaleza  $\Omega$ , la  $\sigma$ -álgebra  $F$  y la medida de probabilidad  $\mu$ . Consideremos también un par de números conju-

gados  $p$  y  $q$  ( $p \in [1, \infty), q \in (1, \infty]$ ) tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ). Sea  $L^p$  el espacio de Banach de las variables aleatorias  $y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $E(|y|^p) < \infty$ . Según el Teorema de Representación de Riesz,  $L^q$  es el espacio dual de  $L^p$ .

De ahora en adelante supondremos que el funcional  $\rho: L^p \rightarrow \mathbb{R}$  representa la medida del riesgo elegida por las aseguradoras. Por tanto, asumiremos que ambas compañías, la cedente y la aceptante, eligen la misma medida del riesgo.

Definamos el conjunto convexo  $\Delta_\rho = \left\{ z \in L^q : -E(yz) \leq \rho(y), \forall y \in L^p \right\}$

De acuerdo con los resultados expuestos en Rockafellar, Uryasev y Zabaranin (2006), si la medida del riesgo  $\rho$  es continua y, o bien es acotada por la media, o bien es una medida de desviación, entonces  $\Delta_\rho$  es  $\sigma(L^q, L^p)$ -compacto y además se verifica que

$$\rho(y) = \text{Max} \left\{ -E(yz) / z \in \Delta_\rho \right\} \quad (1)$$

Además, para las medidas acotadas por la media se verifica que  $\rho(y) \geq -E(y), \forall y \in L^p$  y también que  $E(z) = 1, \forall z \in \Delta_\rho$ , mientras que para las medidas de desviación se verifica que  $\rho(y) \geq 0, \forall y \in L^p$  y también que  $E(z) = 0, \forall z \in \Delta_\rho$ . Ejemplos particularmente interesantes de las medidas anteriores son el *Valor en Riesgo Condicional CVaR* tal y como se define en Rockafellar, Uryasev y Zabaranin (2006), la *transformación de potencia dual* y la *medida de Wang* definidas en Wang (2000), y las *p-desviaciones* y *p-semidesviaciones* (entre las cuales figuran la desviación típica y la semidesviación típica, que se corresponden con el caso particular  $p=2$ ).

En adelante asumiremos que se satisface (1), que  $\Delta_\rho$  es compacto, que  $E(z) = E \geq 0, \forall z \in \Delta_\rho$  siendo  $E$  constante, y que  $\rho(y) \geq -E E(y), \forall y \in L^p$ . Como hemos visto, para las medidas acotadas por la media se tiene

que  $\tilde{E} = 1$ , mientras que para las medidas de desviación se tiene que  $\tilde{E} = 0$ .

Bajo los supuestos anteriores, es muy fácil demostrar que, si  $\beta$  es constante, entonces

$$\rho(y + \beta) = \rho(y) - \beta \tilde{E} \quad (2)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \rho(y + \beta) &= \text{Max} \left\{ -E((y + \beta)z) : z \in \Delta_\rho \right\} = \\ &= \text{Max} \left\{ -E(yz) : z \in \Delta_\rho \right\} - \beta \tilde{E} = \rho(y) - \beta \tilde{E} \end{aligned}$$

De ahora en adelante, la variable aleatoria

$$y_0 \in L_+^P = \left\{ y \in L^P : \mu(y \geq 0) \right\}$$

representará la siniestralidad total antes de reaseguro de la compañía cedente durante un cierto periodo de tiempo, cuyas características se suponen conocidas. Llamaremos asimismo  $y \in L^P$  a la siniestralidad retenida por la cedente, siendo evidentemente  $0 \leq y \leq y_0$ . Asumiremos que las primas se calculan mediante el principio del valor esperado, siendo  $k_0$  y  $k$  ( $>1$ ) los recargos a la prima pura utilizados por la compañía cedente y la aceptante, respectivamente.

En estas condiciones, la compañía cedente cobrará a los asegurados una prima  $k_0 E(y_0)$  a cambio de hacerse cargo de la siniestralidad  $y_0$ , y la compañía reaseguradora cobrará una prima  $k E(y_0 - y)$  a la cedente a cambio de hacerse cargo de la siniestralidad  $y_0 - y$ . Al final del periodo de tiempo considerado, el resultado de la cedente será

$$k_0 E(y_0) - k E(y_0 - y) - y = (k_0 - k) E(y_0) + k E(y) - y$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2), la medida del riesgo de la cedente será

$$\rho(k E(y) - y) - \tilde{E} (k_0 - k) E(y_0)$$

Puesto que  $\tilde{E}(k_0 - k)E(y_0)$  es constante, la compañía cedente que busca reasegurar para reducir su riesgo deberá resolver el problema de optimización

$$\begin{aligned} \text{Min } & \rho(kE(y) - y) \\ & y \leq y_0 \\ & S - E(y) \leq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

donde  $S \geq 0$  es una cota inferior de la esperanza de la siniestralidad retenida (es necesario considerar esta restricción para evitar que la solución óptima que minimiza el riesgo sea la solución obvia consistente en ceder la totalidad de la siniestralidad).

Por otro lado, el resultado final de la reaseguradora será  $kE(y_0 - y) - (y_0 - y)$ , y la medida de su riesgo será  $\rho(kE(y_0 - y) - (y_0 - y))$ . Si llamamos  $x = y_0 - y$  a la siniestralidad a la que tiene que hacer frente la compañía aseguradora, vemos que para reducir su riesgo deberá resolver un programa análogo a (3):

$$\begin{aligned} \text{Min } & \rho(kE(x) - x) \\ & x \leq y_0 \\ & S' - E(x) \leq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

(donde  $S'$  tiene la misma interpretación que  $S$ ).

Por tanto, los problemas que enfrentan ambas compañías, cedente y reaseguradora, son análogos y tienen la misma formulación matemática, por lo que las soluciones también deben ser las mismas. El programa (3) de minimización del riesgo de la cedente ha sido estudiado en Balbás, Balbás y Heras (2009), quienes han formulado condiciones necesarias y suficientes para la solución óptima. A continuación resumimos brevemente sus resultados.

### 3. EL REASEGURO ÓPTIMO DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA CEDENTE

En general, la medida del riesgo  $\rho$  no es diferenciable, y lo mismo ocurre con el programa (3). Ahora bien, teniendo en cuenta (1), el programa (3) es equivalente al siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \theta + E((kE(y) - y)z) \geq 0, \forall z \in \Delta_\rho \\ & y \leq y_0 \\ & S - E(y) \leq 0 \\ & \theta \in \mathbb{R}, y \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Es claro que  $y$  resuelve (3) si y solamente si existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $(\theta, y)$  resuelve (5), en cuyo caso será  $\theta = \rho(kE(y) - y)$ . A su vez, (5) es equivalente a (6):

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta \\ & \theta + E(y(k\tilde{E} - z)) \geq 0, \forall z \in \Delta_\rho \\ & y \leq y_0 \\ & S - E(y) \leq 0 \\ & \theta \in \mathbb{R}, y \geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

La ventaja del programa (6) es que se trata de un programa lineal, que puede ser resuelto aplicando técnicas de programación en espacios de dimensión infinita tales como las expuestas en Luenberger (1969) o Anderson y Nash (1987). La primera restricción de (6) está valorada en el espacio de Banach  $C(\Delta_\rho)$  de funciones continuas sobre  $\Delta_\rho$ , mientras que la segunda está valorada en  $L^p$ . Como sus duales son  $M(\Delta_\rho)$  (conjunto de medidas  $\sigma$ -aditivas sobre la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\Delta_\rho$ ) y  $L^q$ , respectivamente, la función Lagrangiana será

$$L : \mathbb{R} \times L^p \times M(\Delta_\rho) \times L^q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$L(\theta, y, \nu, \lambda, \tau) = \theta \left( 1 - \int_{\Delta_\rho} d\nu(z) \right) + \int_{\Delta_\rho} E \left[ yz - k \tilde{E} y \right] d\nu(z) + E(y\lambda) - E(y_0\lambda) + S\tau - E(y)\tau$$

De acuerdo con Luenberger (1969), el elemento

$(\nu, \lambda, \tau) \in M(\Delta_\rho) \times L^q \times \mathbb{R}$  es factible dual si y sólo si está en el cono no negativo  $M_+(\Delta_\rho) \times L_+^q \times \mathbb{R}_+$  y además

$$\text{Inf} \left\{ L(\theta, y, \nu, \lambda, \tau) : \theta \in \mathbb{R}, y \in L_+^p \right\} > -\infty$$

En tal caso, el ínfimo anterior es el objetivo dual en  $(\nu, \lambda, \tau)$ . Por tanto, el programa dual de (6) es

$$\begin{aligned} & \text{Max } S\tau - E(y_0\lambda) \\ & \int_{\Delta_\rho} E \left[ y \left( z + \lambda - k \tilde{E} - \tau \right) \right] d\nu(z) \geq 0, \forall y \in L_+^p \\ & \nu \in P(\Delta_\rho), \lambda \in L_+^q, \tau \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{7}$$

(Donde  $P(\Delta_\rho)$  denota los elementos de  $M(\Delta_\rho)$  que son probabilidades).

Finalmente, teniendo en cuenta el Lema 2 de Balbás, Balbás y Heras (2009), el programa (7) resulta ser equivalente al siguiente programa (8):

$$\begin{aligned} & \text{Max } S\tau - E(y_0\lambda) \\ & z + \lambda - k \tilde{E} - \tau \geq 0 \\ & z \in \Delta_\rho, \lambda \in L_+^q, \tau \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{8}$$

Tomando (8) como dual de (3), las *Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker* resultan ser las siguientes:

$$\begin{aligned}
\theta^* + E \left[ y^* \left( k \tilde{E} - z^* \right) \right] &= 0 \\
\lambda^* \left( y^* - y_0 \right) &= 0 \\
\tau^* \left( E(y^*) - S \right) &= 0 \\
y^* \left( z^* + \lambda^* - k \tilde{E} - \tau^* \right) &= 0 \\
\theta^* + E \left[ y^* \left( k \tilde{E} - z \right) \right] &\geq 0, \forall z \in \Delta_p \\
y^* &\leq y_0 \\
S - E(y^*) &\leq 0 \\
z^* + \lambda^* - k \tilde{E} - \tau^* &\geq 0 \\
\theta^* \in \mathbb{R}, y^* \in L_+^p, z^* \in \Delta_p, \lambda^* \in L_+^q, \tau^* \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

Estas condiciones resultan ser condiciones necesarias y suficientes de optimalidad siempre que se verifique la ausencia del llamado “hueco de dualidad”, lo cual sucede en numerosos casos (como, por ejemplo, cuando se cumple la *Condición de Slater*). A su vez, es fácil demostrar que estas condiciones son equivalentes a las siguientes:

**Teorema 1:** Sea  $y^* \in L^p$  (3)-factible y tal que  $\mu(y^* > 0) = 1$ . Entonces  $y^*$  resuelve el programa primal (3) si y solamente si existen  $\tau^* \in \mathbb{R}_+$  y  $z^* \in \Delta_p$  tales que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
E \left( y^* z^* \right) &\geq E \left( y^* z \right) \forall z \in \Delta_p \\
z^* &\leq k \tilde{E} + \tau^* \\
\left( k \tilde{E} + \tau^* - z^* \right) \left( y_0 - y^* \right) &= 0 \\
\tau^* \left( E(y^*) - S \right) &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

En tal caso,

$$\theta^* = E\left(y^*(z^* - k\tilde{E})\right), y^*, z^*, \lambda^* = k\tilde{E} + \tau^* - z^*, \tau^* \text{ resuelven (6) y (8).}$$

Las condiciones (9) se comprueban sin grandes dificultades en algunos casos particulares de contratos de reaseguro y de medidas del riesgo. El caso particular del reaseguro Cuota-Parte es especialmente fácil de comprobar. Los resultados son concluyentes: este tipo de reaseguro no puede ser óptimo cuando la medida del riesgo de la compañía cedente es una medida acotada por la media o una medida de desviación (véase el teorema 6 de Balbás, Balbás y Heras (2009)). En el primer caso, las condiciones (9) implican entre otras cosas que debe ocurrir que  $k=1$ , es decir, que el recargo de seguridad de la compañía reaseguradora debe ser nulo, lo que no resulta razonable. En el segundo caso, en el que la medida del riesgo es una medida de desviación, entonces (9) implica entre otras cosas que la siniestralidad total antes de reaseguro de la compañía cedente ( $y_0$ ) debe ser constante, lo que tampoco resulta razonable.

A diferencia del reaseguro Cuota-Parte, el reaseguro Stop-Loss resulta ser óptimo a menudo. Este reaseguro se define matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y &= y_0, \text{ si } y_0 \leq M \\ y &= M, \text{ si } y_0 > M \end{aligned}$$

(siendo  $M > 0$  la prioridad). Llamemos  $y_0^M$  a la expresión anterior. Si elegimos, por ejemplo, la *desviación típica* como medida del riesgo,

$$\rho(y) = \sigma_2(y) = \left(E\left(|y - E(y)|^2\right)\right)^{1/2} = \|y - E(y)\|_2$$

En este caso se demuestra que

$$\Delta_\rho = \Delta_2 = \left\{z \in L^2 : \|z\|_2 \leq 1, E(z) = 0\right\}$$

Entonces el Teorema 9 de Balbás, Balbás y Heras (2009) muestra que el contrato óptimo será un reaseguro Stop-Loss, en donde la prioridad se calcula de forma que se sature la restricción correspondiente al precio del reaseguro. Este resultado está estrechamente relacionado con el obtenido en Borch (1960).

Asimismo, un resultado análogo se puede demostrar en el caso de que se utilice como medida del riesgo otra importante medida de desviación, la *desviación absoluta*, definida como

$$\rho(y) = \sigma_1(y) = E(|y - E(y)|)$$

Aunque en este caso pueden existir también otros reaseguros óptimos cuya formulación matemática es parecida al Stop-Loss (tipo Change-Loss, por ejemplo).

Consideremos ahora una famosa medida del riesgo acotada por la media, el *Valor en Riesgo Condicional CVaR*. Se demuestra que

$$\Delta_\rho = \left\{ z \in L^\infty : 0 \leq z \leq \frac{1}{\mu_0}, E(z) = 1 \right\}$$

Siendo  $\mu_0$  el nivel de confianza elegido, que supondremos menor que  $\frac{1}{k}$ . En este caso, el teorema 11 de Balbás, Balbás y Heras (2009) demuestra que existen reaseguros Stop-Loss óptimos. En efecto, esto sucede si se cumple que  $E(y_0^M) = S$  y además  $\mu(y_0 > M) \leq \frac{1}{k}$ . Si no se cumple esta condición y se tiene que  $\mu(y_0 > M) > \frac{1}{k}$ , basta aumentar M hasta encontrar  $M' > M$  tal que  $E(y_0^{M'}) > S$  y además  $\mu(y_0 > M') = \frac{1}{k}$ , algo que siempre se puede conseguir.

Podemos concluir, entonces, la optimalidad del reaseguro Stop-Loss al menos en los importantes casos particulares en los que el riesgo se mide mediante la desviación típica, la desviación absoluta y el Valor en Riesgo Condicional.

#### 4. EL REASEGURO ÓPTIMO DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA COMPAÑÍA REASEGURADORA

Hemos visto que los programas (3) y (4) que deben resolver la compañía cedente y la reaseguradora son análogos, de forma que las conclusiones que hemos obtenido para la primera se verificarán también para la segunda. En particular, el reaseguro Cuota-Parte, que nunca resulta ser óptimo desde el punto de vista de la cedente, tampoco lo será desde el punto de vista de la reaseguradora. Por otro lado, el reaseguro Stop-Loss será óptimo para la reaseguradora en los mismos casos en que lo es para la cedente.

Ahora bien, en el programa (3) buscamos la “y” óptima, mientras que en el programa (4) buscamos la “x” óptima, en donde  $x = y_0 - y$ . Sabemos que el reaseguro Stop-Loss en función de la siniestralidad cedida  $x$  se define como

$$\begin{aligned}x &= y_0, \text{ si } y_0 \leq M \\x &= M, \text{ si } y_0 > M\end{aligned}$$

Si lo expresamos en función de la siniestralidad  $y$  retenida por la cedente, obtenemos

$$\begin{aligned}y &= 0, \text{ si } y_0 \leq M \\y &= y_0 - M, \text{ si } y_0 > M\end{aligned}$$

Esta expresión resulta ser, en cierto modo, opuesta o complementaria al Stop-Loss, razón por la cual podríamos denominar al reaseguro correspondiente un *Stop-Loss Inverso*.

#### 5. COMBINACIÓN DE LOS PUNTOS DE VISTA DE LAS COMPAÑÍAS CEDENTE Y REASEGURADORA

Como sabemos, la compañía cedente trata de minimizar su riesgo resolviendo el programa (3), mientras que la reaseguradora persigue la misma finalidad resolviendo (4). Si suponemos que ambas compañías utilizan la misma medida del riesgo  $\rho$ , podemos combinar ambos puntos de vista en un programa multiobjetivo como el siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Min } & (\rho(kE(y) - y), \rho(kE(x) - x)) \\
& x + y = y_0 \\
& E(y) \geq S \\
& x, y \geq 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Para calcular los óptimos de Pareto de (10), podemos elegir un coeficiente  $\alpha \in (0,1)$  y plantearnos el programa equivalente

$$\begin{aligned}
\text{Min } & \alpha\rho(kE(y) - y) + (1 - \alpha)\rho(kE(x) - x) \\
& x + y = y_0 \\
& E(y) \geq S \\
& x, y \geq 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Es bien conocido que podemos obtener los óptimos de Pareto de (10) resolviendo el programa (11) mientras hacemos variar el coeficiente  $\alpha$  en el intervalo  $(0,1)$ .

A su vez, la propiedad de homogeneidad permite concluir que (11) es equivalente a

$$\begin{aligned}
\text{Min } & \rho[\alpha(kE(y) - y)] + \rho[(1 - \alpha)(kE(x) - x)] \\
& x + y = y_0 \\
& E(y) \geq S \\
& x, y \geq 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Teniendo en cuenta (1), el programa (12) resulta ser equivalente a

$$\begin{aligned}
\text{Min } & \theta_1 + \theta_2 \\
& \theta_1 + E[\alpha(kE(y) - y)z] \geq 0, \forall z \in \Delta_\rho \\
& \theta_2 + E[(1 - \alpha)(kE(x) - x)z] \geq 0, \forall z \in \Delta_\rho \\
& x + y = y_0 \\
& E(y) \geq S \\
& x, y \geq 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Siguiendo la misma metodología que en el apartado 3, es posible demostrar que el programa dual resulta ser

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \tau S - E(\lambda y_0) \\
 & \alpha z_1 - \alpha k \tilde{E} + \lambda - \tau \geq 0 \\
 & (1 - \alpha) z_2 - (1 - \alpha) k \tilde{E} + \lambda \geq 0 \\
 & z_1, z_2 \in \Delta_\rho, \lambda \in L^q, \tau \in \mathbb{R}^+
 \end{aligned} \tag{14}$$

Apoyándonos en el primal (13) y el dual (14), las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker resultan ser

$$\begin{aligned}
 & \theta_1^* + E \left[ y^* \alpha (k \tilde{E} - z_1^*) \right] = 0 \\
 & \theta_1^* + E \left[ y^* \alpha (k \tilde{E} - z) \right] \geq 0, \forall z \in \Delta_\rho \\
 & \theta_2^* + E \left[ x^* (1 - \alpha) (k \tilde{E} - z_2^*) \right] = 0 \\
 & \theta_2^* + E \left[ x^* (1 - \alpha) (k \tilde{E} - z) \right] \geq 0, \forall z \in \Delta_\rho \\
 & \tau^* (E(y^*) - S) = 0 \\
 & E(y^*) \geq S \\
 & y^* \left( \alpha z_1^* - \alpha k \tilde{E} + \lambda^* - \tau^* \right) = 0 \\
 & \alpha z_1^* - \alpha k \tilde{E} + \lambda^* - \tau^* \geq 0 \\
 & x^* \left( (1 - \alpha) z_2^* - (1 - \alpha) k \tilde{E} + \lambda^* \right) = 0 \\
 & (1 - \alpha) z_2^* - (1 - \alpha) k \tilde{E} + \lambda^* \geq 0 \\
 & x^* + y^* = y_0 \\
 & \theta_1^*, \theta_2^* \in \mathbb{R}; x^*, y^* \in L_+^p; z_1^*, z_2^* \in \Delta_\rho; \lambda^* \in L^q; \tau^* \in \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

A su vez, estas condiciones son equivalentes a las siguientes (siempre que se verifique que  $\mu(y^* > 0) = 1, \mu(x^* > 0) = 1$ ):

$$\begin{aligned}
 E(y^* z_1) &\geq E(y^* z) \quad \forall z \in \Delta_\rho \\
 E(x^* z_2) &\geq E(x^* z) \quad \forall z \in \Delta_\rho \\
 \alpha z_1^* - \alpha k \tilde{E} + \lambda^* - \tau^* &= 0 \\
 (1 - \alpha) z_2^* - (1 - \alpha) k \tilde{E} + \lambda^* &= 0 \\
 \tau^* (E(y^*) - S) &= 0 \\
 x^* + y^* &= y_0 \\
 E(y_0) &\geq S \\
 x^*, y^* \in L_+^p; z_1^*, z_2^* \in \Delta_\rho; \lambda^* \in L^q; \tau^* \in \mathbb{R}^+
 \end{aligned} \tag{15}$$

Estas condiciones necesarias y suficientes de optimalidad suelen ser en general bastante difíciles de comprobar. Existe, sin embargo, un caso en que se simplifican mucho: precisamente el caso del reaseguro Cuota-Parte en el que la siniestralidad retenida es un porcentaje de la siniestralidad total, es decir,

$$\begin{aligned}
 y &= \beta y_0 \\
 x &= (1 - \beta) y_0 \\
 (\beta \in (0, 1))
 \end{aligned}$$

En este caso es fácil comprobar que se verifican las condiciones (15), siempre que sean  $\alpha = \frac{1}{2}$  y  $\beta > \frac{S}{E(y_0)}$ , tanto para medidas de desviación como para medidas acotadas por la media. Curiosamente, el reaseguro Cuota-Parte, que nunca resulta óptimo desde el punto de vista individual de cada compañía, resulta ser un óptimo de Pareto del programa multiobjetivo que toma en consideración los intereses de ambas compañías.

## 6. CONCLUSIONES

En este artículo se encuentran condiciones necesarias y suficientes de optimalidad que deben cumplir los contratos de reaseguro cuando la compañía aseguradora pretende utilizarlos para minimizar sus riesgos. El grado de generalidad del análisis ha sido elevado, ya que se han considerado un gran número de medidas del riesgo, a saber: todas las medidas de desviación, y todas las medidas acotadas por la media. Entre ellas se cuentan, por ejemplo, la desviación y la semidesviación típica, la medida de Wang y el Valor en Riesgo Condicional. El análisis se lleva a cabo tanto desde el punto de vista de la compañía cedente como de la aceptante. Se ha analizado, además, la optimalidad de los dos contratos más conocidos de reaseguro, el reaseguro Stop-Loss y el reaseguro Cuota-Parte. Se demuestra que el reaseguro Stop-Loss resulta a menudo óptimo desde el punto de vista de la cedente, mientras que la optimalidad del reaseguro Cuota-Parte exige tener en cuenta los intereses tanto de la cedente como de la aceptante.

## 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, E. J.; Nash, P. (1987) *Linear Programming in Infinite-Dimensional Spaces*, John Wiley and Sons, New York.

Arrow, K. J. (1963) Uncertainty and the Welfare of Medical Care, *American Economic Review* 53, 941-973.

Balbás, A.; Balbás, B.; Heras, A. (2009) Optimal Reinsurance with General Risk Measures, aceptado para su publicación en *Insurance: Mathematics and Economics*.

doi:10.1016/j.insmatheco.2008.11.008

Borch, K. (1960) An attempt to determine the optimum amount of stop-loss reinsurance, *Transactions of the 16<sup>th</sup> International Congress of Actuaries I*, 597-610.

Cai, J.; Tan, K.T. (2007) Optimal Retention for a Stop Loss Reinsurance under the VaR and CTE Risk Measures, *ASTIN Bulletin* 37, 1, 93-112.

Cai, J.; Tan, K.S.; Weng, C.; Zhang, Y. (2008) Optimal Reinsurance under VaR and CTE Risk Measures, *Insurance: Mathematics and Economics* 43, 185-196.

Gajec, L.; Zagrodny, D. (2004) Optimal Reinsurance under General Risk Measures, *Insurance: Mathematics and Economics* 34, 227-240.

Kaluszka, M. (2001) Optimal Reinsurance under Mean-Variance Premium Principles, *Insurance: Mathematics and Economics* 28, 61-67.

Kaluszka, M. (2005) Optimal Reinsurance under Convex Principles of Premium Calculation, *Insurance: Mathematics and Economics* 36, 375-398.

Luenberger, D. G. (1969) *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley and Sons, New York.

Rockafellar, R. T.; Uryasev, S.; Zabarankin, M. (2006) Generalized Deviations in Risk Analysis, *Finance & Stochastics* 10, 51-74.

Wang, S. S. (2000) A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks, *Journal of Risk and Insurance* 67, 15-36.

Young, V. R. (1999) Optimal Insurance under Wang's Premium Principle, *Insurance: Mathematics and Economics* 25, 109-122.



## Ponencia 14

# IMPLICACIONES DEL USO GENERALIZADO DEL MODELO DE REGRESIÓN LOGÍSTICA EN LA DETECCIÓN DE FRAUDE EN SEGUROS DE AUTOMÓVILES<sup>9</sup>

Edinson Caicedo Cerezo

### ABSTRACT

Partiendo de una revisión de la literatura sobre detección de fraude en seguros de automóviles y considerando el uso generalizado de un modelo como la aplicación del modelo que se ha diseñado en un país a asegurados en otros países u regiones, sin considerar en la construcción del modelo, la información específica de los asegurados del país o región en que se aplica, en este artículo se compara las probabilidades predichas de fraude obtenidas a través de un modelo de regresión logística con información local con las obtenidas a través de un modelo extranjero. Con ese propósito se considera información de 2.403 reclamaciones de asegurados y se utilizan pruebas estadísticas no paramétricas e indicadores de bondad de ajuste de los modelos. Los resultados del estudio indican a un nivel de significación del 5%, que no se pueden considerar iguales las probabilidades de fraude estimadas por ambos modelos. Por tanto se sugiere ser muy cuidadoso

---

<sup>9</sup> Este documento hace parte del trabajo de investigación que se realiza, dentro de la fase de formación del doctorado en Empresa, en el Master Oficial de Investigación en Empresa Finanzas y Seguros de la Universidad de Barcelona - España y se efectuó bajo la dirección de las profesoras Montserrat Guillén Estany y Mercedes Ayuso Gutiérrez del Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española, RISC-IREA, Universidad de Barcelona. Mis agradecimientos a las profesoras Montserrat Guillén y Mercedes Ayuso por los aportes realizados y las observaciones hechas al documento. También agradezco a los demás profesores del Master por los conocimientos transmitidos que sirvieron para robustecer este trabajo.

cuando en sistemas de gestión de riesgos de seguros de automóviles, las compañías con presencia en otros países estén motivadas a implementar, en dichas regiones o países, modelos de detección de fraude diseñados previamente, ya sea por ellas mismas, o por otras firmas consultoras en el mercado.

### **Palabras Claves:**

Fraude, Regresión Logística, Seguros de Automóviles Jel Codes: C12, C14, C25, G22

## **1. INTRODUCCIÓN**

En el mercado de los seguros, distintas compañías a nivel global están motivadas a ofrecer sus productos más allá de sus fronteras; en España por lo menos algunas compañías que atienden el mercado de seguros directos tienen presencia en otros países de Europa, Asia y América

En su sistemas de gestión de los riesgos de seguros, estas compañías podrían estar motivadas a implementar modelos de detección de fraudes diseñados por ellas mismas o desarrollados por firmas consultoras en el mercado; es decir generalizar el uso del modelo, lo cual consistiría en la aplicación del modelo que se ha diseñado en un país a asegurados en otros países u otras regiones, sin considerar en la construcción del modelo, la información específica de los asegurados del país o región en que se aplica.

Una pregunta que surge, es porqué una compañía generaliza el uso de un modelo?. La respuesta a la anterior pregunta tendría que ver con que la compañía es nueva en la población de asegurados que va a atender o por la estandarización que ella desea tener de sus sistemas de gestión de riesgos o simplemente porque la compañía no dispone de los datos suficientes de la población de asegurados para construir un modelo con información de ellos mismos.

El supuesto sería entonces, que la generalización del modelo contribuiría con el logro de los objetivos del sistema de gestión de riesgo de la compañía: minimizar las pérdidas, que por ejemplo en el tema que se trata en este documento, se incurran por la exposición a fraude en seguros de automóviles.

Si se comparte esta idea, directores de compañías de seguros, que por alguna razón extienden sus modelos más allá de sus fronteras, podrían estar interesados en conocer la respuesta a la pregunta: ¿cuales son las implicaciones que tiene al generalizar el uso del modelo en los sistemas de detección de fraude?.

En este documento, la respuesta a la pregunta anterior se aborda en dos dimensiones: la primera, hace referencia a la calidad en la explicación y predicción del modelo a generalizar comparada con el modelo local. La segunda dimensión, relacionada con la primera, aborda la cuantificación de las pérdidas estimadas por exposición a fraude y los costos estimados de la investigación del fraude que realizan los centros de investigaciones de siniestros (CIS) de las compañías.

De esta forma, considerando un modelo de regresión logística, el documento tiene como propósito ilustrar a través de un trabajo empírico las implicaciones que podría tener para la compañía aseguradora, predecir las probabilidades de fraude cuando generaliza el uso de dicho modelos.

En la revisión de la literatura efectuada en este trabajo, no se encontraron publicaciones enfocadas en lo que se denomina en este trabajo el uso generalizado de modelos; por lo tanto este artículo contribuye a generar información con datos reales sobre las consecuencias de utilizar un sistema de detección de fraude en seguros de automóviles en poblaciones de asegurados distintas. Se ha elegido el sector de los seguros de automóviles por contar con información disponible en ese sector, pero el análisis podría extenderse a otros sectores.

El documento se ha organizado en seis secciones: la primera corresponde a esta introducción; la segunda sección, describe el problema de la detección de fraude; en la tercera sección se hace un breve

repaso a la literatura sobre fraude en seguros de automóviles; en la cuarta sección se aborda la metodología empleada en el estudio y la quinta sección presenta los resultados y la discusión de los mismo. Finalmente en la sexta sección se presentan las conclusiones del trabajo.

## **2. EL PROBLEMA DE LA DETECCIÓN DE FRAUDE**

En la literatura sobre seguros de automóviles, el fraude se define como el intento de ocultar o falsear la realidad sobre una reclamación a fin de obtener un beneficio económico del contrato entre el asegurador y el asegurado [3], [6], [19] y [48].

La gestión para la identificación de fraude involucra sistemas de prevención y de detección de los mismos [43] y [46]. La prevención de fraude, describe las medidas que una entidad toma para impedir el fraude antes de que ocurra [42] y [48]. En contraste, la detección de fraude involucra identificar patrones de comportamiento en reclamaciones fraudulentas, o de la utilización normal del asegurado para detectar operaciones sospechosas.

El problema en la detección de fraude, radica en el análisis de perfiles de usuario que permitan observar el comportamiento de un asegurado, con el fin de detectar anomalías en un reclamo [27] y [35].

Si la prevención no ha cumplido con su objetivo entonces entra en escena la detección; para ello la mayoría de los sistemas de detección actuales ofrecen dos tipos de alerta por calificación probabilística y alerta por cumplimiento de reglas [27].

En el primer tipo de alertas podría usarse modelos diseñados por las mismas empresas u ofrecidos por empresas de sistemas de información que operan en el mercado asegurador. El problema radica en que una compañía de seguros con presencia en otros países podría estar motivada a utilizar de manera generalizada dichos modelos en cualquiera de sus filiales para la detección de fraude.

Este trabajo tiene como objetivo ilustrar algunas posibles implicaciones que dicho uso podría tener en el momento de predecir las probabilidades que un asegurado cometa fraude, cuando se usa, por ejemplo, un modelo de regresión logística.

### **3. REVISIÓN A LA LITERATURA SOBRE SISTEMAS Y MODELOS DE DETECCIÓN DE FRAUDE EN SEGUROS DE AUTOMÓVILES**

El uso generalizado de los modelos, podría estar motivado sobre un razonamiento epistemológico en que se basa toda generalización científica: cuando se tienen dos poblaciones, una de referencia y otra que es objeto de estudio de la cual se ha tomado la muestra, las inferencias que se hacen con la muestra para la población objeto de estudio son aplicables a la población de referencia, puesto que la población de referencia y la población objeto de estudio tienen características muy similares.

Según el anterior razonamiento, una generalización de un modelo de detección de fraude más allá de las fronteras de donde fue diseñado, estaría justificado por que se partiría de la idea, que los patrones de comportamiento hacia el fraude de los asegurados de una región u otra son similares.

Quizás, el razonamiento que subyace en una generalización científica, opera indudablemente en el área de la salud, pero si compartimos la idea que en seguros, el comportamiento de los asegurados a cometer fraude está determinado por la maximización de su función de utilidad [40], entonces antes de generalizar el uso del modelo tendríamos que estar seguros de los comportamientos de los asegurados de las regiones donde el modelo es objeto de aplicación.

En el enfoque de la utilidad como una medida esencial del beneficio monetarios que obtiene un individuo al cometer el fraude [29], se considera la utilidad esperada por un individuo a cometer fraude ( $E[U(F)]$ ) como la suma de la utilidad que obtiene un individuo cuando el fraude es cometido ( $U^f$ ) y la desutilidad que obtiene cuando es descubierto haciendo el

fraude ( $U^P$ ) ponderada por la probabilidad que el fraude sea descubierto ( $\pi$ ); es decir :

$$E[U(F)] = (1 - \pi) \cdot U^f + \pi \cdot U^P.$$

En seguros de automóviles, estudiar el comportamiento de los asegurados con el fin de cuantificar la probabilidad de cometer fraude o de desarrollar estrategias para prevenirlo o detectarlo ha sido objeto de múltiples investigaciones. Una revisión a la literatura permite clasificar trabajos realizados por distintos autores en tres grupos o categorías.

El primer grupo hace referencia a trabajos orientados a la conceptualización sobre fraude [3], [6], [10], [18], [19], [35] y [46] y otros orientados a los procesos de auditoría en relación con la detección del fraude [11], [17], [22], [27], [39], [42], [43] y [48].

En un segundo grupo, se podrían incluir los trabajos orientados al estudio del comportamiento del asegurado a cometer fraude [24], [29], [30], [34] y [40]

En el tercer grupo, estarían los trabajos que se orientan a aplicar distintos modelos probabilísticos para la detección de fraude. Las aplicaciones más comunes son los modelos de regresión logística [1], [2], [4], [8], [14], [15], [17], [23], [41] y [50]; modelos bayesianos [7] y [52]; el análisis de componentes principales [12]; técnicas de minerías de datos [9]; metodología borrosa [20] y [45] y redes neuronales [13] y [49].

En los trabajos anteriores aunque se pueden encontrar algunos que hacen referencia a la comparación de modelos [13] y [50] o al estado del arte sobre la aplicación de modelos [51], no se encontró trabajos publicados en el sentido de lo que aquí se denomina uso generalizado de los modelos.

Por lo tanto, el aporte de este trabajo se orienta a proporcionar información, sobre las implicaciones que podría tener el uso generalizado de modelos cuando se aplica la regresión logística.

En su forma más general en el modelo de regresión logística<sup>10</sup>, cuando se utiliza para la detección de fraude, se supone que existe una variable no observable ( $Y_i^*$ ) que representa la utilidad que obtiene un individuo  $i$  al cometer fraude [40].  $Y_i^*$  puede ser explicada a través de un conjunto de factores o variables de la forma:

$$Y_i^* = \mathbf{b}' X_i + u_i,$$

donde  $X_i$  es un vector de variables explicativas y  $\mathbf{b}$  el vector de parámetros a estimar y  $u_i$  el término de perturbación del modelo.  $Y_i^*$  es inobservable, lo que observamos es una variable dicotómica:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_i^* \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Interesa estimar la  $E(Y_i^* / X_i) = \mathbf{b}' X_i$  pero sólo podemos calcular  $E(Y_i / X_i)$ . Por lo tanto:

$$P_i = E(Y_i / X_i) = F(\mathbf{b}' X_i),$$

donde  $F(\mathbf{b}' X_i)$  es la función de distribución acumulada de  $u_i$ . El modelo de regresión logística queda especificado cuando la función de distribución  $F(\mathbf{b}' X_i)$  toma la forma:

$$F(\mathbf{b}' X_i) = \frac{\exp(\mathbf{b}' X_i)}{1 + \exp(\mathbf{b}' X_i)}.$$

Es necesario mencionar que se ha seleccionado el modelo de regresión logística ya que entre los trabajos publicados que se incluyen en la presente sección, se observa que son los modelos de uso más frecuente para la medición de fraude en seguros de automóviles.

---

<sup>10</sup> Una explicación detallada del modelo de regresión logística se presenta en [26], [28] y [44]

## 4. METODOLOGÍA

El uso generalizado de modelos de regresión logística podría tener implicaciones en dos sentidos. En primer lugar, haciendo referencia a la capacidad explicativa que tendría el modelo, podría ser que los signos de los coeficientes de las variables que se utilizan en la cuantificación de las probabilidades de cometer fraude fueran distintos de un modelo a otro. También, la significación estadística de los coeficientes de las variables explicativas podría ser distintas. Para observar lo anterior debería de disponerse de información de las variables explicativas utilizadas en la construcción de los modelos y de la significación estadística de sus coeficientes.

En segundo lugar, las implicaciones del uso generalizado podrían verse en la capacidad predictiva del modelo; es decir, la bondad del ajuste que tiene el modelo para discriminar entre los que comenten fraude o no. En este caso, solo se necesita de disponer de las probabilidades de fraude estimadas para los individuos por cada modelo y conocer de ante mano cuales de los individuos han cometido o no fraude.

En la gestión de riesgo es importante obtener estimaciones de la esperanza, varianza, valor en riesgo y valor en riesgo condicional de la pérdida total de una cartera; en el caso de reclamaciones en seguros de automóviles, las probabilidades de fraude estimadas por un modelo, también tienen sus implicaciones prácticas en el momento de la cuantificación de la pérdida total por exposición a fraude.

A continuación se presenta la estrategia metodológica que se siguió para medir la implicaciones con relación al carácter explicativo y predictivo y de cuantificación de los indicadores de la pérdida total por exposición a fraude cuando se trata de la generalización del uso de un modelo de regresión logística.

#### 4.1. Medición de la capacidad explicativa y predictiva de los modelos

Denotemos como  $P_{im}$  a la probabilidad estimada de cometer fraude del individuo  $i$  en el modelo  $m$ . También, para comprensión de la metodología aplicada, se denotaran como:  $P_{im}^f$  y  $P_{im}^{fi}$  a la probabilidad de fraude asignada a los individuos  $i$  que cometió fraude ( $f$ ) y al individuo  $i$  que no cometió fraude ( $nf$ ) en el modelo  $m$  respectivamente.

Por tanto, debería esperarse que si se fuera a generalizar el uso de un modelo de una región a otra, partiendo que se tiene como base un modelo en la región donde se generaliza el uso, entonces: 1) los modelos deberían tener una capacidad de discriminación entre los que comenten fraude o los que no cometen fraude, 2) las probabilidades predichas por ambos modelos se esperarían que fueran iguales y 3) debería tener mejor bondad de ajuste el modelo para el cual se generaliza el uso.

Para medir si los modelos tienen capacidad de discriminación entre los individuos que comenten fraude o no, se comparó dentro de cada modelo las probabilidades estimadas de fraude a través de la prueba de Wilcoxon y la Prueba de Man y Winney ([25] y [47]). En esta parte, la hipótesis a validar es que para un modelo determinado no hay diferencias significativas entre las probabilidades estimadas de los individuos que cometen fraude y los que no comenten fraude; es decir

$$H_o : \overline{P_m^f} = \overline{P_m^{fi}} \text{ .vs. } H_a : \overline{P_m^f} \neq \overline{P_m^{fi}} \\ m = 1,2 ,$$

donde  $\overline{P_m^f}$  corresponde al promedio de las  $P_{im}^f$  y  $\overline{P_m^{fi}}$  corresponde al promedio de las  $P_{im}^{fi}$ .

Obtenidas las probabilidades de fraude predichas por los modelos, se validó la hipótesis de igualdad entre ellas, a través de la prueba de Friedman y la Prueba de Kendall [47]. La hipótesis a validar es que no existe diferencias estadísticas significativas en las probabilidades

predichas por los modelos; en la notación estadística se escribe la anterior hipótesis de la siguiente forma:

$$H_o : P_{i1} = P_{i2} \text{ .vs. } H_a : P_{i1} \neq P_{i2} \text{ .}$$

Con relación a la medición de las bondad del ajuste especificadas por los modelos se utilizaron las tablas de clasificación [26] y las curvas ROC ([5], [32] y [37]).

Aunque no se presenta en este trabajo información de carácter explicativo para el modelo local ni para el modelo extranjero, al rechazar la hipótesis de que las probabilidades predichas por los modelos son iguales, basándonos en el principio lógico del **Modus Tolems**<sup>11</sup>, podríamos rechazar la hipótesis que el carácter explicativo de los modelos es idéntico, es decir, que ambos utilizan las misma variables, tienen igual significancia y los coeficientes de las variables son de la misma magnitud y presentan el mismo signo.

#### 4.2 Medición de los indicadores de la pérdida total por exposición a fraude

Las probabilidades estimadas por los modelos local y extranjero, tienen sus implicaciones prácticas en el momento de la cuantificación de la pérdida total por exposición a fraude. Se supone que una compañía de seguros de automóviles le interesa cuantificar la pérdida total exposición a fraude en una cartera conformada las reclamaciones, es decir, que la compañía posee una cartera con  $n$  reclamaciones y que las probabilidades que una reclamación presente fraude son las estimadas por el modelo local o el modelo extranjero.

---

<sup>11</sup> El principio lógico del **Modus Tolems**, usado con frecuencia en epistemología de la ciencias sostiene que si se tienen dos proposición **P** y **Q**, y si **P** implica a **Q** entonces la negación de **Q** implica la negación de **P**. En este trabajo la proposición **P** hace referencia a que las características explicativas de los modelos es idéntica y la proposición **Q** a que las probabilidades predichas por los modelos son iguales. Luego sería lógico pensar que si las características explicativas de los modelos es idéntica (**P**) entonces las probabilidades predichas por los modelos deben ser iguales (**Q**), luego si las probabilidad predichas por los modelos no son iguales (negación de **Q**) entonces es porque las características explicativas de los modelos no son idénticas (negación de **P**).

Ahora en los sistemas de detección de fraude operan los centros de investigaciones de siniestros (CIS) [3]; en lo que corresponde al fraude, estos centros estarían justificados en la medida que una vez identificado el fraude se logrará una tasa de recuperación o la totalidad de la cuantía del mismo.

Si en una reclamación  $i$ , denominamos la tasa de recuperación lograda por los CIS como  $R_i$ , el ratio de pérdida si se produce el fraude estaría dado por  $1 - R_i$ . Un primer escenario sería suponer que el ratio de pérdida por fraude es cierto y común para todos los reclamaciones en la cartera. El segundo escenario se asumiría que el ratio de recuperación sigue algún tipo de distribución pero que de alguna manera podríamos estimar la esperanza de la tasa de recuperación ( $E(R_i)$ ) y su varianza ( $V(R_i)$ ). El ratio de recuperación debe entenderse como la tasa que resulta de las acciones que realiza el centro de investigaciones de siniestros de la compañía después que el fraude se ha identificado.

Denotemos a  $q_i$  como la probabilidad de fraude estimada por un modelo( local o extranjero) y sea  $X_i$  la variable aleatoria (v.a) que representa la pérdida asociada al fraude en la reclamación  $i$ , entonces podríamos escribir<sup>12</sup>[16] y [21]:

$$X_i = B_i \cdot I_i ,$$

donde  $I_i$  es una variable aleatoria de Bernouilli y  $B_i$  es otra variable aleatoria positiva que representa la pérdida asociada a cada reclamo si el fraude ocurre.  $B_i$  se expresa como:

$$B_i = X_i | I_i = 1 ,$$

e

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } q_i \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - q_i = p_i \end{cases} .$$

<sup>12</sup> El valor de  $X_i X_i$  que daría determinado por la diferencia entre el valor de la reclamación con fraude y lo que representaría el valor de la misma reclamación sin fraude.

La esperanza y la varianza de  $I_i$  :  $E[I_i]$  y  $V[I_i]$  están dadas por:

$$E[I_i] = q_i \quad \text{y} \quad V[I_i] = q_i \cdot p_i V[B_i] = q_i \cdot p_i \cdot E^2[B_i] .$$

La esperanza de  $X_i$  ( $E[X_i]$ ), su varianza ( $V[X_i]$ ) y su coeficiente de asimetría ( $As[X_i]$ ) en función de la esperanza, varianza y momentos de la variable  $B_i$  , estarían dados por [16] y [21]:

$$E[X_i] = q_i \cdot E[B_i] ,$$

$$V[X_i] = q_i \cdot V[B_i] + p_i \cdot q_i \cdot E^2[B_i] ,$$

$$\mu_3(X_i) = q_i \cdot \alpha_3(B_i) - 3 \cdot q_i^2 \cdot \alpha_2(B_i) \cdot \alpha_1(B_i) + 2 \cdot q_i^3 \alpha_1^3(B_i) ,$$

$$As[X_i] = \frac{\mu_3(X_i)}{(V[X_i])^{3/2}} .$$

En el escenario donde se supone que el ratio de pérdida por fraude es cierto y común para todos los reclamaciones en la cartera, la varianza  $V[B_i]$  es cero y se pueden obtener muy fácilmente los momentos ordinarios de la variable  $B_i$  .

En el segundo escenario se asume que el ratio de recuperación sigue una distribución Beta ( $R_i \sim B(a, b)$  ); luego los estimadores de  $a$  y  $b$  por el método de los momentos estarían dados por [16] y [21]:

$$a = E[R_i] \cdot \left( \frac{E[R_i] \cdot (1 - E[R_i])}{V[R_i]} - 1 \right) \quad \text{y} \quad b = \frac{1 - E[R_i]}{E[R_i]} \cdot a .$$

De este modo los  $B_i = E_i \cdot (1 - R_i)$  también siguen una distribución Beta de la forma :  $B_i = E_i \cdot (1 - R_i) \sim B(a^* = b, b^* = a, 0, E_i)$ ; donde las  $E_i$  son los montos de las exposiciones por pérdida debido a fraude para cada reclamación. En este caso la esperanza, varianza y asimetría de las  $B_i$  están dadas por:

$$E[B_i] = \frac{a^*}{a^*+b^*} \cdot E_i ,$$

$$V[B_i] = \frac{a^* b^*}{(a^*+b^*)^2 (a^*+b^*+1)} \cdot E_i^2 \quad \text{y}$$

$$As[B_i] = \frac{2(b^*-a^*)}{(a^*+b^*+2)} \cdot \sqrt{\frac{a^*+b^*+1}{a^* b^*}} .$$

Dado que para obtener el momento centrado de tercer orden de las  $X_i$  se requieren los momentos ordinarios de primer, segundo y tercer orden de las  $B_i$ , entonces estos últimos se estimaran a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\alpha_1(B_i) = E[B_i] ,$$

$$\alpha_2(B_i) = V[B_i] + (E[B_i])^2$$

y

$$\alpha_3(B_i) = \mu_3(B_i) + 3 \cdot \alpha_1(B_i) \cdot \alpha_2(B_i) - 2 \cdot \alpha_1^3(B_i) ,$$

donde

$$\mu_3(B_i) = As[B_i] \cdot (V[B_i])^{\frac{3}{2}} .$$

Es de interés estimar la esperanza, varianza y momento central de tercer orden asociado con cada reclamación y además, la esperanza, la varianza, asimetría, el valor en riesgo (VaR) y el valor en riesgo condicional de la pérdida total por exposición a fraude. Para obtener los indicadores antes mencionados se considera el modelo individual de riesgo bajo supuestos de Distribución Normal, Distribución Normal-Power y por simulación.

Específicamente si denotamos la pérdida total por exposición a fraude como  $S$  entonces:

$$S = \sum_{i=1}^n X_i ,$$

Luego al considerar que las reclamaciones son independientes, la esperanza de  $S$  ( $E[S]$ ), su varianza ( $V[S]$ ) y coeficiente de asimetría ( $As[S]$ ) [16] y [33].

$$E[S] = \sum_{i=1}^n E[X_i] .$$

$$V[S] = \sum_{i=1}^n V[X_i] .$$

$$As[S] = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_3(X_i)}{(\sum_{i=1}^n V[X_i])^{\frac{3}{2}}} .$$

Luego suponiendo que  $S \sim N(E[S], V[S])$  entonces el valor en riesgo de ( $VaR_s$ ) y su valor en riesgo condicional ( $TVaR_s$ ) estarían dados por [16], [38] y [31]:

$$VaR_s(\alpha) = Z_\alpha \cdot \sqrt{V[S]} + E[S]$$

y

$$TVaR_s(\alpha) = \frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha} \cdot \sqrt{V[S]} + E[S] ,$$

donde  $z_\alpha$  y  $\phi(\cdot)$  son el cuantíl y la densidad de la distribución Normal Estándar para el nivel de confianza  $\alpha$  respectivamente.

Utilizando una aproximación a Normal-Power con el fin de corregir por asimetría, el valor en riesgo de  $S$  ( $VaR_s$ ) y su valor en riesgo condicional ( $TVaR_s$ ) estarían dados por [16] y [31]:

$$VaR_s(\alpha) = \left[ \left( Z_\alpha + \frac{\gamma_1}{6} (Z_\alpha^2 - 1) \right) \cdot \sqrt{V[S]} \right] + E[S]$$

y

$$TVaR_s(\alpha) = \left[ \frac{\phi(z_\alpha)}{1-\alpha} \cdot \left( (1 + Z_\alpha \cdot \frac{\gamma_1}{6}) \cdot \sqrt{V[S]} \right) \right] + E[S] ,$$

donde  $\gamma_1$  es el coeficiente de asimetría de  $S$ .

### 4.3 Datos y fuentes de Información

En este estudio se utilizan los datos que corresponden a una muestra de 2403 reclamaciones presentadas en el año 2000 en el mercado asegurador en España [27]. De las 2.403 reclamaciones, 174 se identificaron como fraude. Para estimar las probabilidades de fraude los modelos usan como variables dependiente la reclamación (la cual toma el valor de 0 cuando es catalogado como no fraude y 1 cuando es fraude).

Como variables explicativas se utilizan unas que hacen referencia al asegurado y otras a la reclamación: identificación de la reclamación, daños de terceros incendio, robo y roturas de vidrios, aceptación del accidente por parte del otro conductor, uso de sistemas de bonificación por puntos, el automóvil es de uso privado del asegurado, el accidente fue en motocicleta, edad del asegurado cuando ocurre el accidente, genero del asegurado, número de reclamaciones previas realizadas por el asegurado, número de años que el asegurado lleva con la compañía, el accidente ocurre el fin de semana, reclamación no reportado en la compañía dentro de la primera semana después que ocurre.

Mediante el empleo de las variables anteriores como variables explicativas, a través de un modelo de regresión logística se estimo las probabilidades fraude; estas probabilidades se identifican como las probabilidades del modelo local.

Con la misma información, se solicitó a una compañía extranjera, que también usa un modelo de regresión logística, que con su modelo y con los datos de las variables mencionadas anteriormente, se estimaran las probabilidades de cometer fraude. Las probabilidades obtenidas para los individuos a través del modelo de la dicha compañía se identifican como moldeo extranjero<sup>13</sup>.

Para obtener los indicadores y validar las hipótesis que se mencionaron en la sección anterior, se utilizó el SPSS y R ; los resultados se presentan a continuación.

---

<sup>13</sup> Por acuerdo con las compañías local y extranjera, no esta permitido divulgar los nombres en este trabajo de investigación.

## 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 5.1 Capacidad predictiva y explicativa de los modelos

- *Estadísticas básicas de los modelos*

Para hacer las comparaciones de las probabilidades de fraude se reescalo<sup>14</sup> el modelo extranjero y se efectuó, para modelo local, ponderaciones<sup>15</sup> para las reclamaciones que habían presentado fraude de tal manera que ellas representaran el 0.1%, 0.5%, 1%, 5%, 7.2%, 10% y el 88.6% de los casos en la muestra.

El cuadro 3 presenta las estadísticas básicas de las probabilidades de fraude del modelo local, del modelo extranjero, modelo extranjero reescalado y del modelo local para las distintas ponderaciones de los fraude en la muestra.

Las probabilidades de fraude mínima, en el modelo extranjero, se estima en 0.01% y la máxima en 4.17%, mientras que en el modelo local las probabilidades mínimas y máximas estimadas son del 0.23% y el 27.07% respectivamente.

<sup>14</sup> Las probabilidades reescaladas se obtuvieron a través de la siguiente expresión:

$$P_i^{MR} = \frac{\overline{P}_{ML}}{\overline{P}_{ME}} \cdot P_i^{ME},$$

donde  $P_i^{MR}$ , es la probabilidad de fraude para la reclamación  $i$  en el modelo extranjero reescalado,  $P_i^{ME}$ , es la probabilidad de fraude para la reclamación  $i$  en el modelo extranjero;  $\overline{P}_{ME}$  y  $\overline{P}_{ML}$  son las probabilidades promedios de fraude en el modelo extranjero y en el modelo local respectivamente.

<sup>15</sup> Para cada nivel de ponderación se creó una variable de ponderación  $W_\pi$  dada por :

$$W_\pi = \begin{cases} \frac{n \cdot (1 - \pi)}{n - f}, & \text{si la reclamación no presentó fraude} \\ \frac{n \cdot \pi}{f}, & \text{si la reclamación presentó fraude} \end{cases}$$

donde  $n$ ,  $f$  y  $\pi$  son el número de reclamaciones en la muestra, número de reclamaciones que presentaron fraude y nivel de ponderación para las reclamaciones que presentaron fraude respectivamente.

**Cuadro 3.**  
**Estadísticas Básicas Probabilidades Estimadas de los Modelos**

<b>Modelo</b>	<b>Casos</b>	<b>Fraudes</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>	<b>Media</b>	<b>Desv. tip.</b>	<b>Asimetría</b>	<b>Curtosis</b>
Prob. Modelo Local	2403	174	0.23%	27.07%	7.24%	3.57%	1.576	2.554
Prob. Modelo Extranjero	2403	14	0.01%	4.17%	0.58%	0.81%	2.523	6.067
Prob. Modelo Extranjero Reescalado	2403	174	0.06%	52.29%	7.25%	10.12%	2.523	6.067
PI Pond 0.1% - Modelo Local	2403	2	0.00%	0.47%	0.10%	0.06%	1.840	3.788
PI Pond 0.5% - Modelo Local	2403	12	0.01%	2.32%	0.51%	0.28%	1.824	3.702
PI Pond 1% - Modelo Local	2403	24	0.03%	4.56%	1.02%	0.56%	1.803	3.599
PI Pond 5% - Modelo Local	2403	121	0.15%	19.99%	5.03%	2.58%	1.653	2.884
PI Pond 7.2% - Modelo Local	2403	173	0.23%	26.95%	7.20%	3.55%	1.577	2.560
PI Pond 10% - Modelo Local	2403	239	0.33%	34.61%	9.93%	4.67%	1.487	2.200
PI Pond 88.6% - Modelo Local	2403	2078	22.14%	97.79%	86.49%	5.75%	-1.373	7.997

Fuente: Datos Obtenidos del SPSS. UB. Febrero de 2009

Las probabilidades promedios de fraude en el modelo local, modelo extranjero y modelo extranjero reescalado son equivalentes al 7.24%, 0.58% y 7.25% respectivamente y sus desviaciones estándar son del 3.57%, 0.81% y 10.12%, significando lo anterior que existe mayor variabilidad, en términos de coeficiente de variación, en las probabilidades asignadas en el modelo extranjero que en el modelo local.

Como se puede observar del cuadro 3, las características de las probabilidades de fraude que se describen a través del coeficiente de asimetría y de la curtosis, anuncian que las probabilidades de fraude estimadas por el modelo local son distintas a las estimadas por el modelo extranjero y modelo extranjero reescalado.

Lo que se esperaría de la aplicación del modelo local o del modelo extranjero en una región, es que ambos modelos deberían estar midiendo lo mismo, es decir, los modelos deben tener consistencia interna. Las características reflejadas por los modelos a través de las estadísticas básicas, indican que sus distribuciones de probabilidades podrían considerarse distintas. Lo que implicaría una gran diferencia en las acciones que se deberían tomar, con relación en la gestión de riesgo para la detección del fraude, si se tomaran como referencia las probabilidades de fraudes estimadas con el modelo extranjero.

- *Capacidad de discriminación y bondad de ajuste de los modelos*

Se ha manifestado que el uso generalizado de un modelo implicaría que el modelo a generalizar debería tener una capacidad de discrimi-

nación entre los asegurados que comenten fraude o los que no comenten fraude. Con este propósito se presenta los resultados de la prueba de Wilcoxon y la prueba de Mann-Whitney en el cuadro 4.

Los resultados de la prueba indican a un nivel de significación estadística del 1%, que no hay diferencias en el modelo extranjero y el modelo extranjero reescalado en las probabilidades de fraude estimadas entre los individuos que cometieron fraude y los que no cometieron fraude; no sucede lo mismo con el modelo local. Estos resultados indican además que el modelo extranjero no tiene una capacidad de discriminación entre los individuos que comenten fraude y los individuos que no comenten fraude.

**Cuadro 4.**  
**Test de Comparación de Probabilidades y Bondad de Ajuste de los Modelos**

Modelo	Test U de Mann-Whitney , W de Wilcoxon		Rangos Test de Friedman y W de Kendall (*)	Curva ROC (**)			
	Z	Sig. asintót. (bilateral)		Área	Sig. asintótica	LI (95%)	LS (95%)
Prob. Modelo Extranjero	-0.07348	0.94142	2.27258	0.49833	0.94144	0.45445	0.54221
Prob. Modelo Extranjero Reescalado	-0.07348	0.94142	5.70121	0.49833	0.94144	0.45445	0.54221
PI Pond 0.5% - Modelo Local	-5.86925	0.00000	2.69996	0.63340	0.00000	0.58911	0.67768
PI Pond 1% - Modelo Local	-5.87016	0.00000	4.07615	0.63341	0.00000	0.58913	0.67769
PI Pond 5% - Modelo Local	-5.87798	0.00000	5.51727	0.63359	0.00000	0.58938	0.67780
PI Pond 7.2% - Modelo Local	-5.87634	0.00000	6.64253	0.63355	0.00000	0.58938	0.67773
PI Pond 10% - Modelo Local	-5.87929	0.00000	7.77362	0.63362	0.00000	0.58949	0.67775
PI Pond 0.1% - Modelo Local	-5.86840	0.00000	1.31669	0.63337	0.00000	0.58908	0.67767
PI Pond 88.6% - Modelo Local	-5.90623	0.00000	9.00000	0.63423	0.00000	0.59155	0.67692

Fuente: Datos Obtenidos del SPSS. UB. Febrero de 2009

(\*) Sig. asintót. (Friedman y Kendall) 0.0

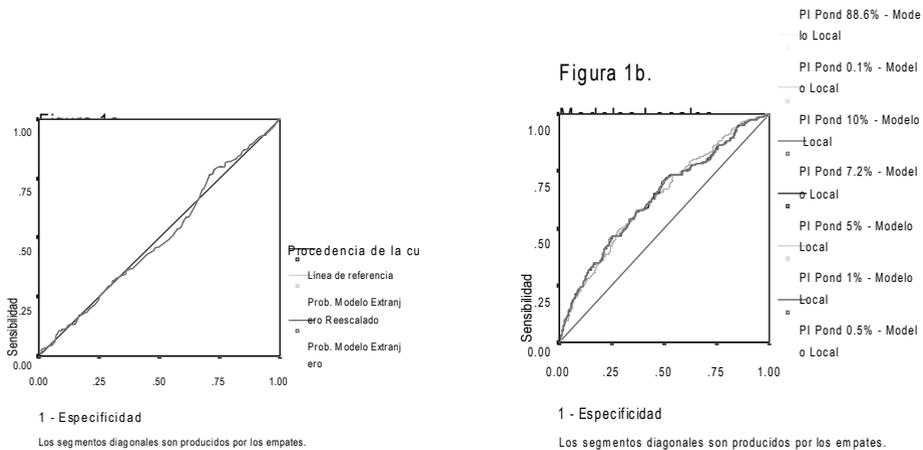
(\*\*) Hipótesis nula: área verdadera = 0,5

De otro lado la prueba de rangos de Friedman y W de Kendall indican al 1% de significación estadística que no se podría considerar que las probabilidades de fraude estimadas con el modelo extranjero sean iguales a las estimadas con el modelo local (cuadro 4); es de resaltar que la significancia asintótica(p-value) de la prueba es del 0%.

Con relación a la bondad del ajuste de los modelos, en el cuadro 4 se presentan el área bajo la curva ROC. Bajo la hipótesis nula se esperaría que un modelo con una buena bondad de ajuste presentara un área bajo la curva ROC superior al 50%; en el modelo extranjero dicha área se estima en un 49.8% y en el modelo local en un 63.3%; es decir la calidad de la bondad del ajuste esta a favor del modelo local.

Lo anterior se confirma cuando se observan los resultados de la significancia de la prueba el área bajo la curva ROC; a un nivel de signi-

ficación del 1% no se podría rechazar la hipótesis que el área bajo la curva ROC de las probabilidades de fraude estimadas por el modelo extranjero es inferior o igual al 50%. Con igual nivel de significación estadística no podría manifestarse lo mismo para el modelo local; es decir, el área bajo la curva ROC para el modelo local podría considerarse superior al 50%.



En las figuras 1a y 1b, se ilustra el área bajo curva ROC del modelo extranjero y de los modelos locales respectivamente; dichas curvas se han trazado teniendo en cuenta la curva de referencia del 50%. Como se puede observarse de la figura 1a, la curvas ROC tanto del modelo extranjero como del modelo extranjero reescalado está en los límites de línea de referencia del 50% y en gran parte del trayecto de curva, esta se sitúa por debajo de la línea de referencia, confirmando lo que se mencionó anteriormente; en la figura 1b se puede apreciar que no ocurre lo mismo con el modelo local.

Cuadro 5.  
Tablas de Clasificación de los Reclamos Según Modelo

Modelo	RECLAMO OBSERVADO									
	No Fraude				Fraude					
	ESTIMADO				ESTIMADO					
	No fraude		Fraude		No fraude		Fraude			
	Siniestros	%	Siniestros	%	Siniestros	%	Siniestros	%		
Prob. Modelo Local	1481	66%	748	33.60%	2229	100.00%	80	46.00%	174	100%
Prob. Modelo Extranjero	2229	100%	0	0.00%	2229	100.00%	174	100.00%	0	0.00%
Prob. Modelo Extranjero Reescalado	1581	70.90%	648	29.10%	2229	100.00%	122	70.10%	52	29.90%

Fuente: Datos Obtenidos del SPSS. UB. Febrero de 2009  
(\*) Punto de corte 174/2403 =7.2%

Otra manera de observar la calidad de la bondad del ajuste de los modelos, es mediante las tablas de clasificación de los fraudes obser-

vados con relación a los fraudes estimados por los modelos. En este sentido se consideraron las tablas de clasificación para un punto de corte del 7.2% que corresponde a la proporción de fraudes observados en la muestra objeto de estudio.

En el cuadro 5, se presentan las tablas de clasificación para los modelos. En la muestra se observaron 2.229 reclamaciones que no presentaron fraude; de esta cantidad en el modelo local el 33.6%(748) se estiman como fraude, en el modelo extranjero ninguna de las reclamaciones observadas que no presentaron fraude se estiman como fraudes y en el modelo extranjero reescalado el 29.10% (648) de las reclamaciones observadas que no presentaron fraude se estiman como fraude.

En la muestra se observaron 174 reclamaciones que presentaron fraude; de ellos, en el modelo local el 46.0%(80) se clasifican como no fraude, en el modelo extranjero todas se estiman como no fraudes mientras que el modelo extranjero reescalado el 70.10% (122) de los fraude observados se estiman como no fraude (cuadro 5).

Los errores de clasificación es uno de los objetivos a minimizar en los sistemas de detección de fraude; en la práctica cuando se cometen errores de clasificación por el uso de modelos, estos errores implicarían un incremento de los costos de la compañía de seguros debido a las acciones que se derivarían de los sistemas de detección a través de las gestiones realizadas por el personal de los centros de investigaciones de siniestros.

Si suponemos que los costos en que incurre la compañía en la indagación del fraude son inferiores a la magnitud del fraude, entonces la situación podría ser un poco complicada si un reclamo que presenta fraude es clasificado como no fraude; por lo tanto los resultados de la tablas de clasificación que se presentan en el cuadro 5, nos indican que el modelo extranjero y en el modelo extranjero reescalado son más sensibles a cometer dicho error, lo que no beneficiaría a la compañía en el sentido de la efectividad en el cumplimiento del objetivo del sistema de detección de fraude: detectar el fraude cuando este es cometido.

**Cuadro 6.**  
**Comparación Magnitudes Probabilidades Estimadas Según Reclamo y Modelo**

Modelo	RECLAMO OBSERVADO									
	No Fraude					Fraude				
	Prob. Modelo Local (pl) vs. Prob. Modelo Extranjero(pe)		Total			Prob. Modelo Local (pl) vs. Prob. Modelo Extranjero(pe)		Total		
	pl <= pe	pl > pe				pl <= pe	pl > pe			
Siniestros	%	Siniestros	%	Siniestros	%	Siniestros	%	Siniestros	%	
Prob. Modelo Extranjero	1	0%	2228	99.96%	2229	100.00%	1	0.57%	174	99.43%
Prob. Modelo Extranjero Reescalado	795	36%	1434	64.33%	2229	100.00%	57	32.76%	117	67.24%
									174	100%

Fuente: Datos Obtenidos del SPSS. UB. Febrero de 2009

Las magnitudes de las probabilidades de fraude estimadas por un modelo tiene sus implicaciones en el cálculo de la perdida esperada de una compañía por exposición al fraude. Aunque este tema se abordará más concretamente en la siguiente sección, observemos que ocurren con las magnitudes de las probabilidades estimadas en el modelo extranjero y modelo extranjero reescalado en comparación con el modelo local.

De las 2.229 reclamaciones que no presentaron fraude en la muestra, para el 99.96%(2.228) de ellas las probabilidades estimadas por el modelo local son mayores a las estimadas por el modelo extranjero. Para el 64.33%(1.434) de las 2.229 reclamaciones que no presentaron fraude en la muestra, las probabilidades estimadas por el modelo local son mayores a las estimadas por el modelo extranjero reescalado (cuadro 6).

Con relación a las 174 reclamaciones que presentaron fraude en la muestra, para el 99.43% (173) de ellas las probabilidades estimadas por el modelo local son mayores que las estimadas por el modelo extranjero(cuadro6). Para el 67.24%(117) de las 174 reclamaciones que presentaron fraude en la muestra, las probabilidades estimadas por el modelo local son mayores a las estimadas por el modelo extranjero reescalado (cuadro 6).

Los resultados del cuadro 6 muestran claramente, que utilizar las probabilidades de fraude estimadas por el modelo extranjero o las estimadas por el modelo extranjero reescalado, cuando se deberían usar las del modelo local, estaría subestimando la perdida esperada de la compañía de seguros debido a que las magnitudes de las probabilidades de fraude del modelo local, son en su gran parte mayores a las del modelo extranjero y modelo extranjero reescalado.

**Cuadro 7.**  
**Comparación Reclamos Estimados Según Modelo**

Modelo	RECLAMO ESTIMADO MODELO LOCAL											
	No Fraude						Fraude					
	RECLAMO ESTIMADO						RECLAMO ESTIMADO					
	No fraude		Fraude		Total		No fraude		Fraude		Total	
	Siniestros	%	Siniestros	%	Siniestros	%	Siniestros	%	Siniestros	%	Siniestros	%
Prob. Modelo Extranjero	1561	100%	0	0.00%	1561	100.00%	842	100.00%	0	0.00%	842	100%
Prob. Modelo Extranjero Reescalado	1064	68%	497	31.84%	1561	100.00%	639	75.89%	203	24.11%	842	100%

Fuente: Datos Obtenidos del SPSS. UB. Febrero de 2009

Un análisis similar al de las magnitudes de las probabilidades estimadas por los modelos, puede hacerse con relación a las estimaciones de los fraudes. El análisis es interesante porque mientras que las magnitudes de las probabilidades afectan la pérdida esperada exposición a fraude, la estimación de los fraudes influyen en la pérdida total.

En el cuadro 7 se presentan los fraudes estimados en el modelo local comparado con los fraudes estimados por el modelo extranjero y el modelo extranjero reescalado. En la muestra se estimaron 1.561 reclamaciones que no presentaron fraude en el modelo local; de esta cantidad en el modelo extranjero el 100% se estiman como no fraude; en el modelo extranjero reescalado el 31.84% (497) se estiman como fraude.

En el modelo local, 842 reclamaciones que estimaron como fraude; de esa cantidad 100% y el 75.89%(639) son clasificados como fraudes por el modelo extranjero y por el modelo extranjero reescalado respectivamente.

Los resultados del cuadro 7 confirman una vez más la debilidad del modelo extranjero y el modelo extranjero reescalado, en la estimación del fraude. Ambos modelos el extranjero y extranjero reescalado, estarían clasificando reclamaciones como no fraude cuando en realidad podrían serlo. Evidentemente el argumento está a favor de las probabilidades estimadas por el modelo local, debido a la bondad de ajuste que el modelo presentó con relación al modelo extranjero y el modelo extranjero reescalado.

Los resultado del cuadro 7 también indican que utilizar los fraudes estimado por el modelo extranjero o los estimados por el modelo extranjero reescalado, cuando se deberían usar los estimados por el modelo local, estaría subestimando la pérdida total de la compañía de

seguros debido a que los modelos extranjero y extranjero reescalados dan una clasificación de no fraude a los reclamaciones que el modelo local estaría clasificando como fraudes.

Por lo argumentado en esta sección y tomando como referencia del Modus Tolems, con relación a la capacidad explicativa de los modelos, queda rechazada la hipótesis que la capacidad explicativa del modelo local comparada con la capacidad explicativa del modelo extranjero son idénticas.

## 5.2 Pérdida total por exposición a fraude y costos por investigación del fraude de los CIS

En la sección 4.2 se mencionó que las probabilidades estimadas por el modelo local, el modelo extranjero y el modelo extranjero reescalado, tenían sus implicaciones prácticas en el momento de la cuantificación de la pérdida total por exposición a fraude. Teniendo en cuenta el planteamiento abordado en la metodología de este trabajo y siguiendo a [27], el valor promedio de una reclamación en la muestra considera en este estudio fue de 818.14 € ; para las reclamaciones que presentaron y no presentaron fraude los valores fueron de 1.207.25€ y 787.76 € respectivamente (cuadro 8).

Cuadro 8.  
Valores observados de las reclamaciones y costos de auditoría CIS

Variable	Total muestra		Fraude		No fraude	
	media	desviación	media	desviación	media	desviación
Reclamaciones	818.14	1.361.83	1.207.35	1.885.15	787.76	1.307.94
Costo de auditoría CIS	72.26	69.59	231.71	139.87	59.80	33.46

Fuente: [27]

Suponiendo que la diferencia entre el valor promedio de las reclamaciones que presentaron fraude y las que no presentaron fraude se debe a la magnitud de la exposición al fraude, entonces podríamos deducir que la exposición de la compañía de seguro a fraude en una reclamación es de 419.59 € (1.207.35 – 787.76); este valor sería la exposición máxima en promedio que se podría perder por fraude en una reclamación lo que correspondería a valor de las  $E_i$  en cada reclamación  $i$ .

Observando los costos promedios de las investigaciones del fraude (costos de auditoría de los CIS) que se muestran en el cuadro 8, se podría manifestar que para investigar un fraude la compañía en promedio incurre en unos costos adicionales de 80.07 € por cada reclamación (139.87 – 59.80). Para que se justifique la operación de CIS en relación con el fraude, se esperaría que cuando el fraude se produce por lo menos se debe recuperar 80.07€ de los 419.59<sup>16</sup> €; por lo tanto se debería esperar que la tasa de recuperación resultado de la investigación del fraude fuera por lo menos del 19.08% (80.07/419.59) con una desviación estándar del 20.23%<sup>17</sup>.

De acuerdo con lo anterior y retomando los planteamiento de la sección 5.2 las estimaciones de la esperanza, la varianza, asimetría, el valor en riesgo y el valor en riesgo condicional de la pérdida total por exposición a fraude, se presentan en cuadro 9.

Al considerar un tamaño de la cartera de 2403 reclamaciones, los resultados indican que podría esperarse una pérdida total por exposición a fraude de 59.078.00 €, 4.715.44 € y 59.112.83 € en el modelo local, extranjero y extranjero reescalado respectivamente.

Con relación a la varianza, esta se estima en 18.253.519.00, 1.573.747.00 y 15.781.125.00 para una tasa de variación fijara (19.507.213.00, 1.673.812.00 y 17.035.544.00 cuando la tasa de variación en aleatoria) para los modelos local, extranjero y extranjero reescalado respectivamente.

<sup>16</sup> La idea de este argumento se basa en que los costos de realizar una actividad, debe ser inferiores o iguales a los ingresos que la actividad genera. Por lo tanto no tendría ningún sentido que un CIS investigara un fraude si los costos de la investigación va a ser mayor que el valor que el mismo fraude genera.

<sup>17</sup> Consideramos que la tasa de recuperación estaría entre el 19.08 y el 100%, asumiendo la diferencia entre los valores como una estimación del Rango, bajo el supuesto de distribución Normal se podría esperar con un nivel de confianza del 95.97% que la desviación estándar fuera una cuarta parte del Rango; es decir,  $\sigma = \frac{(1-0.1908)}{4} = 0.2023 \equiv 20.23\%$ .

Cuadro 9  
 Cuantificación de la pérdida por exposición a fraude según modelos

INDICADOR		Modelo local		Modelo extranjero		Modelo extranjero reescalado	
		Tasa de recuperación fija	Tasa de recuperación con distribución Beta	Tasa de recuperación fija	Tasa de recuperación con distribución Beta	Tasa de recuperación fija	Tasa de recuperación con distribución Beta
Características de la Distribuciones	media	59.078.00	59.078.66	4.715.44	4.715.44	59.112.83	59.112.83
	Varianza	18.253.519.00	19.507.213.00	1.573.747.00	1.673.812.00	15.781.125.00	17.035.544.00
	Asimetría	0,066	0,071	0,262	0,280	0,055	0,061
Distribución Normal	Valor en Riesgo	66.106.16	66.343.48	6.778.89	6.843.48	65.647.09	65.901.82
	Tail VaR	67.891.42	68.189.04	7.303.09	7.384.09	67.307.65	67.626.50
Distribución Normal - Power	Valor en Riesgo	66.185.71	66.432.87	6.872.15	6.946.33	65.708.81	65.973.49
	Tail VaR	68.049.68	68.366.86	7.488.61	7.588.69	67.429.84	67.769.06
Simulación	Esperanza		60,036.09		4,654.90		58,521.77
	Varianza		17,267,587.00		1,835,885.00		14,531,418.00
	Valor en Riesgo		66,208.78		7,130.18		64,511.12
	Tail VaR		67,680.09		7,894.12		67,114.20

Fuente: Resultados Obtenidos en R. UB, Febrero de 2009

Asumiendo normalidad, se considera un riesgo del 5% que la pérdida total supere los 66.106.16 €, 6.778.89 € y 65.647.09 € con una tasa de recuperación fija (66.106.16 €, 6.778.89 € y 65.647.09 € con una tasa de recuperación aleatoria) en los modelos local, extranjero y extranjero reescalado respectivamente. Los valores en riesgo condicionales corrigiendo por asimetría y los obtenidos a través de simulación se pueden apreciar en el cuadro 9.

Al comparar los resultados de la pérdida total se aprecia que dentro de cada modelo los valores no difieren sustancialmente al pasar de una tasa de recuperación fija a una tasa de recuperación aleatoria. Sin embargo, los resultados entre los métodos difieren principalmente para el modelo extranjero.

En el cuadro 10 se presentan los múltiplos de las estimaciones dentro de cada modelo y entre modelos; dentro de cada modelo se comparan los resultados mediante el cálculos de la relación de los valores obtenidos suponiendo una tasa de recuperación fija con los obtenidos asumiendo una tasa de recuperación aleatoria. Estos resultados confirman lo expresado en el párrafo anterior, decir, no hay gran diferencia en las magnitudes de los indicadores de la pérdida total, al pasar del supuesto de tasa de recuperación fija al de tasa de recuperación aleatoria.

Cuadro 10  
Comparación de los Indicadores de riesgo dentro de los modelos y entre modelos  
Según el número de elementos en la Cartera

INDICADOR	Modelo local	Modelo extranjero	Modelo extranjero reescalado	Modelo local vs. Modelo extranjero		Modelo local vs. Modelo extranjero reescalado		
	TRF/TRB	TRF/TRB	TRF/TRB	TRF	TRB	TRF	TRB	
Características de la Distribuciones	media	1.00	1.00	1.00	12.53	12.53	1.00	1.00
	Varianza	0.94	0.94	0.93	11.60	11.65	1.16	1.15
	Asimetría	0.92	0.94	0.89	0.25	0.25	1.20	1.17
Distribución Normal	Valor en Riesgo	1.00	0.99	1.00	9.75	9.69	1.01	1.01
	Tail VaR	1.00	0.99	1.00	9.30	9.23	1.01	1.01
Distribución Normal - Power	Valor en Riesgo	1.00	0.99	1.00	9.63	9.56	1.01	1.01
	Tail VaR	1.00	0.99	0.99	9.09	9.01	1.01	1.01
Simulación	Esperanza	-	-	-	12.90	-	-	1.03
	Varianza	-	-	-	9.41	-	-	1.19
	Valor en Riesgo	-	-	-	9.29	-	-	1.03
	Tail VaR	-	-	-	8.57	-	-	1.01

Fuente: Resultados Obtenidos en R. UB, Febrero de 2009

La situación se vuelve más interesante cuando se comparan los resultados entre modelos; los resultados no difieren sustancialmente entre el modelo local con el modelo extranjero reescalado. Sin embargo, en lo que se refiere a la esperanza y a la varianza de la pérdida total, los resultados del modelo local son 12 veces mayores que los resultados del modelo extranjero; en lo relacionado con el valor en riesgo y el valor en riesgo condicional, los valores del modelo local son 10 veces mayores que los del modelo extranjero (Cuadro 10).

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha considerado que una compañía en el sector de seguro de automóviles podría estar motivada a extender su sistema de detección de fraude más allá de las fronteras de donde el sistema fue diseñado; hemos denominado a esto el uso generalizado de un modelo y se ha tomado el caso cuando lo que se generaliza es un modelo de regresión logística aplicado a una muestra de 2403 reclamaciones en el mercado de seguros de España, con el fin de estimar las probabilidades de fraude en reclamaciones de pólizas de seguros de automóviles.

Se observaron las probabilidades predichas por el modelo local y las predichas por el modelo extranjero y estas últimas se reescalaron dando lugar a las probabilidades del modelo extranjero reescalado.

Con estos datos, los resultados de la generalización (uso del modelo extranjero) comparada con el modelo que actualmente se considera en el mercado español(modelo local) implica que podemos encontrar, como se ha encontrado en este estudio, que desde el punto de vista predictivo, al 5% de significación estadística, las probabilidades predichas por los modelos no se pueden considerar iguales; por lo tanto desde el punto de vista explicativo no se podría afirmar que los modelos tienen las mismas características explicativas, es decir no se puede afirmar que la significancia, los signos y las magnitudes de los coeficientes de las variables incluidas en los modelos sean idénticos.

La generalización implica además, que se puede dar que la esperanza, y varianza de la pérdida total por exposición a fraude en las reclamaciones de seguros de automóviles, sean 12 veces mayores de las que se estiman con el modelo que se generalizada.

Para el valor en riesgo y valor en riesgo condicional de la pérdida total por exposición a fraude, se puede también esperar, que sus valores sean 10 veces mayores de los que se estiman con el modelo que se generalizada.

En el caso identificar fraude en las reclamaciones en seguros de automóviles, si se dispone de información del porcentaje de reclamaciones con fraude en la población a la que se presente generalizar el modelo, una recomendación a seguir, es que las probabilidades estimadas se reescalen como se ha realizado en este estudio; así, aunque las probabilidades podrían no ser las mismas, las estimaciones de los indicadores de riesgos asociados a las pérdidas total por exposición a fraude, podrían ser muy similares a las probabilidades que se obtendrían si se tuviera un modelo operando con información propia de los asegurados en el sistema de detección de fraude.

Por tanto la sugerencia es ser muy cuidadoso cuando en sistemas de gestión de riesgos de seguros de automóviles, las compañías con presencia en otros países estén motivadas a implementar, en dichas regiones o países, modelos de detección de fraude diseñados previamente, ya sea por ellas mismas, o por otras firmas consultoras en el mercado.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Artis, M., M. Ayuso and M. Guillen (2002), 'Detection of automobile insurance fraud with discrete choice models and misclassified claims'. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 69, No. 3, pp. 325-340.
- [2] Artis, M., M. Ayuso and M. Guillen (1999), 'Modelling Different Types of Automobile Insurance fraud Behavior in the Spanish Market'. *Insurance: Mathematics and Economics*, 24, 1-2, pp. 67-81.
- [3] Ayuso, M., M. and Guillen M. (2008), 'Fraud in Insurance' *Encyclopedia of Quantitative Risk Assessment and Analysis*, Melnick, E. and Everit, B(eds.) John Wiley & Sons Ltda, Chichester, UK, pp 723-727.
- [4] Ayuso, M., M. Guillen and P. Salsas (1999), 'A binary choice model with omission errors for the detection of insurance fraud'. MS'99. International Conference on Modelling and Simulation. Proceedings, pp. 33-42 vol.1|2 vol.(v+460+ii+168).
- [5] Beck JR, Shultz EK. The use of relative operating characteristic (ROC) curves in test performance evaluation. *Arch Pathol Lab Med* 1986; 110: 13-20.
- [6] Berek, J., N. Gutierrez, J. Stone and L. Testa (2000), 'Fraud. What is the evidence?'. *Care Manag J*, Vol. 2, No. 1, pp. 44-53.
- [7] Bermudez, L., J. M. Perez, M. Ayuso, E. Gomez and F. J. Vazquez (2008), 'A bayesian dichotomous model with asymmetric link for fraud in insurance'. *Insurance Mathematics & Economics*, Vol. 42, No. 2, pp. 779-786.
- [8] Bermudez, L., J. M. Perez-Sanchez, M. Ayuso and E. Gomez-Deniz (2006), 'Detecting automobile insurance fraud using a skewed link model'. *Insurance Mathematics & Economics*, Vol. 39, No. 3, pp. 400-400.

- [9] Bonchi, F., F. Giannotti, G. Mainetto and D. Pedreschi (1999), 'Using data mining techniques in fiscal fraud detection'. Data Warehousing and Knowledge Discovery. First International Conference, DaWaK'99. Proceedings (Lecture Notes in Computer Science Vol.1676)
- [10] Bourgeon J, Picard P, Pouyet J. Providers (2008) 'Affiliation, Insurance and Collusion'. Journal of Banking and Finance [serial online]. January; 32(1):170-186. Available from: EconLit, Ipswich, MA. Accessed November 28, 2008.
- [11] Boyer, M. M. (2000), 'Centralizing insurance fraud investigation'. Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, Vol. 25, No. 2, pp. 159-178.
- [12] Brockett, P. L., R. A. Derrig, L. L. Golden, A. Levine and M. Alpert (2002), 'Fraud classification using principal component analysis of ri-dits'. Journal of Risk and Insurance, Vol. 69, No. 3, pp. 341-371.
- [13] Brockett, P. L., L. L. Golden, J. H. Jang and C. H. Yang (2006), 'A comparison of neural network, statistical methods, and variable choice for life insurers' financial distress prediction'. Journal of Risk and Insurance, Vol. 73, No. 3, pp. 397-419.
- [14] Caron, L. and G. Dionne (1999), 'Insurance fraud estimation: More evidence from the quebec automobile insurance industry'. Automobile Insurance: Road Safety, New Drivers, Risks, Insurance Fraud and Regulation, pp. 175-182.
- [15] Caudill, S. B., M. Ayuso and M. Guillen (2005), 'Fraud detection using a multinomial logit model with missing information'. Journal of Risk and Insurance, Vol. 72, No. 4, pp. 539-550.
- [16] Claramunt. Bielsa. M. Mercè (2008). Solvencia en Seguros y Finanzas. Curso 2008-2009. Universidad de Barcelona, España.
- [17] Crocker, K. J. and S. Tennyson (2002), 'Insurance fraud and optimal claims settlement strategies'. Journal of Law & Economics, Vol. 45, No. 2, pp. 469-507.

- [18] Derrig, R. A. (2002a), 'Automobile insurance: Road safety, new drivers, risks, insurance fraud and regulation'. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 69, No. 1, pp. 113-114.
- [19] --- (2002b), 'Insurance fraud'. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 69, No. 3, pp. 271-287.
- [20] Derrig, R. A. and K. M. Ostaszewski (1995), 'Fuzzy techniques of pattern recognition in risk and claim classification'. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 62, No. 3, pp. 447-482.
- [21] Dickson, David C.M. (2005). *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge University Press.
- [22] Dionne, G., Giuliano F. and Picard P. (2009), 'Optimal Auditing with Scoring: Theory and Aplicación to Insurance Fraud to appear in *Management Scieencie*, Vol. 55, No.1 pp. 58-70
- [23] Dionne, G. and R. Gagne (2001), 'Deductible contracts against fraudulent claims: Evidence from automobile insurance'. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 83, No. 2, pp. 290-301.
- [24] Dionne, G. and C. Laberge-Nadeau (1999), 'Automobile insurance: Road safety, new drivers, risks, insurance fraud and regulation - introduction'. *Automobile Insurance: Road Safety, New Drivers, Risks, Insurance Fraud and Regulation*, pp. XXI-XXIX.
- [25] Dudewiicz E. J. and Mishra S N. (1988). *Modern Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons. New York.
- [26] Greene, William H. (2000) *Econometric Analysis*. Prentice Hall Internacional Editions. Second Edition.
- [27] Guillen, M., S. Viaene, M. Ayuso, D. Van Gheel and G. Dedene (2007), 'Strategies for detecting fraudulent claims in the automobile insurance industry'. *European Journal of Operational Research*|*European Journal of Operational Research*, Vol. 176, No. 1, pp. 565-83.

- [28] Hair J. F., Anderson R. E., Tatham R. L. y Black W. C. (1999). Análisis Multivariante. 5ª Edición. Prentice Hall. Madrid.
- [29] Hoyt, R. E. (1990), 'The effect of insurance fraud on the economic system'. Journal of Insurance Regulation 8((3), 304-315.
- [30] Hoyt, R. E., D. B. Mustard and L. S. Powell (2006), 'The effectiveness of state legislation in mitigating moral hazard: Evidence from automobile insurance'. Journal of Law & Economics, Vol. 49, No. 2, pp. 427-450.
- [31] International Actuarial Association(2004). A global Framework for Insurer Solvency Assessment. Research Report of the Insurer Solvency Assessment Working Party.
- [32] Jiang Y, Metz CE, Nishikawa RM.( 1996) A receiver operating characteristic partial area index for highly sensitive diagnostics tests. Radiology; 201: 745-750.
- [33] Klugman, S.A.; Panjer, H. and G.E. Willmot (1998). Loss Models from data to decisions. John Wiley & Sons.
- [34] Loughran, D. S. (2005), 'Deterring fraud: The role of general damage awards in automobile insurance settlements'. Journal of Risk and Insurance, Vol. 72, No. 4, pp. 551-575.
- [35] Lucarini, M. A. (2004), 'Fighting fraud with technology [insurance fraud detection]'. Best's Review|Best's Review, Vol. 105, No. 6, p. 58.
- [36] Macguire, T. (1997), 'Neural networks and the auditor'. Computer Audit Update|Computer Audit Update, pp. 20-4.
- [37] McClish DK. (1989). Analyzing a portion of the ROC curve. Med Decision Making ; 9: 190-195.
- [38] McNeil, A.J.; Frey, R. and P. Embrechts (2005). Quantitative Risk Management. Princeton University Press.

- [39] Picard, P. (1996), 'Auditing claims in the insurance market with fraud: The credibility issue'. *Journal of Public Economics*, Vol. 63, No. 1, pp. 27-56.
- [40] Picard P. (2000). 'Economic Analysis of Insurance Fraud?'. *Handbook of insurance .Huebner International Series on Risk, Insurance, and Economic Security*; pp. 315-362.
- [41] Pinquet, J., M. Ayuso and M. Guillen (2007), 'Selection bias and auditing policies for insurance claims'. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 74, No. 2, pp. 425-440.
- [42] Rejesus, R. M., A. C. Lovell, B. B. Little and M. H. Cross (2003), 'Determinants of anomalous prevented planting claims: Theory and evidence from crop insurance'. *Agricultural and Resource Economics Review*, Vol. 32, No. 2, pp. 244-258.
- [43] Schiller, J. (2006), 'The impact of insurance fraud detection systems'. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 73, No. 3, pp. 421-438.
- [44] Sharma, Subas (1996). *Applied Multivariate Techniques*, John Wiley and Sons, New York.
- [45] Stefano, B., F. Gisella and Ieee (2001), 'Insurance fraud evaluation - a fuzzy expert system'. *10th Ieee International Conference on Fuzzy Systems*, Vols 1-3, pp. 1491-1494.
- [46] Tennyson, S. and P. Salsas-Forn (2002), 'Claims auditing in automobile insurance: Fraud detection and deterrence objectives'. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 69, No. 3, pp. 289-308.
- [47] URGARTE M., MILITINO A. F. and ARNHOLT A. T. (2008) *Probability and Statistics With R*. CRC Pres. Taylor & Francis Group, LLC. New York.
- [48] Viaene, S. and G. Dedene (2004), 'Insurance fraud: Issues and challenges'. *Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, Vol. 29, No. 2, pp. 313-333.

[49] Viaene, S., G. Dedene and R. A. Derrig (2005), 'Auto claim fraud detection using bayesian learning neural networks'. *Expert Systems with Applications*, Vol. 29, No. 3, pp. 653-666.

[50] Viaene, S., R. Derrig and G. Dedene (2003), 'Mlp-ard vs. Logistic regression and c4.5 for pip claim fraud explication'. *Insurance Mathematics & Economics*, Vol. 32, No. 1, pp. 154-154.

[51] Viaene, S., R. A. Derrig, B. Baesens and G. Dedene (2002b), 'A comparison of fraud detection'. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 69, No. 3, pp. 373-421.

[52] Viaene, S., R. A. Derrig and G. Dedene (2004), 'A case study of applying boosting naive bayes to claim fraud diagnosis'. *Ieee Transactions on Knowledge and Data Engineering*, Vol. 16, No. 5, pp. 612-620.



## Ponencia 15

### RIESGO DE NEGOCIO EN ASEGURADOS CON MÚLTIPLES CONTRATOS

Montserrat Guillen y Ana María Pérez-Marín

#### RESUMEN

Este artículo trata la gestión del riesgo de negocio en el sector asegurador. En concreto se propone una metodología para cuantificar la fidelidad y el valor del asegurado considerando las distintas pólizas que éste tiene suscritas en la entidad en dos posibles ramos: automóviles y diversos (que incluye hogar, decesos y accidentes). Se presentan los resultados de un estudio empírico en el que se han considerado dos posibles unidades de estudio, por una parte el tomador individual de la póliza y por otra, el hogar o unidad familiar (en el que distintos tomadores suscriben distintas pólizas para hacer frente a riesgos comunes). Se muestran los resultados sobre la fidelidad y valor de distintos perfiles de asegurados y se discute cómo implementar un sistema de gestión del riesgo de negocio en la entidad.

**Palabras clave:** fidelidad, valor, múltiples contratos, riesgo de negocio.

#### 1. INTRODUCCIÓN

Las entidades aseguradoras se enfrentan en la actualidad a una serie de retos que implican un cambio de filosofía empresarial impulsado en gran medida por el proyecto Solvencia II. La gestión integral del riesgo implica adoptar una óptica mucho más amplia que ha de contemplar

todos los elementos de la actividad aseguradora que puedan reportar algún tipo de incertidumbre para la entidad.

Como las compañías operan en un entorno cada vez más competitivo en el que los asegurados fácilmente cambian de una compañía a otra, uno de los elementos de riesgo es la posición de la entidad en el mercado asegurador. La expansión de Internet ha jugado un papel importantísimo en la reducción de los costes de información en los que incurría un asegurado que deseaba cambiar de compañía, de modo que en las entidades ha surgido una creciente preocupación por fidelizar a sus clientes. Todo ello ha obligado a orientar la gestión aseguradora hacia el cliente-consumidor dado que las principales dificultades no sólo se dan en la creación y lanzamiento al mercado de productos aseguradores equilibrados actuarialmente, sino en conseguir su éxito comercial.

Las fluctuaciones en el volumen de negocio y márgenes ocasionados por este entorno competitivo suponen un riesgo para la compañía que formalmente se denomina riesgo de negocio (Nakada *et al.* 1999), y está cobrando cada vez más importancia dentro del apartado de riesgo operacional<sup>13</sup>. El riesgo de negocio refleja la realidad del mercado en el que está inmersa la compañía y su influencia en la estabilidad de la entidad.

La gestión del riesgo de negocio entraña una serie de dificultades pero también supone importantes beneficios para la compañía. Entre las principales dificultades destacaríamos por una parte la propia cuantificación de este riesgo, dada la multitud de elementos que inciden en él y la escasa experiencia previa que pueda guiar el proceso de valoración del mismo. Por otra parte, todavía existen serias dudas sobre cómo diseñar acciones específicas que permitan proteger a la compañía frente al riesgo de negocio una vez éste se ha cuantificado.

Entre las principales ventajas de gestionar adecuadamente el riesgo de negocio, cabe destacar los efectos positivos que para la compañía

---

<sup>13</sup> Asumimos la clasificación de riesgos de Nakada *et al.* (1999), usada también por Dhaene *et al.* (2006).

se derivan del aumento de sus beneficios a través del aumento de la fidelidad de los asegurados con mayor valor (los que más beneficios le reportan debido, sobre todo, a su baja siniestralidad). Análogamente, no invertir en fidelizar a clientes con escaso valor para la compañía contribuye a aumentar los beneficios globales.

Otra ventaja de establecer una adecuada política de control del riesgo de negocio es su contribución a garantizar la estabilidad y solvencia de la compañía a lo largo del tiempo. Una adecuada gestión también en este ámbito permite a la compañía prevenir las pérdidas que podría ocasionarle una potencial disminución de su cuota de mercado. En definitiva, cuantificar y gestionar correctamente el riesgo de negocio supone salvaguardar el principal activo que tiene la compañía aseguradora: sus asegurados.

La gestión de los diferentes ramos del seguro y de sus productos se ha realizado tradicionalmente de forma separada por áreas de negocio y para cada contrato suscrito individualmente. Es decir, que si un asegurado tenía distintas pólizas en la compañía, cada una de estas pólizas era gestionada de forma independiente del resto. Bajo este enfoque, los acontecimientos asociados a un tipo concreto de póliza (siniestros, incrementos en la prima, ampliación de las coberturas contratadas, reclamaciones, cancelaciones, etc.) serían tratados sin considerar otros acontecimientos que puedan ocurrir asociados a otras pólizas contratadas por el cliente con el mismo asegurador.

Bajo esta perspectiva unidimensional, la posible relación que existe entre distintos sucesos, acciones y decisiones es ignorada, de modo que no es posible entender el comportamiento del asegurado ni gestionar adecuadamente la relación que con él se establece<sup>14</sup>.

En este artículo, presentamos nuestra aproximación a la gestión del riesgo de negocio. Ésta debe considerar la naturaleza multidimensional de la relación entre asegurador y asegurado, de manera que to-

---

<sup>14</sup> En parte, el creciente papel que juega la venta electrónica no hace más que acrecentar la distancia entre el proveedor de seguros y su cliente, ya que se va perdiendo el contacto personal a través del agente de seguros.

dos los acontecimientos asociados a un tipo concreto de póliza sean considerados a la hora de entender lo que sucede en otros tipos de productos contratados por el mismo cliente. En definitiva, se trata de adoptar la propia perspectiva integrada que el cliente tiene de su relación con la compañía.

Bajo este enfoque podemos decir que la unidad de análisis sería el tomador con todas las pólizas que tenga suscritas con la misma compañía. No obstante, y para el caso de clientes particulares, en un segundo nivel reconoceríamos la existencia del hogar como elemento compacto en la toma de decisiones, tal y como se planteó en Guillén *et al.* (2006) y Guillén *et al.* (2008). Normalmente, las familias deciden contratar distintas pólizas con el objetivo de cubrirse frente a una serie de riesgos que pueden afectarles en su conjunto. No obstante, estas pólizas no son contratadas siempre por el mismo tomador (pueden ser suscritas por la madre, el padre, etc.). En la práctica serán sin embargo todos los miembros adultos de la familia los que generalmente participen en las decisiones que afecten a la cobertura de esos riesgos comunes, lo cual justifica la consideración del hogar como unidad de estudio. La existencia de múltiples contratos vinculados a un mismo hogar entraña de por sí una elevada complejidad, por las numerosas combinaciones de productos aseguradores que pueden darse en la realidad. A todo ello, cabe añadir que las pólizas contratadas no comparten habitualmente fechas de vencimiento comunes, lo que incrementa adicionalmente la dificultad de la gestión de las renovaciones.

Así pues, en este trabajo vamos a considerar la pluridimensionalidad de la relación entre asegurador y cliente en dos niveles. En un primer nivel, nos centramos en el tomador como unidad de análisis, teniendo en cuenta que puede disponer de más de una póliza. En un segundo nivel pasamos a considerar al hogar con todas las pólizas suscritas por todos los tomadores que formen parte de esa unidad familiar. La comparación de los resultados obtenidos bajo ambos enfoques revela aspectos interesantes que previsiblemente nos acercarán a comprender la dinámica que rige la toma de decisiones por parte de los individuos respecto a sus pólizas contratadas. Todo ello nos ofrece

herramientas de cuantificación de la incertidumbre y conduce a plantear estrategias efectivas de reducción del riesgo de negocio.

## 2. ANTECEDENTES

De hecho, la investigación de todos estos aspectos dentro del ámbito actuarial no ha sido muy extensa, aunque durante los últimos años se está intensificando. Los primeros trabajos que han tratado temas de algún modo relacionados con la fidelidad de los clientes y la gestión del riesgo de negocio en el ámbito asegurador datan de los años sesenta y están centrados básicamente en la demanda de productos aseguradores.

En esa época, el interés se centraba en estudiar los factores que aumentaban la demanda de seguros, como por ejemplo el nivel de ingresos familiares (Hammond *et al.*, 1967) o la incorporación de la mujer al mundo laboral (Duker, 1969). Estudios posteriores enmarcados dentro de la teoría de la cartera han demostrado que la demanda de contratos de seguro se determina simultáneamente con la demanda de otros activos (Mayers y Smith, 1983). Por otra parte, Doherty (1984) demostró que los niveles eficientes de aseguramiento aumentaban con el número de riesgos asegurables y el peso de los correspondientes activos en la cartera. Poco después, Babbel (1985) constató que la contratación de seguros de vida se halla inversamente relacionada con cambios en el índice de precios reales.

En la década de los ochenta encontramos los primeros trabajos en los que se estudió la retención y fidelización de los asegurados. Crosby y Stephens (1987) estudiaron los efectos del márketing relacional en la satisfacción, la retención y los precios en la industria del seguro de vida. El márketing relacional se consolidaba como estrategia que permitía hacer frente a la intangibilidad de los servicios ofertados en el sector asegurador, y se suponía que provocaba que el asegurado realizara una generalización de sus sentimientos favorables acerca de la relación con el agente o proveedor de seguros a aspectos fundamentales del servicio. Su investigación aportó resultados contrarios

a esta postura, observándose que el márketing relacional añadía valor al servicio pero no sustituía aspectos fundamentales del mismo.

Así pues, a finales de los ochenta ya se había forjado el interés por estudiar la fidelización y satisfacción de los asegurados, pero el valor del cliente (CLV) era algo que sólo un número muy reducido de compañías aseguradoras calculaba.

Este hecho queda constatado en la investigación llevada a cabo por Jackson (1989) que constituye además la primera referencia que encontramos donde explícitamente se determine el CLV en el sector asegurador. El autor abogaba por la necesidad de su determinación para así dirigir las estrategias de fidelización a aquellos clientes que más beneficios reportan a la empresa. Proponía utilizar un modelo histórico que analizaba el flujo de beneficios aportados por los asegurados y otro predictivo para determinar finalmente su valor para la compañía a largo plazo. Este trabajo es igualmente destacable por tener en cuenta una serie de particularidades únicas del sector asegurador a la hora de analizar el CLV, como el hecho de que ampliaciones de las coberturas contratadas o la compra cruzada (contratación de otras pólizas dentro de la misma compañía) pueden aumentar el CLV.

En la década de los noventa, encontramos ya más estudios de este tipo dentro del ámbito asegurador. A medida que la competencia entre las compañías aseguradoras se iba intensificando se hacía necesario conocer los factores que llevaban a los asegurados a cambiar de compañía para intentar aumentar su fidelidad a través del diseño de estrategias de retención. Schlesinger y Schulenburg (1993) analizaron la interacción de diversos factores en la decisión de cambiar de asegurador, centrándose únicamente en el seguro del automóvil. Tomaron como base la información recopilada en una encuesta realizada en 1.983 a consumidores alemanes que tenían una póliza del seguro del automóvil. Su análisis permitió observar que los principales motivos para elegir un determinado asegurador eran que éste ofreciera una prima favorable y, en segundo lugar, que la entidad hubiese sido recomendada por algún amigo o familiar. Se realizaron diversos análisis paralelos para los asegurados que habían cambiado en algún

momento de entidad y para los que no. Para los que habían cambiado en algún momento de asegurador, se observó que la gestión de los siniestros era sustancialmente mejor en el nuevo asegurador que en el antiguo, tanto en el tiempo de liquidación como en la cantidad percibida como indemnización.

Paralelamente al interés por conocer los factores que llevaban a los asegurados a cambiar de compañía, se hizo necesario estudiar la calidad del servicio ofrecido por éstas y la satisfacción de los asegurados. Sobre dicha temática encontramos varios trabajos. En el primero de ellos, Wells y Stafford (1995) quienes efectuaron la medida de las percepciones de la calidad del servicio por parte de los asegurados y lo compararon con la ratio de quejas registrado por las compañías aseguradoras. Los autores observaron que bajos niveles de ratio de queja estaban relacionados significativamente con altos niveles de calidad del servicio percibida. Los resultados también sugirieron que los consumidores tendían a valorar mejor la calidad del servicio si conocían su derecho a presentar una queja. Este conocimiento reducía los sentimientos de indefensión e insatisfacción o resentimiento que los consumidores normalmente tienen cuando tratan con una gran compañía de seguros.

Poco después, Stafford *et al.* (1998) identificaron los determinantes más importantes de la calidad del servicio percibida y de la satisfacción del asegurado en el proceso de reclamación de siniestros de automóvil con daños corporales. La conclusión de los autores fue que el elemento clave en la calidad del servicio percibido por los asegurados y la satisfacción es la fiabilidad, es decir, la habilidad para llevar a cabo el servicio prometido.

Por otra parte, la demanda de seguros continuó durante los noventa siendo tema de investigación como continuación a los trabajos de Mayers y Smith (1983) y de Doherty (1984) y Babbel (1985) en la década anterior. De este modo, Showers y Shotick (1994) retomaron la investigación del impacto de las características de los hogares en su demanda de productos aseguradores. Los autores concluyeron que el nivel de ingresos familiares y el número de miembros que apor-

tan estos ingresos son variables positivamente correlacionadas con la demanda de productos aseguradores. Igualmente observaron como a medida que el tamaño de la familia o la edad de sus miembros aumentan, el incremento marginal en sus compras de productos aseguradores disminuye.

En esta misma línea de investigación, Ben-Arab *et al.*, (1996) modelizaron el consumo de productos aseguradores a lo largo del tiempo, considerándolo de forma continua, en un horizonte temporal finito. Su modelo hacía depender las preferencias de consumo actuales del consumo pasado del individuo, de forma que analizaba el efecto de la formación de hábitos de consumo en la decisión de contratar pólizas de seguros. El nivel óptimo de productos aseguradores contratados era mayor en este contexto que cuando no se contemplaba la formación de hábitos de consumo en el modelo. Este resultado podría explicar porqué existe una propensión de los consumidores a “sobreasegurarse”, tal y como se había observado.

Por otra parte, también encontramos trabajos recientes sobre la aplicación de estrategias de fidelización en compañías aseguradoras. Cooley (2002) realizó una segmentación en dos etapas que identificó la existencia de cuatro grupos de tomadores de seguros de salud, para la mejor aplicación de técnicas de fidelización y retención de asegurados. Se determinaron cuatro grupos en los que existía un alto porcentaje de asegurados con un nivel intermedio de compromiso hacia su seguro de salud. Las variables utilizadas en la segmentación fueron la antigüedad, el tipo de cobertura contratada, la edad y el género. Del estudio de las necesidades particulares de cada segmento, se aplicaron estrategias de fidelización específicas que en algunos casos lograron aumentar la retención de asegurados en un 7%.

El cálculo del CLV vuelve a ser tema de investigación en el sector asegurador a partir de los últimos años de la década de los noventa y más intensamente en la actualidad. Berger y Nasr (1998) retomaron esta línea de investigación partiendo de la necesidad de realizar estudios más profundos dado que los existentes no habían aportado un método sistemático para su cálculo. Los autores confeccionaron modelos

matemáticos generales para determinar el CLV en una gran variedad de casos. Este cálculo se basaba en la diferencia descontada entre los ingresos y los costes (entre ellos los de promoción) necesarios para retener a los clientes. Uno de los ejemplos numéricos que se mostraban para el caso en el que el producto ofrecido se contratase o renovase anualmente era el de una compañía de seguros, pero no estaba basado en datos reales.

Por otra parte, los beneficios de aumentar la fidelidad de los asegurados están actualmente fuera de discusión. Ryals y Knox (2005) recopilaron diversos estudios al respecto y concluyeron que un pequeño incremento de la retención de los clientes del 85% al 90% provocaba un incremento del valor actual de los beneficios netos que, como mínimo, se situaba en el 35% y podía llegar a ser del 95% para las empresas analizadas<sup>15</sup>. No obstante, estos mismos autores defendieron la necesidad de ajustar este CLV por el riesgo que supone desarrollar una relación con el cliente (como las inversiones en campañas de marketing que se destinan a ello). De este modo, proponían medir el *risk-adjusted* CLV, que resultaba de una combinación de la predicción del CLV y del riesgo futuro de la relación establecida con el cliente, y que al mismo tiempo podía entenderse como una medida del valor económico (EV) del mismo. Los autores realizaron una valoración del riesgo que suponía la relación que se establece con el cliente, que puede entenderse como la volatilidad en el flujo de ingresos futuros que proporcione ese cliente. Para ello consideraron dos aspectos de este riesgo: a) riesgo de siniestros específico del cliente (la proporción de siniestros como porcentaje de la prima neta cobrada) y b) riesgo de la relación con el cliente (estimación de la probabilidad de no poder retener a ese cliente). Los autores concluyeron que la medida del valor económico del cliente EV era viable e implementable como herramienta de gestión y que tenía un efecto positivo a la hora de dirigir las estrategias de marketing relacional.

---

<sup>15</sup> Según los siguientes trabajos citados en Ryals y Knox (2005): Reichheld, F. (1996). The Loyalty Effect. *Harvard Business School Press*, Boston: MA. Reichheld, F., Sasser, W.E. Jr (1990). Zero defections: quality comes to services. *Harvard Business Review*, 68, 5, pp.105-111.

Dada la diversidad de modelos que permiten calcular el CLV, Donkers *et al.* (2007) decidieron comparar la capacidad predictiva de algunos de estos modelos cuando son aplicados al sector asegurador. Este trabajo es, por este motivo, uno de los más completos sobre CLV en el ámbito asegurador. Los autores consideraron dos tipos de aproximaciones. Las más simples se basaban en la relación de la compañía con el cliente en todos los productos que éste tiene contratados pero considerando únicamente el total de beneficios obtenidos a través de todos ellos (modelos basados en la relación). Por otra parte, los modelos más complejos se centraban en cada una de las pólizas contratadas y desagregaban el beneficio obtenido de un cliente en la contribución derivada de cada uno de estos productos (modelos basados en el producto). Como conclusión final los autores constataron que los modelos sencillos proporcionan buenas predicciones del CLV y que los más complejos conseguían mejorar marginalmente dichas predicciones, pero no sustancialmente.

A modo de resumen, diremos que una extensa revisión de los trabajos existentes en la literatura especializada permite constatar que persiste la necesidad de profundizar en el estudio del comportamiento del asegurado dada la escasez de trabajos donde se consideren las particularidades del sector asegurador. Como ha quedado de manifiesto en trabajos recientes (Guillén *et al.*, 2006 y Guillén *et al.*, 2008), es igualmente necesario extender este tipo de investigaciones hacia la gestión del riesgo de negocio para controlar el impacto que sobre su estabilidad tiene el entorno competitivo en el que opera la compañía.

### **3. EL CÁLCULO DEL VALOR DEL CLIENTE**

Para abordar la cuantificación del valor del asegurado iniciaremos nuestro análisis tomando como unidad de referencia el individuo tomador, sin tener en cuenta que algunas decisiones de compra de seguros en las familias deben enfocarse desde la perspectiva de todas las pólizas que están en vigor en un mismo hogar aunque las hayan contratado individuos distintos. Con ello entenderíamos que existe una cesta de productos de seguros en cada hogar. En este apartado, y para simplificar inicialmente el análisis no suponemos la existencia

de vínculos entre individuos distintos de un mismo hogar, aunque sí permitimos que un mismo individuo haya suscrito más de una póliza y lo tendremos en cuenta en el cálculo de su propio valor individual.

Nuestro enfoque del valor del cliente distingue tres orientaciones: valor del histórico del cliente, valor esperado del cliente sin cambiar sus pólizas y valor potencial del cliente, en el que se tiene en cuenta que puede suscribir otros productos aseguradores.

- *Valor del histórico del cliente*: En esta primera valoración estaríamos hablando del valor corriente del cliente y tenemos en cuenta la información disponible hasta el momento sobre todas las pólizas contratadas, su siniestralidad histórica con los costes asociados a ella y la información longitudinal de las primas devengadas. No importa aquí qué ramos tenga suscritos ni las características de las carteras de las que forme parte el asegurado.
- *Valor esperado del cliente*: Desde una perspectiva más amplia debemos incorporar en la noción de valor la idea de beneficio esperado en el corto plazo. Para ello, el valor esperado de un cliente debe tener en cuenta dos factores: la probabilidad de que renueve su póliza y el beneficio esperado en la cartera para el tipo de póliza que tiene suscrita. En este segundo enfoque, no es relevante qué comportamiento histórico ha seguido el cliente en el pasado, sino cuál va a ser su comportamiento en la siguiente anualidad, respecto a mantener los productos y, más concretamente, aquéllos que aportan más beneficios o valor añadido a la entidad. Por ello tendremos en cuenta las pólizas que el individuo tiene suscritas, la probabilidad de renovación de cada una de ellas y el beneficio esperado por póliza en el ramo concreto que renueve.
- *Valor potencial*: En la última fase, veremos que el verdadero valor potencial del cliente tiene que incorporar también la probabilidad de que suscriba más productos, así como el valor que tienen dichos tipos de seguros para la entidad. En el cálculo del valor potencial se tiene en cuenta sólo la probabilidad de que un individuo que no posea un determinado tipo de póliza, la suscriba, conociendo cuáles

son los ramos de las pólizas que ya tiene contratadas. Se trata de aventurar si el cliente tiene potencial de crecimiento en otros ramos. Para predecir dichas probabilidades hay que tener en cuenta la situación de pólizas que posee el cliente, así como sus características, que lo hacen parecerse a individuos similares que ya las han contratado. Bajo este enfoque no se tiene en cuenta que un cliente puede cancelar productos, como en los casos anteriores, ello supondría una pérdida para el asegurador que hemos asimilado a valor cero.

### 3.1. Notación

Sean  $K$  el número de tipos de seguros, es decir el total de ramos considerados o analizados,  $T$  al total de años de estudio en el análisis histórico y  $N_t$  el total de clientes del año  $t$ ,  $t=1, \dots, T$ . Denotaremos por  $n_{itk}$  a la variable que mide el número de pólizas que el individuo  $i$ -ésimo posee en el año  $t$ ,  $i=1, \dots, N_t$  en el ramo  $k=1, \dots, K$ . Diremos que  $S_{itkl}$   $l=1, \dots, n_{itk}$  es la suma de los costes de los siniestros que han sido compensados al individuo  $i$ -ésimo durante el año  $t$ , para la póliza  $l$  del ramo  $k$ . Igualmente, denotaremos por  $P_{itkl}$  a la prima pagada por el individuo  $i$ -ésimo en el año  $t$ , para la póliza  $l$  del ramo  $k$ . Con las anteriores magnitudes podemos definir los totales de costes de siniestralidad y de primas satisfechas en los distintos niveles del negocio.

Los beneficios del ramo (o tipo de pólizas)  $k$ -ésimo en el año  $t$  pueden definirse como una función de las primas percibidas y los costes incurridos. Denotaremos a dicha función por

$$f(P_{.tk}, S_{.tk}),$$

siendo

$$P_{.tk} = \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{l=1}^{n_{itk}} P_{itkl} \quad \text{y} \quad S_{.tk} = \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{l=1}^{n_{itk}} S_{itkl}.$$

Nótese que si  $n_{itk} = 0$  entonces el sumando es igual a 0.

Una forma habitual de expresar estos beneficios es mediante la diferencia entre primas y costes. Para ello utilizaremos la siguiente expresión,

$$f_D(P_{tk}, S_{tk}) = P_{tk} - S_{tk} .$$

Si se desea tener una perspectiva longitudinal de los beneficios, puede optarse por agregar los datos a través de distintas anualidades, así, la expresión para la diferencia entre costes y primas, a través de  $T$  anualidades será

$$f_D(P_{\cdot k}, S_{\cdot k}) = P_{\cdot k} - S_{\cdot k}$$

donde  $P_{\cdot k} = \sum_{t=1}^T P_{tk}$  y  $S_{\cdot k} = \sum_{t=1}^T S_{tk}$  son respectivamente las sumas de primas y costes en  $T$  anualidades.

La ventaja de esta expresión es que es aditiva, por ello

$$f_D(P_{\cdot k}, S_{\cdot k}) = \sum_{t=1}^T f_D(P_{tk}, S_{tk}) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_t} f_D(P_{itk}, S_{itk}),$$

donde  $f_D(P_{itk}, S_{itk}) = P_{itk} - S_{itk} = \sum_{l=1}^{n_{itk}} P_{itkl} - \sum_{l=1}^{n_{itk}} S_{itkl}$  corresponde al valor del  $i$ -ésimo individuo para el año  $t$ , para sus pólizas del ramo  $k$ . Si no tuviera pólizas, se sumaría 0.

- *Valor histórico*

El valor histórico,  $CLV_{iD}^H$  del cliente se mide como

$$CLV_{iD}^H = f_D(P_{i\cdot}, S_{i\cdot}) = \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T f_D(P_{itk}, S_{itk})$$

de modo que esta expresión recogería una visión agregada para todos los ramos y todas las anualidades.

▪ *Valor esperado*

Para tener en cuenta el valor esperado de un cliente, vamos a referirnos a aquéllo que esperamos que suceda en la siguiente anualidad. Supondremos en este caso que no ampliaremos el número de pólizas, ya que este concepto respondería más a la idea de valor potencial, en cuanto a que la relación contractual global con el cliente puede incrementarse. Por lo tanto, en esta fase sólo atenderemos a la posibilidad de que el cliente renueve o cancele las pólizas que posee. Sea  $y_{iTkl}$  una variable binaria que indica por 1 si en el año  $T$ , el individuo  $i$ -ésimo posee la póliza  $l$ -ésima del ramo  $k$ ,  $l=1, \dots, n_{iT_k}$ , cuando la variable vale 0 es que no se posee póliza. Lo que interesa pronosticar es si dicha póliza será renovada en el año siguiente, condicionada a que estuviera contratada en el año anterior. Es decir, deseamos calcular:

$$\Pr(y_{i(T+1)kl} = 1 | y_{iTkl} = 1),$$

teniendo en cuenta además los factores que caracterizan al cliente, que pueden utilizarse en un modelo de regresión logística.

Si el cliente renueva la póliza, entonces esperamos obtener un beneficio que computaremos como la media de los beneficios obtenidos para los clientes de ese ramo en el año anterior, que llamaremos  $B_{DTk}$ , es decir, por

$$B_{DTk} = \frac{1}{M_{Tk}} \sum_{i=1}^{M_{Tk}} f_D(P_{iT_k}, S_{iT_k})$$

siendo  $M_{Tk}$  el número de clientes vigentes en el ramo  $k$  en el año  $T$ .

Definimos el valor esperado del cliente como el esperado por la suma de ramos y la probabilidad de que se mantenga cada póliza que el cliente posee en cada uno de ellos. Por lo tanto:

$$CLV_{iD}^E = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{n_{Tk}} \Pr(y_{i(T+1)kl} = 1 | y_{iTkl} = 1) B_{DTk}.$$

En este caso no podemos hablar del valor esperado del ramo porque tendríamos que incorporar alguna hipótesis de aceptación de nuevas pólizas.

- *Valor potencial*

En el concepto de valor potencial del cliente, únicamente tendremos en cuenta la probabilidad de que el cliente suscriba alguna póliza en un ramo distinto a los ramos en los que ya posee alguna póliza. Para ello deberemos estimar la probabilidad de que  $n_{i(T+1)k}$  sea mayor que cero, sabiendo que  $n_{iT_k}=0$ . Inicialmente denotaremos dicha probabilidad por  $p_{iT_k}$   $k=1, \dots, K$  que fijaremos en cero si  $n_{iT_k} > 0$ , por conveniencia. Por lo tanto definiremos el valor potencial de un cliente como la probabilidad de que suscriba pólizas en otro ramo distinto de los que posee, multiplicado por el beneficio medio obtenido en ese nuevo ramo por cliente, en el año anterior, es decir

$$CLV_{iD}^P = \sum_{k=1}^K p_{iT_k} B_{DTk} .$$

#### 4. LOS DATOS

Disponemos de una muestra formada por 79.599 asegurados que estaban en vigor a 31-12-2005 en una determinada compañía aseguradora, es decir, tenían alguna póliza contratada en alguno de los ramos analizados: automóvil, diversos (hogar, decesos y accidentes), salud y agropecuaria<sup>16</sup>.

Realizando un seguimiento de su comportamiento a lo largo del periodo que abarca el estudio (comprendido entre el 31-12-2005 y el 31-3-2008), podemos estimar la probabilidad de cancelación de los contratos de seguro y determinar qué factores inciden sobre su fidelidad. En esta sección describimos las características más importantes de estos clientes.

<sup>16</sup> La información sobre primas y siniestros sólo está disponible para los ramos del automóvil y diversos, por tanto sólo se podrán considerar éstos en el análisis del valor del asegurado.

El 61,70% de los clientes de esta muestra son hombres y el 28,61% mujeres, el resto son empresas o no se conoce (Tabla 1). La edad media (a 31-15-2005) es 47,03 años y la desviación típica es 14,10. La mayoría son casados (47,85%), mientras que el resto son mayoritariamente solteros (15,26%) o no se conoce su estado civil (35,54%).

Por otra parte, el 55,34% viven en medio rural frente al 37,43% que viven en medio urbano, en el 7,23% de los casos se desconoce. La tipología de consumo predominante es la de afirmación (con renta suficiente para afrontar la adquisición de bienes permanentes o de calidad, sin desatender el ocio), 24,41% del total.

La antigüedad media del cliente a 31-12-2005 es de 8,96 años con una desviación típica de 8,41. Por otra parte, para aquéllos que tienen carnet de conducir a 31-12-2005 (un 62,20% del total) la antigüedad media de su permiso es de 21,97 años (también medida a 31-12-2005) y la desviación típica es 10,81 años.

Respecto al análisis por hogar, en un primer momento hemos considerado una muestra formada por 396 hogares compuestos por dos tomadores que a lo largo del periodo analizado (del 31-12-2005 al 31-3-2008) han tenido en algún momento alguna póliza contratada.

**Tabla 1.**  
Datos demográficos de los tomadores en vigor a 31-12-2005

Concepto		Frecuencia	Porcentaje
<b>Sexo</b>	Hombre	49.116	61,70%
	Mujer	22.772	28,61%
	Empresa	3.179	3,99%
	Desconocido	4.532	5,69%
	<b>TOTAL</b>	<b>79.599</b>	<b>100%</b>
<b>Estado civil</b>	Casado	38.091	47,85%
	Divorciado	53	0,07%
	Separado	559	0,70%
	Soltero	12.148	15,26%
	Viudo	456	0,57%
	No clasificable	28.292	35,54%
<b>TOTAL</b>	<b>79.599</b>	<b>100%</b>	
<b>Lugar de residencia</b>	Rural (<100.000 hab.)	44.047	55,34%
	Urbano (> 100.000 hab.)	29.795	37,43%
	Desconocido	5.757	7,23%
	<b>TOTAL</b>	<b>79.599</b>	<b>100%</b>
<b>Tipología de consumo</b>	De lujo (1)	3.333	4,19%
	de ascensión social (2)	8.777	11,03%
	de afirmación (3)	19.432	24,41%
	de emulación (4)	18.097	22,74%
	de subsistencia (5)	7.240	9,10%
	Desconocido	22.720	28,54%
	<b>TOTAL</b>	<b>79.599</b>	<b>100%</b>

- (1) su excedente de renta le permite acceder a consumo de lujo sin verse afectada su posterior capacidad de compra, (2) su excedente de renta le permite acceder a consumo de un status alto, (3) con renta suficiente para afrontar la adquisición de bienes permanentes o de calidad sin desatender el ocio, (4) con bajo nivel de consumo, dirigido a objetos inmediatamente consumibles y (5) carece de medios

**Tabla 2**  
Sexo de los miembros de los hogares.

Sexo	Frecuencia	Porcentaje
Hombre - Mujer	181	48,5%
Hombre - Hombre	68	18,2%
Mujer – Mujer	20	5,4%
Desconocido	104	27,9%
<b>TOTAL</b>	<b>373</b>	<b>100%</b>

Tabla 3  
Pólizas del hogar a 31-12-2005.

Pólizas en vigor a 31-12-2005 para cada miembro del hogar	Frecuencia	Porcentaje
Uno tiene autos y diversos y el otro tiene sólo autos	54	14,5%
Uno tiene autos y el otro no tiene ninguna póliza	33	8,8%
Uno tiene autos y diversos y el otro sólo tiene diversos	32	8,6%
Los dos tienen sólo autos	29	7,8%
Uno tiene autos y diversos y el otro no tiene ninguna póliza	27	7,2%
Los dos tienen autos y diversos	24	6,4%
Uno tiene autos y el otro diversos	21	5,6%
Los dos tiene diversos	19	5,1%
Uno tiene diversos y el otro no tiene ninguna póliza	17	4,6%
Otros	117	31,4%
<b>TOTAL</b>	<b>373</b>	<b>100%</b>

De estos 396 hogares, 283 estaban compuestos por dos tomadores que tenían simultáneamente alguna póliza en vigor a 31-12-2005, mientras que otros 90 de ellos estaban compuestos por dos tomadores de los cuales sólo uno tenía alguna póliza en vigor a 31-12-2005 (es decir, 373 hogares con alguna póliza en vigor a 31-12-2005).

A continuación describimos brevemente algunas características demográficas de estos 373 hogares que ya tenían al menos una póliza en vigor al inicio del periodo de estudio. En la Tabla 2 se describe su composición en cuanto al género de sus miembros. En un 48,5% de estos hogares los contratantes de los productos han sido un hombre y una mujer. En un 18,2% han sido dos hombres y en un 5,4% han sido dos mujeres, en el resto de casos se desconoce el sexo de alguno de los miembros del hogar.

En la Tabla 3 se muestra la composición de la cartera del hogar a 31-12-2005. La situación más frecuente corresponde al caso en que uno de los miembros ha suscrito una póliza de diversos y una de autos y el otro sólo una de autos, que observamos en el 14,5% de los casos. Por otra parte, en el 8,8% de los casos uno de los miembros tiene una póliza del automóvil y el otro no tiene ninguna póliza a 31-12-2005 (sin embargo, a lo largo del periodo analizado, es decir, hasta 31-3-2008 sabemos que contratará algún producto). El tercer caso más frecuente

se da cuando uno tiene una póliza del automóvil y de diversos y el otro sólo tiene una de diversos (8,6% de los hogares). El resto de posibilidades se dan con menor frecuencia y quedan recogidas en la Tabla 3.

## 5. RESULTADOS

En primer lugar, mostramos los resultados del análisis por cliente y posteriormente por hogar. Para ajustar la probabilidad de cancelación, en primer lugar se ha registrado qué pólizas tenía el asegurado a 31-12-2005, y a partir de su histórico se ha determinado si ha realizado alguna cancelación a corto, medio o largo plazo. Por corto plazo entendemos un periodo de 180 días (aproximadamente 6 meses) a partir del 31-12-2005, medio plazo hace referencia a un periodo de un año (del 31-12-2005 al 31-12-2006) y finalmente el largo plazo comprendería el periodo total analizado (del 31-12-2005 al 31-3-2008). Se han ajustado tres modelos de regresión logística (uno para cada horizonte temporal), donde predecíamos la probabilidad de registrar una cancelación (a corto, medio y largo plazo respectivamente) en función de una serie de variables explicativas. La descripción de estas variables y los ajustes de los modelos se recogen en el Anexo.

**Tabla 4.**  
Probabilidades de cancelación según perfil del asegurado.

PERFIL	PLAZO	PÓLIZA				
		Estado civil	Auto	Salud	Diversos	Agro
Hombres	Corto plazo	Casado	2.72%	14.01%	4.96%	3.34%
		Soltero	1.77%	9.51%	3.26%	2.18%
	Medio plazo	Casado	6.64%	18.83%	9.82%	7.55%
		Soltero	4.24%	12.61%	6.34%	4.84%
	Largo plazo	Casado	14.16%	26.90%	19.77%	15.95%
		Soltero	9.09%	18.23%	13.00%	10.32%
Mujeres	Corto plazo	Casada	2.46%	12.80%	4.49%	3.02%
		Soltera	1.60%	8.64%	2.94%	1.97%
	Medio plazo	Casada	5.32%	15.49%	7.92%	6.07%
		Soltera	3.38%	10.24%	5.08%	3.86%
	Largo plazo	Casada	10.93%	21.50%	15.50%	12.38%
		Soltera	6.93%	14.24%	10.01%	7.89%

Hemos utilizado estos modelos para pronosticar la probabilidad de cancelación en función del perfil del cliente. A modo de ejemplo, hemos considerado un cliente tipo cuya edad, antigüedad como cliente y prima pagada coinciden con los valores promedios obtenidos en la muestra<sup>17</sup>. A partir de aquí, hemos estimado la fidelidad de este cliente en función del resto de características que pueda presentar relativas a su estado civil, sexo y tipo de póliza contratada (asumiremos que sólo tiene una) tanto considerando el corto, el medio y el largo plazo. Los resultados para la probabilidad de cancelación se presentan en la Tabla 4.

Vemos como en función de estas características la probabilidad de cancelación puede llegar a ser del 14,01% (corto plazo), del 18,83% (medio plazo) o del 26,90% (largo plazo) al considerar hombres casados y con una póliza de salud, mientras que si se trata de una mujer soltera y con póliza del automóvil esa probabilidad es del 1,6% (corto plazo), 3,38% (medio plazo) o del 6,93% (largo plazo).

En la Tabla 5 se muestra el valor histórico promedio registrado durante los años 2006 y 2007, así como los valores esperados y potenciales para estos perfiles de clientes. La determinación del valor del asegurado se ha realizado sólo considerando los ramos de diversos y del automóvil que son los únicos para los que se dispone de la información relativa a primas y siniestros.

Los que mayor valor histórico tienen son los hombres casados con una póliza de diversos, 863,88€. En general podemos decir que el valor histórico es más elevado para los asegurados del ramo de diversos, aunque en el caso de las mujeres solteras sucede lo contrario. Observamos igualmente como las mujeres registran menores valores que los hombres. Por lo que respecta al estado civil, los solteros tienen mayor valor histórico que los casados.

Por lo que respecta al valor esperado, el cálculo se ha realizado utilizando un modelo de regresión logística para predecir la probabilidad

---

<sup>17</sup> Edad: 47,03 años. Antigüedad como cliente: 8,96 años. Prima pagada: 381,72€ (prima pagada por cliente en la póliza cancelada, si se ha producido cancelación, o en la primera que haya sido modificada a lo largo del periodo analizado si no ha habido cancelación).

de renovación de cada cliente en función de su perfil<sup>18</sup>. Los detalles de esta estimación se muestran en el Anexo. Posteriormente, hemos multiplicado la estimación de la probabilidad de renovación por el beneficio promedio registrado el año anterior por los clientes con una póliza en ese ramo (para autos, 240,67€ si sólo tiene una póliza y 513,01€ si tiene dos, y para diversos, 285,23 si sólo tiene una póliza y 510,78€ si tiene dos). Observamos en la Tabla 5 como los clientes del ramo de diversos tienen un valor esperado ligeramente superior a los de autos. Por otra parte, las diferencias son mínimas al considerar diferentes perfiles de asegurados en función del sexo y el estado civil.

Para el cálculo del valor potencial, hemos ajustado un modelo logístico para predecir la probabilidad de contratación de nuevas pólizas en un ramo en el que el cliente no tiene ninguna. En el Anexo se muestran los detalles de la estimación. Posteriormente hemos multiplicado esta probabilidad por el beneficio promedio registrado el año anterior en el ramo donde se hace la nueva contratación (299,07€ para autos y 266,26€ para diversos). Tal y como observamos en la Tabla 5, los asegurados con sólo una póliza en el ramo de diversos tienen mayor valor potencial que los que sólo tienen una póliza del automóvil. Los hombres tienen por lo general mayor valor potencial que las mujeres, así como los casados respecto a los solteros.

El análisis del valor de los hogares se ha realizado a partir de los valores calculados para cada uno de sus miembros. Se ha limitado el análisis a aquéllos en los que ambos miembros tienen pólizas en vigor a 31/12/2005<sup>19</sup> para los que además se conoce el sexo, edad y estado civil (las variables explicativas necesarias para estimar las probabilidades de renovación y contratación de nuevos productos con los modelos logísticos utilizados). Hemos de decir, que ello ha reducido el número de hogares analizados a 62, por lo que nuestro propósito se limita a describir esta pequeña muestra de hogares.

---

<sup>18</sup> Se ha asumido que la edad y la antigüedad coinciden con los valores promedio para la muestra analizada, que son de 47,03 y 8.96 años respectivamente.

<sup>19</sup> es decir, ambos miembros proceden de la misma muestra para la que hemos calculado los valores individuales de cada cliente.

**Tabla 5.**  
Valor del asegurado según su perfil.

	Póliza			
	Estado civil	Valor	Auto	Diversos
<b>Hombres</b>	Casado	Histórico	475.86	863.88
		Esperado	239.56	265.86
		Potencial	7.34	78.39
	Soltero	Histórico	547.29	732.23
		Esperado	239.16	265.86
		Potencial	5.62	42.01
<b>Mujeres</b>	Casada	Histórico	440.85	573.23
		Esperado	240.16	265.86
		Potencial	5.43	29.89
	Soltera	Histórico	522.21	488.79
		Esperado	239.90	265.86
		Potencial	4.15	14.54

El valor histórico del hogar, entendido como el valor acumulado durante 2006 y 2007, se ha obtenido simplemente sumando los valores de cada uno de sus miembros. Los resultados para diferentes perfiles de hogares se muestran en la Tabla 6, así como los valores esperados y potenciales. El valor histórico promedio de estos hogares es de 1.260,68€. Los hogares donde los tomadores son dos varones tienen un valor superior, de 1.753,62€, y si son hombre y mujer tienen un valor de 1.137,41€. Por último, si los tomadores son dos mujeres, el valor es de 811.47€. Respecto a la edad, el grupo de mayor valor es el de edad promedio superior a 55 años, 1.515,92€, y el de menor valor el de 45-55 años, con 577.86€.

El valor esperado del hogar se ha obtenido sumando los valores esperados de cada uno de los miembros. El valor esperado promedio de los hogares analizados ha sido de 640,87€. Aquéllos en los que ambos tomadores eran hombres han registrado mayores valores esperados que aquéllos en los que ambos eran mujeres (747,19€ frente a 493,92€), los formados por hombre y mujer han tenido un valor esperado promedio de 615,85€. Al analizar los diferentes grupos de edades, tenemos que el valor esperado aumenta al hacerlo la edad promedio de sus

miembros, pasando de 476,79€ para los hogares con edad promedio inferior a 35 años, a 693,20€ para los mayores de 55.

Finalmente mostramos los resultados para el valor potencial de la familia. Lo hemos obtenido como la suma de los valores potenciales de cada uno de sus miembros, los cuales a su vez se calculaban cuando el tomador no tenía contratada ninguna póliza en alguno de los dos ramos considerados (a finales de 2006)<sup>20</sup>. Hemos de puntualizar que se han obtenido con una muestra muy reducida de hogares (sólo 29) para los que alguno de sus miembros tenían posibilidades de realizar nuevas contrataciones en el sector de diversos y/o autos (donde no tenían pólizas anteriormente). Vemos en la Tabla 6 como el valor potencial promedio de los hogares considerados es de 63,21€. Nuevamente, los hogares donde los dos tomadores son hombres tienen un valor más alto, 139,21€ frente a 52,45€, para los formados por hombre y mujer, y 33,83€ para hogares formados por dos mujeres. El análisis por edad revela una tendencia decreciente del valor potencial al aumentar ésta, pasando de 86,37€ para los menores de 35 años hasta los 34,38€ para los mayores de 55 (para los hogares con edad promedio entre 45-55 años el valor potencial se sitúa en 32,05€).

**Tabla 6**

Valor del hogar según su perfil

	Histórico	Esperado	Potencial
<b>General</b>	1260.68	640.87	63.21
<b>Hombre – Mujer</b>	1137.41	615.85	52.45
<b>Hombre – Hombre</b>	1753.62	747.19	139.21
<b>Mujer – Mujer</b>	811.47	493.92	33.83
<b>Menores de 35</b>	1230.45	476.79	86.37
<b>De 35 a 45</b>	1087.71	573.30	70.01
<b>De 45 a 55</b>	577.86	667.08	32.05
<b>Más de 55</b>	1515.92	693.20	34.38

<sup>20</sup> En realidad sería más adecuado calcularlo considerando la totalidad de pólizas que tiene el hogar en su conjunto y analizando sus posibilidades de crecimiento en otros ramos, pero con la reducida muestra de la que se disponía no ha sido viable.

## 6. CUANTIFICACIÓN DEL RIESGO DE NEGOCIO

El análisis de la fidelidad y el valor del asegurado es el punto de partida para la cuantificación del riesgo de negocio. Una vez disponemos de la probabilidad de cancelación y del valor de cada cliente podemos determinar el valor esperado de la pérdida que registraría la compañía en caso de producirse esta cancelación.

En este artículo, proponemos una primera aproximación a esta cuantificación. Entendemos, por una parte, que en caso de producirse alguna cancelación la compañía pierde en un primer momento el valor que esperaba obtener por esa póliza durante el ejercicio siguiente, lo que hemos denominado valor esperado. El valor potencial vamos a suponer que no se pierde mientras el asegurado no cancele todas sus pólizas, lo cual es razonable dado que mientras siga en la compañía puede contratar pólizas en ramos en los que no tenía ningún contrato en vigor.

Bajo este supuesto, hemos realizado una aproximación a la pérdida que registraría la compañía debida a las bajas de contratos multiplicando la probabilidad de que cada cliente cancele alguna de sus pólizas durante la anualidad siguiente (modelo logístico correspondiente a la Tabla 3A del Anexo) por el valor esperado promedio por póliza de ese cliente durante el año siguiente. Ello implica estar suponiendo el mejor de los escenarios posibles, dado que si el asegurado registra cancelaciones, lo que sabemos es que éstas habrán afectado al menos a una de sus pólizas. La suma de los valores obtenidos para los distintos clientes puede agregarse a fin de obtener el valor esperado de la pérdida que puede registrar la compañía durante el año siguiente por las pólizas que no se van a renovar.

Esta operación, realizada sobre nuestra base de datos, ha permitido cuantificar el valor esperado de esta pérdida en 0.87 MM€ para la muestra de 43.133 clientes para los que ha podido estimarse la probabilidad de cancelación.

A esta pérdida habría que añadir la que se daría en caso de el asegurado se marche por completo de la compañía, cancele todas sus

pólizas, y en ese caso pierda todo su valor esperado más su valor potencial. Como aproximación a la probabilidad de cancelación total se ha tomado la registrada en la propia base de datos (610 cancelaciones totales sobre 79.599 asegurados = 0,76%). Para realizar el cálculo se ha multiplicado esta probabilidad por el valor total que se pierde. Este valor total es el potencial más el valor esperado (el no utilizado en el cálculo de los 0,87 MM€ de pérdida por cancelación parcial). El resultado ha sido de 0,04 MM€. Por lo tanto, la cuantía esperada de la pérdida en la que incurriría la compañía fruto del riesgo de negocio sería de  $0,87\text{MM€} + 0,04\text{MM€} = 0,91\text{MM€}$ , o lo que es lo mismo,  $0,91\text{MM}/43.133 = 21,1\text{€}$  por cliente. Esta estimación no representa una medida de riesgo, que debería calcularse con niveles de confianza del 95% para obtener una estimación de la máxima pérdida alcanzable a este nivel.

Por lo tanto, los esfuerzos por fidelizar a estos asegurados no han de suponer para la compañía un coste promedio superior a 0,91 MM€. La forma de optimizar estos esfuerzos sería dirigirlos hacia los que tienen mayor valor, y en especial, evitar invertir en los que tienen altas probabilidades de cancelación y un escaso valor. A modo de orientación, en ese sentido, se proporciona la Tabla 7 donde se identifican cuatro perfiles de clientes, en función de si tienen un alto/bajo valor esperado (superior/inferior a la mediana, 240€) y/o alta/baja fidelidad (probabilidad de cancelación inferior/superior a la mediana, 6,4%). El total de asegurados analizados se ha dividido en cuatro grupos de tamaño parecido sobre los que dirigir acciones diferenciadas.

En definitiva, los mayores esfuerzos de fidelización han de dirigirse a los grupos de la columna de la derecha de la Tabla 7, que son los que tienen un alto valor y aquellos de escaso valor y baja fidelidad serían los que menos interés tendrían para la entidad.

**Tabla 7**  
Tabla fidelidad - valor

Fidelidad	Valor	
	Bajo valor <i>Valor &lt; 240</i>	Alto Valor <i>Valor ≥ 240</i>
<b>Baja fidelidad</b> <b>Prob. ≥ 6,4%</b>	Edad: 39,55 Antigüedad: 5,79 83,99% hombres 89,53% casados 7,75% solteros	Edad: 47,50 Antigüedad: 10,09 82,05% hombres 83,53% casados 13,86% solteros
<b>Alta fidelidad</b> <b>Prob. &lt; 6,4%</b>	Edad: 46,05 Antigüedad: 8,44 73,63% hombres 50,23% casados 49,01% solteros	Edad: 54,00 Antigüedad: 13,47 57,00% hombres 85,12% casados 14,06% solteros

## 7. CONCLUSIONES

El riesgo de negocio ante asegurados con múltiples contratos abarca dos vertientes: por un lado la contaminación, lo que quiere decir que las decisiones sobre una póliza afectan al resto de pólizas suscritas por un mismo asegurado (en especial su cancelación) y por otro, la dependencia de los factores de riesgo existente en dichas pólizas. Esta dependencia no se tiene en cuenta en muchas de las técnicas de tarificación utilizadas en la práctica y asimismo tampoco se considera en el cálculo del riesgo para medir la solvencia. En este trabajo hemos utilizado la información de las diferentes pólizas de un cliente y de un hogar para aproximar sus respectivos valores.

En primer lugar, en este trabajo nos hemos centrado en el estudio del comportamiento de cancelación en asegurados que suscriben pólizas de distintos ramos en una misma entidad. Tradicionalmente, el sector ha apostado por gestionar de forma separada sus distintos ramos, pero en la actualidad el avance de las técnicas actuariales permite una visión integral del riesgo suscrito en distintas pólizas y por distintos individuos que pertenecen a un mismo hogar, tal como hemos mostrado en este artículo.

A través del análisis de las distintas pólizas vinculadas a un mismo hogar estudiamos el comportamiento de los asegurados con múltiples contratos en lo que respecta a sus decisiones de compra y cancelación, pudiendo así mejorar la cuantificación de su valor histórico, esperado y potencial.

Así pues, hemos conseguido alcanzar el objetivo principal centrado en analizar la relación que se establece entre el cliente y la compañía en todas sus dimensiones, es decir, considerando simultáneamente las múltiples pólizas que éste puede tener contratadas con un mismo asegurador.

Los objetivos alcanzados se han concretado a su vez en los siguientes puntos:

- Estudio de los factores asociados a un mayor o menor riesgo de cancelación en asegurados con varias pólizas
- Análisis del riesgo de negocio a través de dos estimaciones fundamentales: 1) probabilidad de cancelación de pólizas y 2) valor del cliente. Estas estimaciones se han realizado para cada asegurado en función de sus características y así conocer su nivel de fidelidad y el valor que representa ese asegurado para la compañía. La parte más novedosa es la consideración de diversos ramos y de asegurados con múltiples contratos.
- Análisis del riesgo como posible pérdida de valor histórico, de valor esperado y de valor potencial.
- Cuantificación del riesgo de mercado para la compañía en función de los dos parámetros estimados: probabilidad de cancelación y valor del cliente.
- Posibilidad de evaluar escenarios extremos de cancelación (aumentos significativos de las cancelaciones) para evaluar el riesgo de negocio.

Sólo nos restaría finalizar el diseño de estrategias de retención para los segmentos de la cartera identificados en función del valor y el ries-

go de cancelación. En el diseño de estrategias de retención es donde sería útil tener en cuenta la duración estimada de un contrato, para planificar adecuadamente en el tiempo las campañas y dirigirlas específicamente a los clientes antes de que se produzca la cancelación efectiva.

Para investigaciones más avanzadas faltaría realizar un estudio simultáneo del comportamiento del asegurado en las distintas pólizas contratadas con un mismo asegurador con el objetivo de ver la interrelación entre los acontecimientos que afecten a alguno de estos contratos (cancelación/subidas en la prima/siniestros...) y que a su vez incidan en las decisiones del cliente respecto al resto de pólizas contratadas. Se deberían estimar las probabilidades de transición entre distintas composiciones de pólizas contratadas que pueda tener el asegurado y las técnicas de tarificación simultánea de pólizas de distintos ramos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Babbel, D. (1985). The price elasticity of demand for whole life insurance. *The Journal of Finance*, 40, 1, 225-239.

Ben-Arab, M., Brys, E. & Schlesinger, H. (1996). Habit formation and the demand for insurance. *Journal of Risk and Insurance*, 63, 1, 111-119.

Berger, P. D. & Nasr, N. (1998). Customer lifetime value: marketing models and applications. *Journal of Interactive Marketing*, 12, 17-30.

Cooley, S. (2002). Loyalty strategy development using applied member-cohort segmentation. *Journal of Consumer Marketing*, 19, 7, 550-563.

Crosby, L. A. & Stephens, N. (1987). Effects of relationship marketing on satisfaction, retention, and prices in the life insurance industry. *Journal of Marketing Research*, 24, 4, 404-411.

Dhaene, J., Vanduffel, S., Goovaerts, M. J., Kaas, R., Tang, Q. & Vyncke, D. (2006). Risk measures and comonotonicity: a review. *Stochastic Models*, 22, 573-606.

Doherty, N. A. (1984). Portfolio efficient insurance buying strategies. *The Journal of Risk and Insurance*, 51, 2, 205-224.

Donkers, B., Verhoef, P. C. & Jong, M. G. (2007). Modeling CLV: a test of competing models in the insurance industry. *Quantitative Marketing and Economics*, 5, 2, 163-190.

Duker, J. M. (1969). Expenditures for life insurance among working-wife families. *The Journal of Risk and Insurance*, 36, 5, 525-533.

Guillén, M., Nielsen, J. P. & Pérez-Marín, A. M. (2006). La duración de distintos contratos de seguros en los hogares, un enfoque integrado. *Gerencia de Riesgos y Seguros*, 96, 23-32.

Guillén, M., Nielsen, J. P. & Pérez-Marín, A. M. (2008). The need of monitoring customer loyalty and business risk in the European insurance industry. *Geneva Papers on Risk and Insurance – Issues and Practice*, 33, 207-218.

Hammond, J. D., Houston, D. B. & Melander, E. R. (1967). Determinants of household life insurance premium expenditures: an empirical investigation. *The Journal of Risk and Insurance*, 34, 3, 397-408.

Jackson, D. (1989). Determining a customer's lifetime value, part three. *Direct Marketing*, 52, 4, 28-30.

Mayers, D. & Smith, C. W. Jr. (1983). The interdependence of individual portfolio decisions and the demand for insurance. *The Journal of Political Economy*, 91, 2, 304-311.

Nakada, P., Shah, H., Koyluoglu, H. U. & Collignon, O. (1999). P&C RAROC: a catalyst for improved capital management in the property and casualty insurance industry. *The Journal of Risk Finance*, 1, 1, 1-18.

Ryals, L. J. & Knox, S. (2005). Measuring risk-adjusted customer lifetime value and its impact on relationship marketing strategies and shareholder value. *European Journal of Marketing*, 39, 5/6, 456-472.

Schlesinger, H. & Schulenburg, J. M. (1993). Customer information and decisions to switch insurers. *Journal of Risk and Insurance*, 60, 4, 591-615.

Stafford, M. R., Stafford, T. F. & Wells, B. P. (1998). Determinants of service quality and satisfaction in the auto casualty claims process. *Journal of Services Marketing*, 12, 6, 426-40.

Wells, B. P. & Stafford, M. R. (1995). Service quality in the insurance industry. customer perception versus regulatory perceptions. *Journal of Insurance Regulation*, 13, 4, 462-477.

## 1. Variables explicativas empleadas en los modelos logísticos utilizados para predecir la probabilidad de cancelación.

**Tabla 1A.** Variables explicativas empleadas en los modelos logísticos.

Variable	Descripción
<b>Antig</b>	Años enteros transcurridos desde la fecha de la contratación de la primera póliza en la entidad hasta el 31-12-2005.
<b>Edad</b>	Edad del cliente a día 31-12-2005.
<b>Esciv</b>	Estado civil. Lo concretamos a través de las siguientes 4 variables binarias: Esciv_C – casado, Esciv_V – viudo, Esciv_D – Divorciado y Esciv_E – Separado. Cuando una de estas variables toma el valor 1, el asegurado posee el estado civil indicado por la misma. En caso de que todas ellas sean iguales a cero, el asegurado es soltero. Se han eliminado los casos no clasificables, lo que excluye las empresas del análisis.
<b>Sexo</b>	Sexo del asegurado, lo indicamos a través de la variable binaria Sexo_V que toma el valor 1 cuando el asegurado es varón.
<b>Prima</b>	Prima pagada por el cliente <sup>1</sup> en la póliza cancelada (si se ha producido alguna cancelación) o de la primera póliza que haya sido modificada a lo largo del periodo analizado (si no se ha producido cancelación).
<b>Auto</b>	Póliza de automóviles. Variable binaria que toma valor 1 si el asegurado tenía alguna póliza del automóvil contratada a 31-12-2005.
<b>Salud</b>	Póliza de salud. Variable binaria que toma valor 1 si el asegurado tenía alguna póliza de salud contratada a 31-12-2005.
<b>Diversos</b>	Póliza de diversos. Variable binaria que toma valor 1 si el asegurado tenía alguna póliza de diversos contratada a 31-12-2005.
<b>Agro</b>	Póliza agropecuaria. Variable binaria que toma valor 1 si el asegurado tenía alguna póliza agropecuaria contratada a 31-12-2005.

## 2. Modelo logístico de probabilidad de cancelación a corto plazo

El ajuste se ha realizado con una muestra de 48.798 asegurados (dado que algunos registros presentaban valores desconocidos para algunas variables explicativas y por tanto han sido descartados), donde hemos detectado 2.052 cancelaciones (el 4,2%) acontecidas durante los primeros 180 días del año 2006. La regresión resultó globalmente significativa, la razón de verosimilitud alcanzó el valor de 1.380,6, con 12 grados de libertad, p-valor inferior a 0,0001. En la Tabla 2A se muestra la estimación de los parámetros y su contraste de significación individual.

**Tabla 2A**

Estimación modelo Logit (corto plazo)

Variable	Parámetro estimado	Error Estándar	Chi – cuadrado	OR	p-valor
Constante	-3,9717	0,1227	1047,5313		<0,0001
Antig	-0,0204	0,0040	26,5386	0,980	<0,0001
Edad	-0,0090	0,0021	18,9263	0,991	<0,0001
Esciv_C	0,4393	0,0646	46,1738	1,552	<0,0001
Esciv_V	0,9319	0,2107	19,5693	2,539	<0,0001
Esciv_D	0,9149	0,4201	4,7419	2,496	0,0294
Esciv_E	0,1668	0,1560	1,1445	1,182	0,2847
Sexo	0,1045	0,0556	3,5335	1,110	0,0601
Prima	0,0002	0,0001	9,4206	1,000	0,0021
Autos	0,3907	0,0806	23,4857	1,478	<0,0001
Salud	2,1537	0,0815	698,3346	8,616	<0,0001
Diversos	1,0152	0,0488	432,0603	2,760	<0,0001
Agropecuaria	0,6027	0,0937	41,4016	1,827	<0,0001

### 3. Modelo logístico de probabilidad de cancelación a medio plazo

En este caso, se detectaron 4.327 cancelaciones (el 8,9%) acontecidas durante el año 2006. La regresión resultó globalmente significativa, la razón de verosimilitud alcanzó 1.885,06, con 12 grados de libertad, p-valor inferior a 0,0001. En la Tabla 3A se muestra la estimación de los parámetros y su contraste de significación individual.

**Tabla 3A**

Estimación modelo Logit (medio plazo)

Variable	Parámetro estimado	Error Estándar	Chi – cuadrado	OR	p-valor
Constante	-3,0913	0,0924	1120,4427		<0,0001
Antig	-0,0192	0,0028	46,6432	0,981	<0,0001
Edad	-0,0151	0,0015	102,6480	0,985	<0,0001
Esciv_C	0,4746	0,0457	107,6842	1,607	<0,0001
Esciv_V	0,7871	0,1686	21,8007	2,197	<0,0001
Esciv_D	1,0369	0,3631	8,1535	2,820	0,0043
Esciv_E	0,0505	0,1435	0,1238	1,052	0,7250
Sexo	0,2353	0,0406	33,6287	1,265	<0,0001
Prima	-0,0001	0,0001	1,3384	1,000	0,2473
Autos	0,6411	0,0650	97,1906	1,899	<0,0001
Salud	1,8232	0,0699	680,8117	6,192	<0,0001
Diversos	1,0668	0,0349	932,3473	2,906	<0,0001
Agropecuaria	0,7796	0,0644	146,3683	2,181	<0,0001

#### 4. Modelo logístico de probabilidad de cancelación a largo plazo

Del mismo modo, hemos estimado la probabilidad de cancelación en un horizonte temporal más prolongado a partir de las cancelaciones ocurridas durante el periodo que va de 31-12-2005 al 31-3-2008. El número de cancelaciones fue de 8.407, que representan un 17,2%. La regresión resultó globalmente significativa, la razón de verosimilitud fue de 2.831,06, con 12 grados de libertad, p-valor inferior a 0,0001. En la Tabla 4A se muestra la estimación de los parámetros y su contraste de significación individual.

**Tabla 4A**  
Estimación modelo Logit (largo plazo)

Variable	Parámetro estimado	Error Estándar	Chi – cuadrado	OR	p-valor
Constante	-2,1840	0,0724	911,1926		<0,0001
Antig	-0,0141	0,0021	44,8662	0,986	<0,0001
Edad	-0,0187	0,0011	275,0211	0,981	<0,0001
Esciv_C	0,5007	0,0343	213,0012	1,650	<0,0001
Esciv_V	0,7679	0,1340	32,8407	2,155	<0,0001
Esciv_D	1,1500	0,3236	12,6318	3,158	0,0004
Esciv_E	-0,0096	0,1309	0,0053	0,990	0,9418
Sexo	0,2953	0,0308	91,7539	1,343	<0,0001
Prima	-0,0003	0,0001	46,0513	1,000	<0,0001
Autos	0,7065	0,0531	176,7519	2,027	<0,0001
Salud	1,5089	0,0628	578,0557	4,522	<0,0001
Diversos	1,1082	0,0273	1.642,6860	3,029	<0,0001
Agropecuaria	0,8471	0,0511	275,1147	2,333	<0,0001

#### 5. Ajuste de los modelos logísticos utilizados para la estimación de la probabilidad de renovación necesaria para la determinación del valor esperado del asegurado.

**Tabla 5A**

Modelo Logit para el ajuste de la probabilidad de renovar una póliza del automóvil si ésta estaba contratada el año anterior. Modelo globalmente significativo

Variable	Parámetro estimado	Error Estándar	Chi - cuadrado	OR	p-valor
Constante	4,5436	0,2687	285,9964		<0,0001
Antigüedad	0,0421	0,0135	9,7259	1,043	0,0018
Edad	0,0175	0,0067	6,8680	1,018	0,0088
Esciv_C	0,3091	0,1749	3,1248	1,362	0,0771
Esciv_D	-2,4697	1,0553	5,4774	0,085	0,0193
Esciv_E	-2,3700	0,4186	32,0535	0,093	<0,0001
Sexo	-0,6811	0,1860	13,4107	0,506	0,0003
Diversos	-0,4683	0,1699	7,6017	0,626	0,0058

**Tabla 6A**

Modelo Logit para el ajuste de la probabilidad de renovar dos o más pólizas del automóvil si éstas estaban contratadas el año anterior. Modelo globalmente significativo

Variable	Parámetro estimado	Error Estándar	Chi - cuadrado	OR	p-valor
Constante	1,1296	0,0742	231,6066		<0,0001
Antigüedad	0,0230	0,0041	32,2088	1,023	<0,0001
Esciv_C	0,2325	0,0708	10,7684	1,262	0,0010

**Tabla 7A**

Modelo Logit para el ajuste de la probabilidad de renovación en una póliza de diversos si ésta estaba contratada el año anterior. Modelo globalmente significativo

Variable	Parámetro estimado	Error Estándar	Chi - cuadrado	OR	p-valor
Constante	1,4435	0,1609	80,5108		<0,0001
Antigüedad	0,0230	0,0075	9,3749	1,023	0,0022
Edad	0,0206	0,0037	30,3589	1,021	<0,0001

**Tabla 8A**

Modelo Logit para el ajuste de la probabilidad de renovar dos o más pólizas de diversos si éstas estaban contratadas el año anterior. Modelo globalmente significativo

Variable	Parámetro estimado	Error Estándar	Chi - cuadrado	OR	p-valor
Constante	1,3689	0,3016	20,6056		<0,0001
Antigüedad	0,0294	0,0113	6,8108	1,030	0,0091
Edad	0,0151	0,0057	7,1198	1,015	0,0076
Sexo	-0,4907	0,1890	6,7418	0,612	0,0094

6. Modelos logísticos utilizados para la estimación de la probabilidad de realizar nuevas contrataciones necesaria para la determinación del valor potencial del asegurado.

**Tabla 9A**

Estimación modelo logístico para la probabilidad de contratación de una póliza del automóvil condicionada a que no tenía ninguna de este ramo el año anterior. Modelo globalmente significativo

Variable	Parámetro estimado	Error Estándar	Chi - cuadrado	OR	p-valor
Constante	-0,8139	0,1519	28,7177		<0,0001
Antigüedad	-0,0322	0,0078	16,9401	0,968	<0,0001
Edad	-0,0398	0,0038	107,5857	0,961	<0,0001
Esciv_C	0,7765	0,1034	56,3831	2,174	<0,0001
Esciv_V	1,0061	0,4315	5,4362	2,735	0,0197
Esciv_E	-1,6627	0,3331	24,9204	0,190	<0,0001
Sexo	1,1627	0,0961	146,4152	3,199	<0,0001

**Tabla 10A**

Estimación modelo logístico para la probabilidad de contratación de una póliza de diversos condicionada a que no tenía ninguna de este ramo el año anterior. Modelo globalmente significativo

Variable	Parámetro estimado	Error Estándar	Chi - cuadrado	OR	p-valor
Constante	-3,7794	0,1256	905,1696		<,0001
Edad	-0,0078	0,0028	7,9808	0,992	0,0047
Esciv_C	0,2737	0,0874	9,8181	1,315	0,0017
Esciv_V	1,0975	0,3121	12,3651	2,997	0,0004
Esciv_D	1,9489	0,6194	9,9010	7,021	0,0017
Sexo	0,3092	0,0799	14,9779	1,362	0,0001

(Footnotes)

1 Prima de tarifa sin impuestos, importe bruto anual.



## Ponencia 16

# UN ANÁLISIS COMPARATIVO DE UNA SVM Y UN MODELO LOGIT EN UN PROBLEMA DE CLASIFICACIÓN DE ASEGURADOS

Julio Hernández March y Piedad Tolmos Rodríguez-Piñero

### RESUMEN

Este artículo enlaza con el presentado en la pasada edición del congreso RIESGO, haciendo una comparación de los resultados obtenidos entonces en la clasificación de los asegurados de una cartera de una compañía del seguro<sup>21</sup> del automóvil atendiendo a si han presentado o no siniestro en un año, con una nueva técnica estadística. Si antes comparamos los datos que proporcionó la Máquina de Vectores Soporte (SVM) con un Análisis Discriminante, ahora damos un paso más cotejándolos con el Logit, técnica más avanzada que nos permite analizar hasta qué punto son comparables las técnicas del Aprendizaje Máquina y los modelos estadísticos utilizadas habitualmente en la resolución de este tipo de problemas. Aprovecharemos, además, la salida del logit para comparar los factores de riesgo que resultan más relevantes con los que se seleccionaron entonces a través del Algoritmo Genético (AG).

**Palabras Clave:** Factores de Riesgo, Clasificación de Asegurados del Seguro del Automóvil, Logit, Análisis Discriminante, Máquinas de Vectores Soporte, Algoritmos Genéticos

---

<sup>21</sup> Los datos empleados en los experimentos han sido cedidos por la aseguradora MAPFRE en el marco de la Beca de Riesgos y Seguros 2006 que concedió su FUNDACIÓN MAPFRE.

## INTRODUCCIÓN

En la pasada edición del congreso RIESGO presentamos la resolución del siguiente problema (Heras, Bousoño & Tolmos, 2007): dada una cartera de asegurados de una conocida empresa del seguro del automóvil, descritos por sus factores de riesgo, se busca clasificarlos en dos clases, atendiendo a si han presentado o no siniestros en el periodo de un año. Por otra parte, con el objeto de mejorar la capacidad de generalización del clasificador, su estabilidad, y el tiempo de computación, se realizó una selección de las variables importantes, las que retenían la mayor cantidad de información. Esta cuestión tenía además en nuestro caso un valor añadido, en cuanto al interés que la información sobre los factores de riesgo realmente relevantes de cara a la siniestralidad, pueda tener para la aseguradora. El problema conjunto lo abordamos utilizando técnicas que no se habían empleado hasta el momento para este tipo de problemas de tarificación, que pertenecían al campo del Aprendizaje Máquina: la Máquina de Vectores Soporte (SVM) para clasificar, y los Algoritmos Genéticos para seleccionar los factores.

Los resultados de la clasificación se compararon con los obtenidos vía una técnica estadística clásica, el Análisis Discriminante, mediante el software SPSS. Hemos de indicar que debido a la naturaleza cualitativa de las variables, fue necesario transformarlas en cuantitativas/continuas. Para ello se procedió primero a realizar una selección de factores con un Análisis Factorial Múltiple (aplicando SPAD), para entonces efectuar el Análisis Discriminante sobre los factores seleccionados que explicaban el 100% de la varianza.

El objeto del presente artículo es completar el estudio que realizamos entonces empleando para la comparación una técnica estadística más avanzada, el modelo logit, y probar así si los buenos resultados que se consiguen con las nuevas técnicas son efectivamente mejores que si se utilizan técnicas estadísticas habituales en este tipo de problemas. Por otra parte, el modelo logit permite algo que en su día no se pudo hacer con el discriminante, y es comparar también, hasta donde sea posible, la selección de factores.

## 2. EL MODELO LOGIT

Considérese ahora que se quiera explicar la ocurrencia aleatoria del siniestro como consecuencia de un conjunto de características relativas al conductor y de un elemento debido al azar:

$$Y_i = \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ji} + u_i \quad (1)$$

La naturaleza dicotómica de la variable dependiente Y (1 si el conductor asegurado ha sufrido un siniestro y 0 en caso contrario) obliga al empleo de un modelo no lineal que la relacione con las variables explicativas X (las mismas que se han empleado en el modelo SVM). Asumiendo que la perturbación aleatoria u sigue una distribución logística con media nula y varianza constante, el modelo quedaría (Aldrich & Nelson, 1986):

$$E(Y_i) = P(Y_i = 1) = \frac{e^{Z_i}}{1 + e^{Z_i}} \quad (2)$$

donde:

$$Z_i = \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ji} = \ln\left(\frac{P_i}{1 - P_i}\right) \equiv \log it \quad (3)$$

Expresión en la que el cociente de probabilidades se conoce como “odds”. El cociente entre dos odds se conoce como ratio de odds y permite medir el efecto multiplicativo que tiene un aumento unitario de cualquiera de las variables explicativas  $x_j$  sobre la “odds” de tener un siniestro (Liao, 1994).

En nuestro caso, dicho ratio sirve para medir el riesgo de siniestralidad al cambiar el valor de una variable, cuando el resto de las variables permanecen fijas:

$$x'_{ij} = x_{ij} + 1 \Rightarrow \frac{\left[ \frac{P_{id}}{1 - P_i} \right] x'_{ij}}{\left[ \frac{P_i}{1 - P_i} \right] x_{ij}} = e^{\beta_j} \quad (4)$$

El efecto de una variable sobre la probabilidad de ocurrencia de un siniestro también vendrá informado por el estadístico de Wald  $W_j$ , que permite criticar la validez de la estimación puntual del parámetro  $\beta_j$  que pondera a la variable, en función de su dispersión (Hernández-March, 2003):

$$W_j = \left( \frac{\widehat{\beta}_j}{S_{\widehat{\beta}_j}} \right)^2 \quad (5)$$

Cuanto mayor sea  $W_j$  más precisa será la estimación de  $\beta_j$ , de ahí que ante dos variables con coeficientes beta significativos (*p-valor* menor que .1), se preferirá aquel que tenga mayor estadístico de Wald.

### 3. LOS DATOS UTILIZADOS

Para la ejecución hemos empleado una muestra de 58237 asegurados, obtenida al enlazar la cartera de Clientes con la de Siniestros del año 2003 y que nos proporcionó MAPFRE.

Los factores de riesgo que describían a cada asegurado eran originalmente 11: Antigüedad del carnet, Edad, Tipo de carnet, Sexo, Estado Civil, Profesión, Antigüedad del vehículo, Uso del vehículo, Zona de Circulación, Potencia y Valor del vehículo.

En el estudio previo (con la SVM), hubo que segregarlos para obtener variables categóricas como exigía el sistema, manejando finalmente 105 variables de entrada. La salida, recuérdese, sólo tomaba dos valores: 1 (siniestro) o -1 (no siniestro).

### 4. RESULTADOS OBTENIDOS

La tabla 1 recoge los resultados de la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros del modelo, empleando el programa SPSS. En lo que se refiere a la bondad del ajuste puede observarse que el estadístico Chi-cuadrado es muy significativo, lo que permite rechazar

la hipótesis nula de que todos los parámetros del modelo, excepto el término independiente, sean nulos. El estadístico R cuadrado de Nagelkerke hay que interpretarlo en el mismo sentido.

**Tabla 1**  
Resultados del modelo logit sobre la siniestralidad de una cartera de asegurados en el ramo de automóviles

Variable	Coficiente	Wald	Ratio de Odds	Media Muestral
Hombres	-.205***	78.384	.815	.744
Estado Civil				
Soltero	Referencia			.202
Casado	.034	1.616	1.035	.779
Viudo	.152	2.657	1.164	.011
Divorciado	.134	1.289	1.143	.007
Antigüedad del carnet	.001	.668	1.001	21.492
Tipo de permiso				
Coche	Referencia			.997
C	-.249	1.062	.779	.002
C1	-.998**	6.499	.369	.001
Motocicletas	.850	1.913	2.339	.000
Ciclomotor	.642	1.119	1.9	.000
D-D1-B2	.334	.300	1.397	.000
Edad del conductor	-.008***	60.124	.992	45.572
Antigüedad del vehículo	-.049***	534.287	.952	6.291
Valor en euros				
hasta 1050	Referencia			.359
1051-1350	.245***	63.225	1.278	.191
1351-1950	.283***	72.439	1.328	.280
más de 1950	.335***	64.040	1.398	.170
Potencia				
hasta 64002	Referencia			.257
64003-85002	-.083***	7.973	.921	.246
85003-103002	-.015	.186	.985	.248
más de 103002	-.196***	26.705	.822	.249

<b>Variable</b>	<b>Coefficiente</b>	<b>Wald</b>	<b>Ratio de Odds</b>	<b>Media Muestral</b>
<b>Región</b>				
Andalucía sin Sevilla	Referencia			.208
Sevilla	.511***	188.135	1.668	.084
Aragón	1.281***	499.724	3.599	.031
Asturias	.948***	299.361	2.579	.034
Baleares	-.191***	7.758	.826	.026
Canarias	1.017**	5.107	2.764	.000
Cantabria	.179**	6.125	1.196	.017
Castilla La Mancha	.796***	345.571	2.216	.060
Castilla y León	1.693***	1326.112	5.436	.057
Cataluña sin Barna	.863***	221.482	2.371	.029
Barcelona	2.008***	1743.791	7.450	.064
Extremadura	.312***	39.957	1.366	.040
Galicia	1.693***	1150.931	5.435	.049
Madrid	2.054***	2295.387	7.803	.094
Murcia	-.115**	4.480	.891	.037
Navarra	.885***	171.843	2.422	.020
País Vasco	.507***	114.079	1.661	.046
La Rioja	1.682***	177.363	5.374	.006
Comunidad Valenciana sin Valencia	620***	132.487	1.859	.033
Valencia	1.005***	566.972	2.732	.062
<b>Profesión</b>				
20	Referencia			.433
0	-1.097***	997.077	.334	.093
10	-.482***	69.003	.617	.026
12	-2.021***	1475.477	.133	.056
21	-.515***	90.273	.598	.030
22	.320***	7.259	1.377	.007
31	-.717***	32.774.488	.005	
40	.052	1.084	1.053	.038
41	.634***	384.728	1.885	.126
42	.460*	3.291	1.584	.002
53	-.595***	25.448	.551	.006
54	-1.186***	116.454	.305	.009
55	-.788***	408.854	.455	.065
56	-1.587***	1873.128	.205	.100
57	-1.443***	63.914	.236	.003
63	.610	2.084	1.840	.001
64	.777*	3.216	2.175	.001
11-32-51	.135	.142	1.145	.001

Variable	Coefficiente	Wald	Ratio de Odds	Media Muestral
Uso				
110	Referencia			.841
111	2.063***	79.403	7.866	.005
114	-.727	2.454	.483	.000
118	-.362***	20.146	.696	.014
119	2.187**	4.067	8.908	.000
131	2.450***	10.367	11.593	.000
141	3.143***	9.435	23.162	.001
150	2.340**	5.059	10.386	.000
160	.644***	49.160	1.903	.014
168	-.848***	158.812	.428	.024
210	-.324***	29.648	.723	.027
211	1.041	.756	2.831	.000
212	1.986	1.878	7.285	.000
213	.579	.268	1.784	.000
217	-.355***	72.715	.701	.061
219	2.315**	4.866	10.122	.000
220	-.806**	4.461	.447	.001
228	-1.190	1.155	.304	.000
230	.556	.861	1.743	.000
231	2.421**	5.439	11.257	.001
232	1.732**	5.039	5.649	.000
238	-.401***	14.419	.670	.008
240	-.227	.534	.797	.001
Resto	3.706***	12.996	40.711	.001
Constante	.355***	47.210		
Chi cuadrado:	15592.702***			
R <sup>2</sup> de Nagelkerke:	.313			

**Nota.** La categoría Resto de la variable Uso es el resultado de solapar las siguientes categorías de dicha variable: 117, 133, 137, 190, 199, 218, 234, 235, 258 y 242.

\* .05 < p ≤ .1

\*\* .01 < p ≤ .5

\*\*\* p ≤ .1

En lo que respecta a la estimación de los parámetros, se observa que la región en la que el asegurado conduce habitualmente es la variable que mejor discrimina a la hora de explicar la siniestralidad. Dentro de este apartado, los conductores que corren más riesgo son los de Madrid y Barcelona. En concreto, el riesgo de declarar un accidente en Madrid es 7.803 veces mayor al de hacerlo en Andalucía

sin incluir Sevilla, que es la categoría de referencia, mientras que en Barcelona ese riesgo es 7.45 veces mayor. Otras zonas de conducción en las que resulta más probable declarar un siniestro que en Andalucía sin Sevilla son: Castilla y León, Galicia, Valencia, Aragón, Castilla La Mancha, Asturias, Cataluña sin Barcelona, Sevilla, La Rioja, Navarra, Comunidad Valenciana sin Valencia, País Vasco, Extremadura, Cantabria y Canarias. Sin embargo, sólo en Baleares y Murcia la probabilidad de declarar un siniestro es menor que en Andalucía sin Sevilla.

A continuación, la profesión del asegurado también permite jerarquizar las distintas categorías, en lo que al riesgo de siniestralidad se refiere. En este sentido, se ha comprobado que los conductores con profesión 41 presentan una “odds” que es 1.885 veces mayor que los de la profesión 20<sup>22</sup>, que se ha tomado como categoría de referencia (por ser la más frecuente). Aquellos conductores con código de profesión 22<sup>23</sup>, 42<sup>24</sup> ó 64<sup>25</sup> también presentan un riesgo de siniestralidad mayor que los de la categoría de referencia, aunque las diferencias no sean tan significativas. Sin embargo, los conductores con profesión 53, 31, 57, 10, 21, 54, 55, 0, 12 ó 56<sup>26</sup> corren menos riesgo de tener un siniestro que los de la categoría de referencia (habiéndose ordenado la serie de menor a mayor significatividad), aún cuando las diferencias hayan resultado importantes en todos los casos. En particular, el riesgo de los asegurados con profesión 56 es .205 veces el riesgo de los asegurados de la categoría de referencia. El resto de las profesiones consideradas no han resultado significativas a la hora de explicar la ocurrencia de un siniestro.

---

<sup>22</sup> INDUSTRIALES, COMERCIANTES, PROFESIONES LIBERALES (sin desplazamiento profesional habitual).

<sup>23</sup> INDUSTRIALES, COMERCIANTES, PROFESIONES LIBERALES (desplazamiento profesional habitual interurbano).

<sup>24</sup> FUNCIONARIOS Y ADMINISTRATIVOS (desplazamiento profesional habitual interurbano).

<sup>25</sup> CONDUCTOR DE CAMIÓN/VEH. INDUSTRIAL DE TERCEROS.

<sup>26</sup> Por orden: ESTUDIANTES, VIAJANTES Y REPRESENTANTES URBANOS, EMPLEADOS QUE CONDUCEN CON EXCLUSIVIDAD VEHÍCULOS DE LA SOCIEDAD, AGRICULTORES Y SUS EMPLEADOS, INDUSTRIALES, JUBILADOS, OBREROS, *Usos 0 y 12 sin clasificar*, SIN PROFESIÓN

La antigüedad del vehículo es la siguiente variable con más peso en el modelo. El riesgo de que un vehículo, con una antigüedad determinada, sufra un accidente es .952 veces el que tiene ese mismo vehículo un año antes.

El uso que el conductor hace del vehículo es la siguiente variable en importancia <sup>27</sup>. En este caso, la mayor parte de las categorías presentan mayor probabilidad de sufrir un accidente que la categoría 110<sup>28</sup> que se tomó de referencia (por resultar también la más frecuente). Las categorías con las diferencias más significativas (en orden descendente) son la 111<sup>29</sup>, la 160<sup>30</sup>, la categoría resto, la 131<sup>31</sup> y la 141<sup>32</sup>. Otros usos con mayor probabilidad de sufrir accidente que la categoría 110, pero con menor peso que los anteriores, son (ordenados de mayor a menor significatividad): 231, 150, 232, 219 y 119<sup>33</sup>. Por el contrario, los usos con código 220, 238, 118, 210, 217 y 168<sup>34</sup> presentan menor riesgo de accidente que la categoría de referencia (estando ordenados de menor a mayor significatividad). En particular, el riesgo de declarar un siniestro por parte de un asegurado con uso 168 es .428 veces el que corre un asegurado de la categoría 110. La probabilidad de sufrir un siniestro por parte de aquellos asegurados que dan otros usos al vehículo no difiere significativamente de la de los asegurados con código de uso 110.

<sup>27</sup> Algunas categorías de esta variable con frecuencias reducidas presentaban coeficientes estimados muy elevados, acompañados de desviaciones típicas también muy elevadas con niveles de significación bajos. Este comportamiento indicaba la presencia de multicolinealidad en el modelo (Greene, 1998; Hosmer & Lemeshow, 1989). Por lo tanto, se procedió a reunir las categorías afectadas (117, 133, 137, 190, 199, 218, 234, 235, 258 y 242) en otra codificada como *resto*. Después, desapareció este problema.

<sup>28</sup> TURISMO DE USO PARTICULAR.

<sup>29</sup> TURISMOS MATRICULADOS A NOMBRE DE EMPRESA.

<sup>30</sup> VEHICULO TODO TERRENO.

<sup>31</sup> TAXI SIN TAXIMETRO.

<sup>32</sup> VEHICULOS DE ALQUILER SIN CONDUCTOR.

<sup>33</sup> Por orden: FURGONETAS TRANSPORTE DE MERCANCIAS NO PELIGROSAS, TURISMOS DE AUTO-ESCUELA, AMBULANCIAS, FURGONETAS DE REPARTO URBANO Y AUTOVENTA, VEHICULOS DE SERVICIO DE URGENCIAS (POLICIA Y BOMBEROS)

<sup>34</sup> Por orden: FURGONETAS DE USO RURAL HASTA 500 KGS DE CARGA USO PROPIO - Uso 220, FURGONETAS USO PARTICULAR +5 HASTA 9 PLAZAS - Uso 238, TURISMOS USO PARTICULAR +5 HASTA 9 PLAZAS - Uso 118, FURGONETAS HASTA 3500 KGS - Uso 210, FURGONETAS HASTA 500 KGS DE CARGA USO PROPIO - Uso 217, TODO TERRENO +5 HASTA 9 PLAZAS - Uso 168.

A continuación figura la variable valor del vehículo que, inicialmente, se trató con un carácter cuantitativo. Al correr la regresión, el parámetro que la pondera resultó significativo pero con una estimación de cero en sus tres primeras posiciones decimales. Una vez descartados problemas de multicolinealidad se decidió hacerla cualitativa. Para ello se procedió a establecer cuatro clases, en función de los cuartiles, y a volver a estimar el modelo con la variable cualitativa, tomando de referencia la categoría inferior (vehículos con un valor de hasta 1050 €). El resultado muestra que cuanto mayor es el valor del vehículo, mayor es la probabilidad de declarar un siniestro. En particular, los asegurados cuyos vehículos valen más de 1950 €, tienen un riesgo de accidente que es 1.398 veces mayor que el de aquellos que conducen vehículos de hasta 1050 €.

Por su parte, la condición de hombre reduce la probabilidad de accidente, siendo su riesgo 0.815 veces el que corre una mujer. Este resultado ya se produce cuando se cruzan las variables sexo y siniestro, por cuanto el porcentaje de hombres que declaran siniestro es 7 puntos inferior al de las mujeres (49.6% frente a 56.5%).

Asimismo, el riesgo de una persona con una edad concreta es .992 veces el de otra con un año menos.

El siguiente factor explicativo de la siniestralidad es la potencia del vehículo. Esta variable tuvo un comportamiento similar al de la variable valor, en el sentido de incluir una estimación de cero en el parámetro, a pesar de resultar significativa. En virtud de ello, se procedió de la misma forma, dividiendo la variable en cuatro clases a partir de sus cuartiles. Los resultados muestran que los vehículos menos potentes presentan un riesgo de siniestralidad mayor. Ocurre lo contrario cuando se elimina la variable valor de la regresión, lo que demuestra que el comportamiento de la variable potencia viene determinado por el valor del vehículo (de hecho ambas variables presentan un elevado grado de correlación). La inclusión en la regresión de los dos factores permite aislar la verdadera influencia de la potencia del vehículo sobre el riesgo de sufrir un accidente.

Asimismo, al analizar la influencia de las diferentes modalidades de permisos de conducción existentes, sólo ha resultado significativo que aquellos conductores con permiso de circulación tipo C1 corren menos riesgo de sufrir un accidente que los que poseen un permiso de circulación de coche.

No se han apreciado diferentes niveles de riesgo según el estado civil del conductor. Tampoco la antigüedad del carnet ha resultado significativa. Esta circunstancia se explica por la elevada correlación que mantiene esta variable con la edad del conductor (de hecho, aquella aparece con un beta de  $-0.006$  y un Wald de  $24.657$  cuando esta se retira del modelo) y la menor influencia que tiene sobre la siniestralidad, lo que hace que sea la edad del conductor la variable que resulte significativa.

De las 105 variables de entrada utilizadas, 58 han resultado significativas (46 con un p-valor inferior al 1%, 10 con un p-valor entre el 1 y el 5% y sólo 2 con un p-valor superior al 5%).

### *Comparación con una SVM*

En lo que se refiere a la capacidad predictiva del modelo, la tabla 2 recoge las tasas de clasificación que se han obtenido al aplicar los dos modelos objeto de comparación: una SVM y el logit<sup>35</sup>.

---

<sup>35</sup> Para pronosticar los siniestros en el modelo logit se tomó como valor de corte  $0,514$  (que es la proporción muestral de asegurados que declaró siniestro).

**Tabla 2**

Tasas de clasificación obtenidas en los dos modelos empleados

	SVM			LOGIT		
Tasa de clasificación	77.72%			70.8%		
Matriz de Confusión (en porcentajes)		-1	1		-1	1
	-1	76.41%	23.59%	-1	71.7%	28.3%
	-1	20.87%	79.13%	1	30.1%	69.9%

En este sentido, se puede observar que el modelo SVM pronostica correctamente el 77.72% de los casos observados, casi 7 puntos por encima de lo que lo hace el modelo logit (diferencia que se reduce a algo menos de 5 puntos en el caso de los asegurados que no han tenido siniestro, pero que se incrementa por encima de los 8 puntos en el apartado de los que sí han sufrido accidente).

Sin embargo, en lo que respecta a la identificación de las variables que explican la siniestralidad, el modelo logit ofrece una información más rica que el AG. Aquel, no se limita a informar sobre qué factores inciden en la siniestralidad y con qué peso, sino que además permite conocer el sentido de dicha influencia.

**Tabla 3**

Los 30 factores seleccionados por el AG

1. Antigüedad carnet	2. Edad conductor
3. Antigüedad vehículo	4. Madrid
5. Barcelona	6. Valor
7. Potencia	8. Castilla y León
9. Galicia	10. Profesión 12
11. Profesión 41	12. Casado
13. Hombres	14. Uso110
15. Andalucía sin Sevilla	16. Profesión56
17. Murcia	18. Aragón
19. Soltero	20. Sevilla
21. Profesión 20	22. Baleares
23. Profesión 0	24. Valencia
25. Cataluña sin Barcelona	26. Castilla La Mancha
27. Comunidad Valenciana sin Valencia	28. Uso 168
29. Asturias	30. Profesión 55

Por otra parte, al comparar los resultados obtenidos se observan diferencias notables entre ambos modelos. Así, aunque la mayor parte de los factores del AG se encuentran seleccionados por el logit, el que tiene más importancia en aquella –que no es otro que la antigüedad en el carnet– no resulta siquiera significativo en este. No parece, a este respecto, que el AG esté recogiendo la elevada correlación existente entre este factor y la edad del conductor que también resulta seleccionada. El estado civil tampoco parece tener suficiente peso en el modelo logit, mientras que soltero y casado sí lo tienen en la selección dada por el AG. Al considerar en el modelo logit los factores más significativos (con mayor Wald) y compararlos con los respectivos del AG (véase tabla 3), se observa que el lugar geográfico, la profesión y la antigüedad del vehículo son las variables con más peso en dicho modelo, mientras que en el AG la antigüedad del carnet, la edad del conductor y la antigüedad del vehículo tienen más importancia que el lugar geográfico o la profesión. También se observa que hay mayor diversidad entre los 30 factores seleccionados por el AG, que entre aquellos que tienen más peso en el modelo logit.

## 5. CONCLUSIONES

La aplicación de una SVM y un AG, y un modelo logit al análisis de la siniestralidad de una cartera de asegurados de automóvil ha ofrecido cierta coincidencia respecto a los factores seleccionados, aunque no en cuanto a su ordenación. La primera técnica ha resultado más eficaz en lo que al porcentaje de acierto en el pronóstico se refiere, como también ocurrió con el Análisis Discriminante. Sin embargo, el logit tiene la ventaja de poder estimar el aumento o la disminución del riesgo de siniestralidad, ante un cambio en uno de los factores. En este sentido, podría pensarse en utilizar un AG para seleccionar los factores y un logit para conocer el sentido de la influencia de cada uno de ellos, siendo conscientes de que no será posible tal conocimiento en aquellos factores que no resulten significativos en el logit.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aldrich, J. & Nelson, F.D.. Linear Probability, Logit and Probit Models. Sage University Papers: Quantitative Applications in the Social Sciences. Berverly Hills: Sage Publications, 1986.

Bousoño Calzón, Heras Martínez, Tolmos Rodríguez-Piñero Factores de Riesgo y Cálculo de primas mediante Técnicas de Aprendizaje FUNDACIÓN MAPFRE, Madrid, Junio 2008 .

Greene, W.H.. Análisis Econométrico. Prentice Hall, 1998.

Heras Martínez, Bousoño Calzón, Tolmos Rodríguez-Piñero, Santiago Mozos. Selección de Factores de Riesgo y Predicción de Siniestros en el Seguro del Automóvil Mediante Métodos de Aprendizaje Máquina, actas del congreso RIESGO 2007

Hernández-March, J.. La Emancipación Juvenil: Un Análisis Estadístico Aplicado a la Comunidad de Madrid. [Recurso electrónico] Tesis Doctoral. [Madrid]: Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones , 2003.

Hosmer, D.W. & Lemeshow, S.. Applied Logistic Regression. New York: John Wiley (1989).

Liao, T.F.. Interpreting Probability Models: Logit, Probit and Other Generalized Linear Models. Sage University Papers: Quantitative Applications in the Social Sciences. Thousand Oaks: Sage Publications, 1994.

Salas-Velasco, M.. Graduates on the labor market: Formal and informal post-school training investments. Higher Education, 54(2), 227-246 ,2007.

## Ponencia 17

### EFFECTO DE LA ESTRATEGIA DE REASEGURO PROPORCIONAL DE UMBRAL EN LA PROBABILIDAD DE RUINA DEL ASEGURADOR

Mármol, M.M., Claramunt, M.M. y Castañer, A.

#### 1. INTRODUCCIÓN

En el modelo clásico de la teoría del riesgo (ver Bühlmann (1970), Panjer y Willmot (1992) o Gerber (1979)), el nivel de las reservas  $R(t)$  en un momento determinado  $t \in [0, \infty)$  se define como  $R(t) = u + ct - S(t)$  con  $u = R(0)$  siendo el nivel inicial de las reservas,  $S(t)$  la siniestralidad agregada hasta el momento  $t$ , y  $c$  la intensidad de prima.

$S(t)$  es un proceso de Poisson compuesto,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i,$$

donde  $N(t)$ , es el número de siniestros ocurridos hasta el momento  $t$ , que sigue un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda$ , y  $Z_i$  es la cuantía del  $i$ -ésimo siniestro con función de densidad  $f(z)$ . Las cuantías de los siniestros están idéntica e independientemente distribuidas, y son independientes del número de siniestros.

La intensidad de prima,  $c$ , es  $c = \lambda E[Z](1 + \rho)$ , siendo  $\lambda$  el número medio de siniestros,  $E[Z]$  la media de la cuantía de un siniestro y  $\rho > 0$  el recargo de seguridad (cumpliéndose la condición "net profit").

En este modelo los tiempos de interocurrencia entre dos siniestros consecutivos,  $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$  son una secuencia de variables aleatorias idéntica e independientemente distribuidas, que siguen una distribución exponencial de media  $1/\lambda$ .

El momento de ruina, definido como el primer momento en el que las reservas toman niveles negativos, se denota como  $T = \min \{t: R(t) < 0\}$ , con  $T = \infty$  si  $R(t) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$ . La probabilidad de ruina última es,

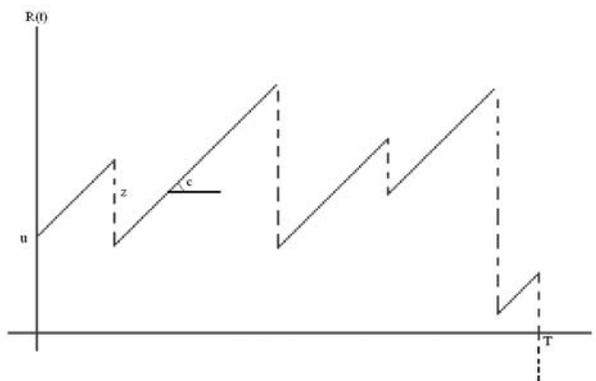
$$\psi(u) = P[T < \infty / R(0) = u].$$

Es precisamente esta magnitud la que analizamos en este trabajo como indicador de solvencia de la cartera.

La probabilidad de supervivencia,  $\varphi(u)$ , se define como la complementaria de la probabilidad de ruina, es decir,

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u).$$

La representación gráfica de este modelo se recoge en la Figura 1.



**Figura 1**

Trayectoria de las reservas  $R(t)$ .

En un modelo modificado con una estrategia de reaseguro proporcional, ver Dickson y Waters (1996), Centeno (1986)... el asegurador o cedente asume un porcentaje  $k$  de la cuantía de los siniestros, al que se denomina nivel de retención, y el reasegurador se hará cargo del  $(1-k)$  restante. Así, la siniestralidad agregada esperada asumida por el asegurador es  $k\lambda E[Z]$  y la asumida por el reasegurador es  $(1-k)\lambda E[Z]$ .

De igual forma que se cede la obligación de pagos de una parte del siniestro, también se cede al reasegurador una parte de la prima. Denominamos  $c'$  a la intensidad de prima que retiene el asegurador. Tanto asegurador como reasegurador deben incluir un recargo de seguridad positivo en sus primas. Llamamos  $\rho$  al recargo de seguridad que cobra el asegurador al asegurado, y  $\rho_R$  al recargo de seguridad que cobra el reasegurador al asegurador.

Así, la intensidad de prima retenida por el asegurador,  $c'$ , dependerá de dicho recargo  $\rho_R$  y de la proporción  $k$ ,

$$c' = c - (1-k)(1+\rho_R)\lambda E[Z] = \lambda E[Z](1+\rho) - (1-k)(1+\rho_R)\lambda E[Z]. \quad (1)$$

Al mismo tiempo, podemos calcular el nuevo recargo de seguridad real para el asegurador, que denominamos  $\rho_N$ ,

$$c = k\lambda E[Z](1+\rho_N).$$

Este nuevo recargo de seguridad, que depende únicamente de  $\rho$ ,  $\rho_R$  y  $k$ , puede calcularse fácilmente a partir de la expresión anterior y de (1) siendo,

$$\rho_N = \rho_R - \frac{\rho_R - \rho}{k}, \quad \forall k > 0.$$

Como el asegurador debe mantener la condición de “net profit” en su cartera retenida, no puede tener una prima neta inferior a la siniestralidad esperada asumida, por tanto  $\rho_N > 0$ . De esta condición, obtenemos un límite inferior para la proporción de negocio retenida,

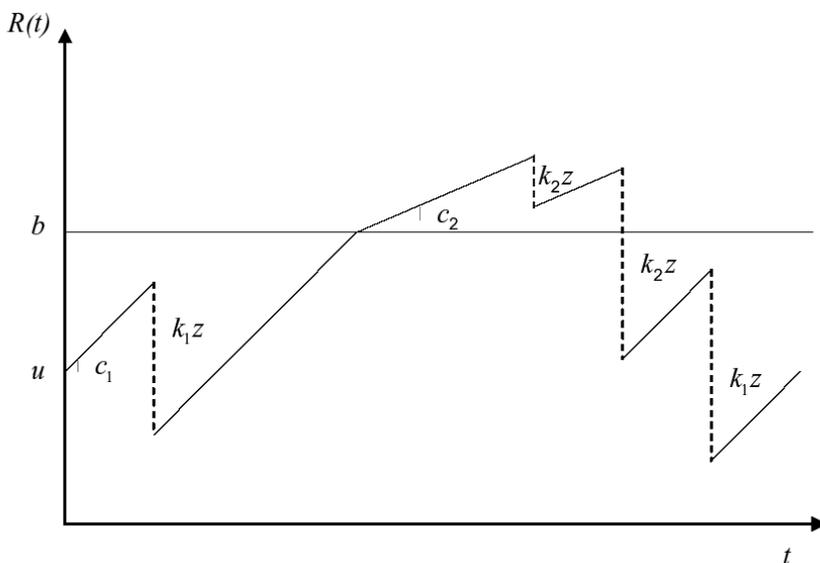
$$\text{Max} \left\{ 0, \frac{\rho_R - \rho}{\rho_R} \right\} < k \leq 1 \quad \text{con } \rho > 0, \rho_R > 0. \quad (2)$$

Si  $\rho = \rho_R$ , la intensidad de prima total pagada por el asegurado,  $c$ , se reparte entre el asegurador y el reasegurador en la misma proporción  $k$ , por tanto  $c' = kc$ ,  $\rho_N = \rho$  y  $0 < k \leq 1$ .

En este artículo, presentamos una nueva estrategia de reaseguro que podemos considerar dinámica, ya que actúa de forma diferente en función del nivel de las reservas. La denominamos “estrategia de reaseguro proporcional de umbral”, ya que encontramos dos tramos diferenciados en función de un umbral prefijado  $b$ .

Para valores de las reservas inferiores a un determinado umbral  $b$  el porcentaje de retención es  $k_1$ ; mientras que para valores de  $u$  mayores que  $b$ , el porcentaje de retención aplicado es  $k_2$ . Así la intensidad de prima retenida por el asegurador es  $c_1$  y  $c_2$ , respectivamente. Consideramos que los niveles de retención dan recargos de seguridad nuevos positivos, es decir que se cumple la condición de “net profit”.

Gráficamente, la idea de esta estrategia de reaseguro proporcional de umbral se recoge en la Figura 2.



**Figura 2**

Trayectoria de las reservas,  $R(t)$ ,  
en una cartera con estrategia de reaseguro umbral.

En este trabajo nos planteamos el cálculo de la probabilidad de ruina en un modelo modificado con una estrategia de reaseguro proporcional de umbral. En la sección 2 hallamos la ecuación íntegro-diferencial para la probabilidad de ruina, en la sección 3 hallamos las expresiones cuando la cuantía individual de los siniestros se distribuye según una exponencial, y finalmente en la sección 4 realizamos un análisis comparativo.

## 2. ECUACIÓN ÍNTEGRO-DIFERENCIAL PARA LA PROBABILIDAD DE RUINA

En esta sección obtenemos la ecuación íntegro-diferencial que satisface la probabilidad de ruina. Esta probabilidad se comporta de forma diferente dependiendo de si el nivel de las reservas iniciales,  $u$ , está por encima o por debajo del umbral  $b$ . Por tanto,

$$\psi_k(u) = \begin{cases} \psi_1(u) & \text{si } 0 \leq u < b, \\ \psi_2(u) & \text{si } u \geq b. \end{cases}$$

**Teorema 1:** La probabilidad de ruina  $\psi(u)$  satisface las ecuaciones íntegro-diferenciales

$$\psi'_k(u) = \begin{cases} \psi'_1(u) & \text{si } 0 \leq u < b, \\ \psi'_2(u) & \text{si } u \geq b, \end{cases} \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi'_1(u) &= \frac{\lambda}{c_1} \psi_1(u) - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^{\frac{u}{k_1}} \psi_1(u - zk_1) f(z) dz - \frac{\lambda}{c_1} \left( 1 - F\left(\frac{u}{k_1}\right) \right), & 0 \leq u < b \\ \psi'_2(u) &= \frac{\lambda}{c_2} \psi_2(u) - \frac{\lambda}{c_2} \left[ \int_0^{\frac{u-b}{k_2}} \psi_2(u - zk_2) f(z) dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{u-b}{k_2}}^{\frac{u}{k_2}} \psi_1(u - zk_2) f(z) dz \right] - \frac{\lambda}{c_2} \left( 1 - F\left(\frac{u}{k_2}\right) \right), & u \geq b. \end{aligned} \quad (4)$$

**Demostración:**

Para  $0 \leq u < b$ ,

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= \int_0^{\frac{b-u}{c_1}} \lambda e^{-\lambda t} \left[ \int_0^{\frac{u+c_1 t}{k_1}} \psi(u + c_1 t - zk_1) dF(z) + \int_{\frac{u+c_1 t}{k_1}}^{\infty} dF(z) \right] dt + \\ &\quad \int_{\frac{b-u}{c_1}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \left[ \int_0^{\frac{b+c_2 \left(t - \frac{b-u}{c_1}\right)}{k_2}} \psi\left(b + c_2 \left(t - \frac{b-u}{c_1}\right) - zk_2\right) dF(z) + \int_{\frac{b+c_2 \left(t - \frac{b-u}{c_1}\right)}{k_2}}^{\infty} dF(z) \right] dt \quad (5) \\ &= \lambda \int_0^{\frac{b-u}{c_1}} e^{-\lambda t} \gamma_1(u + c_1 t) dt + \lambda \int_{\frac{b-u}{c_1}}^{\infty} e^{-\lambda t} \gamma_2\left(b + c_2 \left(t - \frac{b-u}{c_1}\right)\right) dt, \end{aligned}$$

donde

$$\gamma_1(t) = \int_0^{\frac{t}{k_1}} \psi(t - zk_1) dF(z) dz + \left(1 - F\left(\frac{t}{k_1}\right)\right),$$

$$\gamma_2(t) = \int_0^{\frac{t}{k_2}} \psi(t - zk_2) dF(z) dz + \left(1 - F\left(\frac{t}{k_2}\right)\right).$$

Haciendo un cambio de variable en (5) se obtiene

$$\psi_1(u) = \frac{\lambda}{c_1} e^{\frac{\lambda u}{c_1}} \int_u^b e^{-\frac{\lambda}{c_1} t} \gamma_1(t) dt + \frac{\lambda}{c_2} e^{\frac{\lambda u}{c_1}} \int_b^\infty e^{-\frac{\lambda}{c_2} \left(t - \frac{(c_1 - c_2)b}{c_1}\right)} \gamma_2(t) dt. \quad (6)$$

Derivando (6) respecto a  $u$ ,

$$\psi'_1(u) = \frac{\lambda}{c_1} \psi_1(u) - \frac{\lambda}{c_1} \int_0^{\frac{u}{k_1}} \psi_1(u - zk_1) dF(z) dz - \frac{\lambda}{c_1} \left(1 - F\left(\frac{u}{k_1}\right)\right).$$

Con un procedimiento similar, cuando  $u \geq b$ ,

$$\begin{aligned} \psi_2(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left[ \int_0^{\frac{u+c_2 t}{k_2}} \psi(u + c_2 t - zk_2) dF(z) + \int_{\frac{u+c_2 t}{k_2}}^\infty dF(z) \right] dt = \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \gamma_2(u + c_2 t) dt. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable y derivando respecto a  $u$

$$\psi'_2(u) = \frac{\lambda}{c_2} \psi_2(u) - \frac{\lambda}{c_2} \left[ \int_0^{\frac{u-b}{k_2}} \psi_2(u - zk_2) f(z) dz + \int_{\frac{u-b}{k_2}}^{\frac{u}{k_2}} \psi_1(u - zk_2) f(z) dz \right] - \frac{\lambda}{c_2} \left(1 - F\left(\frac{u}{k_2}\right)\right),$$

quedando demostrado el Teorema 1.

### 3. PROBABILIDAD DE RUINA CON CUANTÍA DE LOS SINIESTROS EXPONENCIAL

Consideramos que la cuantía individual de los siniestros,  $z$ , se distribuye según una exponencial unitaria.

Sustituyendo  $f(z) = e^{-z}$  en (3) y derivando respecto a  $u$ , se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{aligned} \psi''_1(u) - \left( \frac{\lambda}{c_1} - \frac{1}{k_1} \right) \psi'_1(u) &= 0, & 0 \leq u < b \\ \psi''_2(u) - \left( \frac{\lambda}{c_2} - \frac{1}{k_2} \right) \psi'_2(u) &= 0, & u \geq b \end{aligned} \quad (7)$$

cuyas ecuaciones características son

$$\begin{aligned} r^2 - \left( \frac{\lambda}{c_1} - \frac{1}{k_1} \right) r &= 0, & 0 \leq u < b \\ s^2 - \left( \frac{\lambda}{c_2} - \frac{1}{k_2} \right) s &= 0, & u \geq b \end{aligned}$$

siendo las raíces  $r_1 = \frac{\lambda}{c_1} - \frac{1}{k_1} < 0$ ,  $r_2 = 0$ ,  $s_1 = \frac{\lambda}{c_2} - \frac{1}{k_2} < 0$  y  $s_2 = 0$ .

Por tanto, la solución es,

$$\psi_k(u) = \begin{cases} \psi_1(u) = C_1 e^{r_1 u} + C_2, & 0 \leq u < b \\ \psi_2(u) = D_1 e^{s_1 u} + D_2, & u \geq b. \end{cases} \quad (8)$$

A partir de la condición  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ , sabemos que  $D_2 = 0$ , y a partir de la condición de continuidad  $\psi_1(b) = \psi_2(b)$  se obtiene  $\sum_{i=1}^2 C_i e^{r_i b} - D_1 e^{s_1 b} = 0$ . Sustituyendo (7) en (3), se obtienen dos condiciones adicionales

$$\sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{k_1 r_i + 1} = 1, \quad \sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{k_2 r_i + 1} \left( 1 - e^{b \left( r_i + \frac{1}{k_2} \right)} \right) + \frac{D_1}{k_2 s_1 + 1} e^{b \left( s_1 + \frac{1}{k_2} \right)} = 1$$

que nos permite obtener los coeficientes  $C_i, D_i, i = 1, 2$

Así,

$$\psi(u) = \begin{cases} \psi_1(u) = 1 - (1 + \rho_1) C_1 + C_1 e^{-\frac{u \rho_1}{(1 + \rho_1) k_1}}, & 0 \leq u < b \\ \psi_2(u) = e^{-\frac{b \rho_2}{(1 + \rho_2) k_2}} \left( 1 - \left( (1 + \rho_1) - e^{-\frac{b \rho_1}{(1 + \rho_1) k_1}} \right) C_1 \right) e^{-\frac{u \rho_2}{(1 + \rho_2) k_2}}, & u \geq b \end{cases} \quad (9)$$

siendo

$$C_1 = \frac{h}{h(1+\rho_1) + (k_1 - k_2)\rho_1(1+\rho_1)e^{-\frac{b}{k_2}} + (k_2\rho_1 - h)e^{-\frac{\rho_1}{k_1(1+\rho_1)}b}},$$

con  $h = (k_1 + \rho_1(k_1 - k_2))\rho_2$ .

Por ejemplo, para  $b = 8$ ,  $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ , las expresiones para la probabilidad de ruina en función de los niveles de retención para cuatro valores distintos para el nivel inicial de las reservas ( $u = 0, 4, 8, 12$ ) son,  $\forall k_1 | 0.4 < k_1 \leq 1$ , y  $\forall k_2 | 0.4 < k_2 \leq 1$ ,

$$\psi(0) = 1 + \left( \frac{0.1}{k_1} - 0.25 \right) C_1$$

$$\psi(4) = 1 + \left( e^{\frac{0.4-k_1}{k_1(1.25k_1-0.1)}} + \frac{0.1}{k_1} - 1.25 \right) C_1$$

$$\psi(8) = 1 + \left( e^{\frac{0.8-2k_1}{k_1(1.25k_1-0.1)}} + \frac{0.1}{k_1} - 1.25 \right) C_1$$

$$\psi(12) = e^{\frac{0.4-k_2}{k_2(1.25k_2-0.1)}} \left( 1 + C_1 \left( e^{\frac{-0.8+2k_1}{k_1(0.1-1.25k_1)}} + \frac{0.1}{k_1} - 1.25 \right) \right)$$

siendo

$$C_1 = \frac{h}{h \left( 1.25 - \frac{0.1}{k_1} \right) + (k_1 - k_2) \left( 0.25 - \frac{0.1}{k_1} \right) \left( 1.25 - \frac{0.1}{k_1} \right) e^{-\frac{8}{k_2}} + \left( k_2 \left( 0.25 - \frac{0.1}{k_1} \right) - h \right) e^{-\frac{(2k_1-0.8)}{k_1(1.25k_1-0.1)}}},$$

$$h = \left( 0.25 - \frac{0.1}{k_2} \right) \left( 1.25k_1 - 0.1 - k_2 \left( 0.25 - \frac{0.1}{k_1} \right) \right).$$

A partir de las expresiones obtenidas para la estrategia de reaseguro umbral, podemos obtener los siguientes casos particulares:

- **Caso 1:** Si  $k_1 = k_2 = k$ , entonces se cumple que

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_N = \rho_R - \frac{\rho_R - \rho}{k},$$

$$h = k\rho_N \text{ y } C_1 = \frac{k}{(1+\rho_R)k-1} = \frac{1}{1+\rho_N}.$$

En este caso, la expresión (9) es

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho_N} e^{-\frac{\rho_N}{k(1+\rho_N)}u}, \quad \forall u \geq 0,$$

resultado que se corresponde con la probabilidad de ruina en un modelo clásico con reaseguro proporcional de nivel de retención  $k$ . (ver, por ejemplo, Castañer et al.(2008)).

Para  $b = 8, \rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ , obtenemos  $\forall k \mid 0.4 < k \leq 1$ ,

$$\psi(0) = \frac{k}{1.25k - 0.1}$$

$$\psi(4) = \frac{k}{1.25k - 0.1} e^{-\frac{0.4-k}{k(1.25k-0.1)}}$$

$$\psi(8) = \frac{k}{1.25k - 0.1} e^{-\frac{0.8-2k}{k(1.25k-0.1)}}$$

$$\psi(12) = \frac{k}{1.25k - 0.1} e^{-\frac{1.2-3k}{k(1.25k-0.1)}}$$

- **Caso 2:** Si  $k_2 = 1$ , a partir de (9) podemos encontrar las expresiones para la probabilidad de ruina en un modelo en el que sólo se reasegura cuando las reservas son inferiores al umbral prefijado. Este modelo particular ha sido estudiado en Claramunt et al. (2009).

Para  $b = 8, \rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ , obtenemos  $\forall k_1 \mid 0.4 < k_1 \leq 1$ ,

$$\psi(0) = 1 + C_1 \left( \frac{0.1}{k_1} - 0.25 \right)$$

$$\psi(4) = 1 + \left( e^{-\frac{0.4-k_1}{k_1(1.25k_1-0.1)}} + \frac{0.1}{k_1} - 1.25 \right) C_1$$

siendo

$$\psi(8) = 1 + \left( e^{\frac{0.8-2k_1}{k_1(1.25k_1-0.1)}} + \frac{0.1}{k_1} - 1.25 \right) C_1$$

$$\psi(12) = 0.593487 \left( 1 + C_1 \left( e^{\frac{0.8-2k_1}{k_1(1.25k_1-0.1)}} + \frac{0.1}{k_1} - 1.25 \right) \right)$$

$$C_1 = \frac{558.93 e^{\frac{0.8}{0.1k_1-1.25k_1^2}} k_1 (0.08 + k_1 (k_1 - 0.28))}{-(k_1 - 1)k_1 (k_1 - 0.61) 558.93 e^{\frac{2}{0.1-1.25k_1}} + 698.97 (k_1 - 0.08) (0.08 + (k_1 - 0.28)) e^{\frac{0.8}{0.1k_1-1.25k_1^2}}},$$

- **Caso 3:** Si  $k_1 = 1$ , a partir de (9) podemos encontrar las expresiones para la probabilidad de ruina en un modelo en el que sólo se reasegura cuando las reservas son superiores al umbral prefijado.

Para  $b = 8$ ,  $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ , obtenemos  $\forall k_2 \mid 0.4 < k_2 \leq 1$ ,

$$\psi(0) = 1 - 0.15C_1 = \frac{-0.1725(k_2 - 1)k_2 + 0.0285e^{\frac{8}{k_2}}(k_2 - 0.3611)(7.2263 + k_2)}{-0.1725(k_2 - 1)k_2 + 0.0229e^{\frac{8}{k_2}}(k_2 - 0.3673)(10.8975 + k_2)}$$

$$\psi(4) = 1 - 0.5565C_1 = \frac{-0.1725(k_2 - 1)k_2 + 0.0437e^{\frac{8}{k_2}}(k_2 - 0.3190)(1.9858 + k_2)}{-0.1725(k_2 - 1)k_2 + 0.0229e^{\frac{8}{k_2}}(k_2 - 0.3673)(10.8975 + k_2)}$$

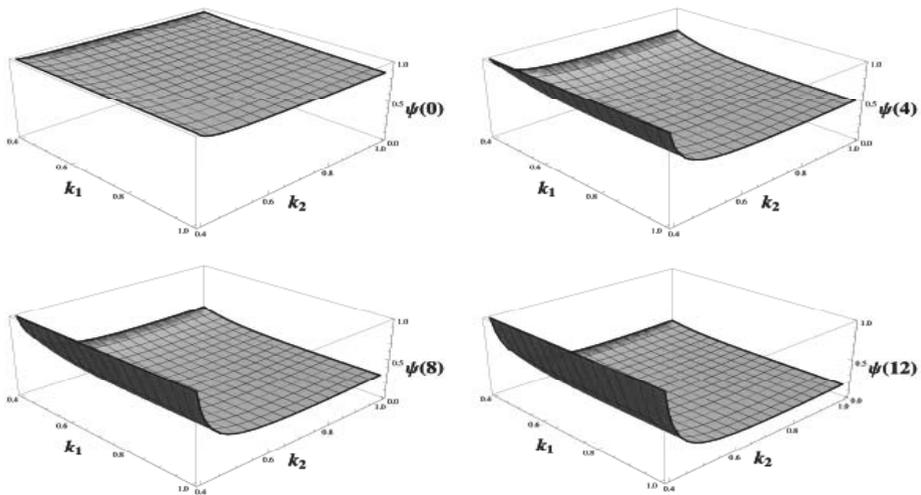
$$\psi(8) = 1 - 0.7977C_1 = \frac{k_2 \left( 0.1725 + \left( 0.0528e^{\frac{8}{k_2}} - 0.1725 \right) k_2 \right)}{-0.1725(k_2 - 1)k_2 + 0.0229e^{\frac{8}{k_2}}(k_2 - 0.3673)(10.8975 + k_2)}$$

$$\psi(12) = (1 - 0.7977C_1) e^{\frac{0.4-k_2}{k_2(1.25k_2-0.1)}} = \frac{e^{\frac{0.4-k_2}{k_2(1.25k_2-0.1)}} k_2 \left( 0.1725 + \left( 0.0528e^{\frac{8}{k_2}} - 0.1725 \right) k_2 \right)}{-0.1725(k_2 - 1)k_2 + 0.0229e^{\frac{8}{k_2}}(k_2 - 0.3673)(10.8975 + k_2)}$$

## 4. ANÁLISIS COMPARATIVO

En este apartado, realizaremos un análisis comparativo de los distintos casos incluidos en la estrategia de reaseguro proporcional de umbral, tomando la probabilidad de ruina como el criterio para elegir y comparar las opciones del asegurador. Consideramos el nivel inicial de las reservas, el nivel del umbral y los recargos del asegurador y el reasegurador como datos. Se ha elegido como en el apartado anterior  $b = 8$ ,  $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ .

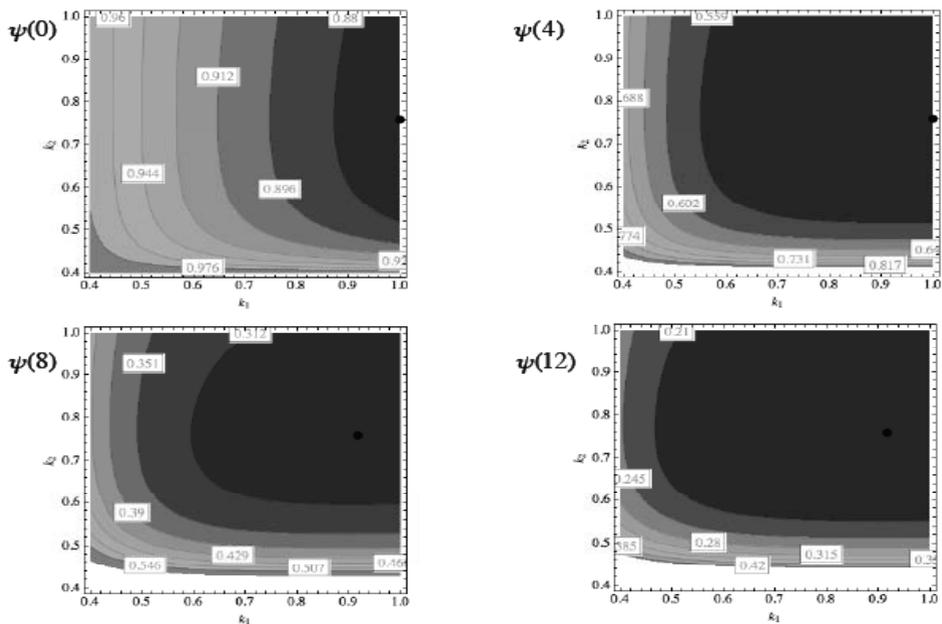
En primer lugar, en la Figura 3, se representa la probabilidad de ruina  $\forall k_1 \mid 0.4 < k_1 \leq 1$ , y  $\forall k_2 \mid 0.4 < k_2 \leq 1$ , para cada uno de los niveles considerados para las reservas iniciales.



**Figura 3**

Probabilidad de ruina con estrategia de reaseguro umbral para distintas  $u$  con  $b = 8$ ,  $\rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ .

Puede observarse más claramente el comportamiento de dicha probabilidad a partir de las curvas de nivel para cada caso. Estas curvas, junto con la combinación de  $k_1$  y  $k_2$  que minimiza la probabilidad de ruina se representan en la Figura 4.



**Figura 4**  
Curvas de indiferencia para distintas  $u$  con  
 $b = 8, \rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ .

En la Tabla 1 se resumen las combinaciones óptimas y la probabilidad de ruina mínima que puede alcanzarse con la estrategia de reaseguro de umbral, para los distintos valores de las reservas iniciales.

Reservas iniciales $u$	$\psi(u)$ mínima	$k_1$	$k_2$
0	0.866676	1	0.760277
4	0.505356	1	0.760277
8	0.290532	0.91742	0.759073
12	0.166407	0.91738	0.758534

**Tabla 1**  
Probabilidad de ruina mínima con estrategia de reaseguro proporcional de umbral  
con  $b = 8, \rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ .

En la Tabla 2 se incorporan, junto con los datos de la tabla 1, los correspondientes óptimos si se consideran los casos particulares (1,2 y 3) de la estrategia de reaseguro proporcional de umbral.

	$\forall k_1   0.4 < k_1 \leq 1$ y $\forall k_2   0.4 < k_2 \leq 1$			<b>Caso 1</b> $k_1 = k_2 = k,$ $\forall k   0.4 < k \leq 1$		<b>Caso 2</b> $k_2 = 1,$ $\forall k_1   0.4 < k_1 \leq 1$		<b>Caso 3</b> $k_1 = 1,$ $\forall k_2   0.4 < k_2 \leq 1$	
$u$	$\Psi(u)$ mínima	$k_1$	$k_2$	$\Psi(u)$ mínima	$k$	$\Psi(u)$ mínima	$k_1$	$\Psi(u)$ mínima	$k_2$
0	<b>0.8666</b>	1	0.76027	0.86956	1	0.8695	1	0.8666	0.76027
4	<b>0.5053</b>	1	0.76027	0.50944	0.83754	0.5160	0.99977	0.5053	0.76027
8	<b>0.2905</b>	0.91742	0.75907	0.29260	0.79555	0.3061	0.94074	0.2909	0.76027
12	<b>0.1664</b>	0.91738	0.75853	0.16775	0.78252	0.1816	0.94074	0.1666	0.75923

**Tabla 2**

Probabilidad de ruina mínima con estrategia de reaseguro umbral  
y los casos particulares con  $b = 8, \rho = 0.15$  y  $\rho_R = 0.25$ .

## AGRADECIMIENTOS

Trabajo financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia y FEDER 2006. Proyectos MTM2006-13468 y MTM2006-09920.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bühlmann, H. *Mathematical Methods in Risk Theory*. New York: Springer Verlag, 1970.

Castañer, A.; Claramunt, M.M.; Mármol, M. *Influencia del Reaseguro Proporcional en las Medidas de Solvencia del Asegurador*, en el libro Sarabia, J.M.; Guillén, M. (Editores). *Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos: RIESGO 2007*. Santander: Ediciones TGD, 2007, 87-101.

Claramunt, M.M.; Mármol, M.; Castañer, A. *El reaseguro proporcional de umbral y la probabilidad de supervivencia como criterio de elección de estrategias*. *Estadística Española*, 2009 (aceptado y pendiente de publicación).

Centeno, L. *Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient*. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1996, 5, 169-182.

Dickson D.C.M.; Waters H.R. *Reinsurance and ruin*. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1996, 19, 61-80 .

Gerber, H. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Illinois: Richard D. Irwin, 1979.

Panjer, H; Willmot, G. *Insurance Risk Models*. Schaumburg: Society of Actuaries, 1992.

## Ponencia 18

### DESCRIPCIÓN DINÁMICA DE LA SOLVENCIA DE LA CUENTA DE EXPERIENCIA EN UN REASEGURO FINITE RISK

M. A. Pons Cardell y F. J. Sarrasí Vizcarra

#### RESUMEN

El reaseguro *finite risk* es una modalidad de reaseguro financiero en la que el reasegurador asume, para un periodo plurianual, no sólo el riesgo de suscripción de forma limitada, sino también el riesgo de interés y el riesgo que se produzca una aceleración en el pago de las indemnizaciones, y por tanto, en el plazo en el que dichas primas puedan estar invertidas (*timing risk*).

Una de las características del reaseguro *finite risk* es que el reasegurador constituye un fondo, llamado cuenta de experiencia, que está formado por las primas que cobra el reasegurador, junto con su rendimiento financiero, y su finalidad es financiar los siniestros que éste ha de satisfacer a la cedente en el plazo establecido.

El problema que puede tener el reasegurador es que el saldo de la cuenta de experiencia, en un momento dado, no sea suficiente para poder hacer frente a sus obligaciones debido, especialmente, a una siniestralidad mayor de la esperada.

El objetivo de este trabajo es diseñar un modelo que permita determinar el saldo estimado o reservas que debe de tener en cada periodo anual la cuenta de experiencia para garantizar su solvencia dinámica, teniendo en cuenta la experiencia de siniestralidad de cada cedente y utilizando para ello modelos de credibilidad. De esta forma, si el saldo estimado o reservas son inferiores al saldo real se deberá de

efectuar la correspondiente aportación a la cuenta de experiencia, por la diferencia. El saldo estimado se determinará por simulación de las variables aleatorias que intervienen en el proceso de riesgo, utilizando el método de Monte-Carlo. En el modelo contemplamos la posibilidad de revisar anualmente los parámetros de cálculo del saldo estimado de la cuenta de experiencia, teniendo en cuenta hasta el momento de la revisión, la historia de siniestralidad real de cada cedente que compone la cartera del reasegurador.

**Palabras clave:** Reaseguro, finite risk, saldo, credibilidad, cuenta de experiencia, solvencia, riesgo.

## 1. INTRODUCCIÓN

El reaseguro *finite risk* está adquiriendo una importancia cada vez mayor en la política de gestión de riesgos de las compañías de seguros. Si bien tiene sus orígenes en los años sesenta en Londres, no fue hasta principios de los años 80 cuando empezó a cobrar cierta importancia en Estados Unidos.

Se trata de una forma de reaseguro que se sirve de los mismos instrumentos que el reaseguro tradicional, pero presenta unos rasgos característicos:

- Los contratos son plurianuales, lo que permite constituir una relación contractual estable con la compañía de seguros a medio y largo plazo.
- Se establece un fondo, denominado cuenta de experiencia. Esta cuenta está constituida por las primas de reaseguro y por su producto financiero, y de la misma son liquidados los siniestros a cargo del reasegurador y los posibles gastos que pueda haber a favor del mismo.
- En el cálculo de la prima de reaseguro se tiene en cuenta el tipo de interés o rendimiento financiero que proporciona la cuenta de experiencia.

- El reaseguro *finite risk* no sólo cubre de forma limitada el riesgo de suscripción, es decir, el riesgo de que los siniestros reales sean mayores de lo esperado, sino que también asume otro tipo de riesgos, como el riesgo de tiempos o *timing risk* y el riesgo de interés. El *timing risk* es el riesgo derivado de que el flujo de pagos por siniestros se produzca antes de lo esperado, lo que puede suponer una desinversión prematura de las primas para poder hacer frente a esos pagos. El riesgo de interés deriva de que el rendimiento financiero obtenido en la cuenta de experiencia sea menor al previsto inicialmente.
- El reasegurador puede pactar con la compañía de seguros, en función del riesgo asumido, la devolución total o parcial del saldo de la cuenta de experiencia al final del contrato, si éste es positivo. De la misma manera, también puede acordarse en el contrato aportaciones extraordinarias a la cuenta de experiencia por parte de la compañía de seguros en el caso de insuficiencia financiera de la misma. Esta circunstancia permite que, en ocasiones, la compensación de riesgos pueda operar de forma individual a través del tiempo.
- La compañía de seguros, también llamada cedente, puede contratar un reaseguro *finite risk* en cualquiera de las modalidades de reaseguro tradicionales. Nosotros supondremos las modalidades cuota parte y exceso de pérdida.

El objetivo de este trabajo se centra en el análisis de la solvencia dinámica de la cuenta de experiencia, de cada una de las cedentes que integran la cartera del reasegurador, estudiando para ello cual debe ser el saldo o reserva estimada de dicha cuenta en cada uno de los años que dura el contrato de reaseguro, que garantice la solvencia de la operación. Si el saldo real, en un determinado año, es menor al saldo estimado de la cuenta se deberá realizar una aportación a la misma.

Para el cálculo de la aportación asumiremos las siguientes hipótesis:

1. La cartera del reasegurador está formado por un conjunto de cedentes que operan en un mismo ramo.

2. Conocemos las distribuciones de probabilidad del ramo objeto de estudio.
3. Hay independencia entre las cedentes y dentro de cada cedente.
4. La estructura temporal de tipos de interés en el plazo de la operación es conocida.
5. Conocemos la historia de siniestralidad de cada cedente.

Bajo estas hipótesis se pueden plantear varios escenarios:

- El reasegurador asume todos los riesgos de la operación. En este caso le corresponde al reasegurador garantizar la solvencia de la cuenta de experiencia y las posibles aportaciones que deban realizarse en la cuenta serán a su cargo, por tanto, si al final del plazo en la cuenta de experiencia hay beneficio o pérdida lo asumirá el reasegurador. Bajo esta hipótesis hay compensación de riesgos entre las cedentes que integran la cartera del reasegurador. Sin embargo, a la hora de determinar los parámetros de las distribuciones de probabilidad de cada cedente, no solo tendremos en cuenta las características comunes, mismo ramo y pertenencia a la misma cartera del reasegurador, sino también la historia de siniestralidad de cada una de ellas, por tanto, utilizaremos modelos de credibilidad para su estimación.
- El reasegurador no asume riesgos. Bajo esta hipótesis le corresponde a cada cedente financiar las posibles aportaciones que deban realizarse en la cuenta de experiencia, en consecuencia, el beneficio o pérdida que pueda haber en la cuenta al final del plazo lo asumirá también la cedente. A diferencia del caso anterior, no hay compensación de riesgos entre las cedentes sino que cada una de ellas financia totalmente su riesgo.
- Por último, se podría plantear una estrategia mixta en la que se compartiera con la cedente la financiación de las aportaciones a la cuenta de experiencia.

Nosotros asumiremos el primer escenario, es decir, el reasegurador asume todos los riesgos de la operación. Plantearemos dos modelos:

- **Modelo sin revisión:** Calcularemos, en el origen de la operación, el saldo estimado de la cuenta de experiencia al final de cada año del contrato. Los parámetros de las funciones de distribución, y resto de variables del modelo, son los conocidos en el origen del contrato y se mantienen constantes a lo largo del plazo, por tanto, no se contempla la revisión de los mismos.
- **Modelo con revisión:** En este caso los parámetros de las funciones de distribución se van a revisar anualmente, ajustándolos a la información de siniestralidad conocida de cada cedente hasta ese momento.

En ambos modelos, para poder determinar el saldo estimado de la cuenta de experiencia, estimaremos la siniestralidad futura a cargo del reasegurador por el método de simulación de Monte-Carlo.

## 2. CÁLCULO DE LA PRIMA DE REASEGURO

El hecho que el reaseguro *finite risk* tenga en cuenta no sólo el riesgo de suscripción de la cedente, sino también el riesgo de interés y el *timing risk*, supone considerar en el cálculo de la prima de reaseguro, una nueva variable que no se tenía en cuenta en el reaseguro tradicional, el tipo de interés. Esta circunstancia hace que debamos de tener en cuenta, en el cálculo de la prima de reaseguro, el momento de pago de los siniestros. Por tanto el proceso de riesgo viene definido por las siguientes variables aleatorias:

$$(X_1, X_2, \dots, X_{N_t}, T_1, T_2, \dots, T_{N_t}, N_t)$$

siendo:

- $N_t$ : Variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo  $[0, t]$ , con  $t$  expresado en años.

- $X_i$  : Variable aleatoria coste del  $i$ -ésimo siniestro ocurrido en el intervalo  $[0, t]$ , con  $i = 1, 2, \dots, N_t$ . Asumiremos que son independientes y están equidistribuidas.
- $T_i$  : Variable aleatoria momento de pago, expresado en años, del  $i$ -ésimo siniestro, con  $i = 1, 2, \dots, N_t$ .

A partir de la variable aleatoria  $X_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, N_t$ , vamos a definir, en función de la modalidad de reaseguro contratada, la variable aleatoria coste a cargo del reasegurador del siniestro  $i$ -ésimo,  $X_{i,R}$ , con  $i = 1, 2, \dots, N_t$ , donde:

- En el reaseguro Cuota Parte:

$$X_{i,R} = \begin{cases} k_R \cdot X_i & k_R \cdot X_i < M_R \\ M_R & k_R \cdot X_i \geq M_R \end{cases}$$

donde  $k_R$  es el coeficiente de cesión al reasegurador, expresado en tanto por uno, y  $M_R$  es el límite del contrato de reaseguro, que proporciona la capacidad máxima por siniestro que está dispuesto a asumir el reasegurador.

- En el reaseguro Exceso de Pérdida:

$$X_{i,R} = \begin{cases} 0 & X_i < M \\ X_i - M & M \geq X_i \geq M + M_R \\ M_R & X_i \geq M + M_R \end{cases}$$

donde  $M$  es el pleno de retención de la cedente y  $M_R$  es la capacidad máxima del contrato del reasegurador, y al igual que en el caso anterior, proporciona la responsabilidad máxima del reasegurador por siniestro.

La variable aleatoria valor actual del coste total de los siniestros a cargo del reasegurador,  $C_R$ , asociado al intervalo  $[0, t]$ , vamos a definirla como el valor actual de las cuantías de cada uno de los  $N_t$  siniestros

a cargo del reasegurador,  $X_{i,R}$ , con  $i = 1, 2, \dots, N_t$ , que se producen en dicho intervalo:

$$C_R = \sum_{i=1}^{N_t} X_{i,R} \cdot f_R(T_i, 0) \quad \forall T_i \in [0, t]$$

siendo  $f_R(T_i, 0)$  el factor financiero de actualización utilizado por el reasegurador, que considera como tipo de interés el rendimiento financiero que obtiene en la cuenta de experiencia.

Asumiremos que dicho rendimiento financiero, para todo el plazo de la operación, es conocido en el origen, por tanto trabajaremos con un factor financiero cierto. Si  $l_m$  es el tanto efectivo de interés compuesto, con frecuencia de capitalización  $m$ , que proporciona la cuenta de experiencia, el factor financiero será:

$$f_R(T, T') = (1 + l_m)^{m(T'-T)}$$

A partir de la variable aleatoria  $C_R$  determinaremos la prima de reaseguro, considerando como criterio de cálculo su<sup>o</sup> esperanza matemática:

- Si asumimos que la periodicidad de pago de la prima es anual y que su temporalidad coincide con el plazo de la cuenta de experiencia,  $t$  años, la prima periódica,  $P_{s,R}$ , que cobra el reasegurador en  $s$ , con  $s = 0, 1, \dots, t-1$ , vendrá determinada por:

$$\sum_{s=0}^{t-1} P_{s,R} \cdot f_R(s, 0) = E(C_R)$$

- Y en el caso de prima única, la prima pura  $\Pi_R$ , que cobra el reasegurador, se obtendrá como:

$$\Pi_R = E(C_R)$$

### 3. ANÁLISIS DEL SALDO ESTIMADO EN LA CUENTA DE EXPERIENCIA

En este apartado nos planteamos la obtención del saldo estimado o reserva de la cuenta de experiencia al final de cada periodo anual, con la condición de que quede garantizada la solvencia dinámica de la operación. Plantearemos dos modelos, el modelo sin revisión y el modelo con revisión.

#### 3.1. Modelo sin revisión

En este primer modelo asumiremos que los parámetros de siniestralidad se mantienen constantes a lo largo del plazo de vigencia de la operación y, por tanto, no se contempla la revisión de los mismos. El objetivo del reasegurador es garantizar que el saldo real de la cuenta de experiencia se ajuste al saldo estimado, realizando las aportaciones necesarias para cubrir esta diferencia. Calcularemos, en el origen de la operación, el saldo estimado de la cuenta de experiencia al final de cada año, con los parámetros de siniestralidad conocidos en el origen. Las posibles aportaciones a realizar por el reasegurador vendrán dadas por la diferencia positiva entre el saldo estimado y el saldo real.

Vamos a simbolizar por  $S_j^e$ , con  $j = 1, 2, \dots, t$ , la variable aleatoria saldo estimado de la cuenta de experiencia en  $j$ , que se puede calcular por el método retrospectivo o prospectivo:

– Método retrospectivo: El saldo estimado se obtiene, valorando en  $j$ , la diferencia entre las primas de reaseguro satisfechas y los siniestros estimados a cargo del reasegurador ocurridos hasta  $j$ , incluido.

- En el caso de primas periódicas:

$$S_j^e = \sum_{s=0}^j P_{s,R} \cdot f_R(s, j) - \sum_{i=1}^{N_{[0,j]}} X_{i,R,[0,j]} \cdot f_R(T_i, j) \quad \text{con } j = 1, \dots, t$$

- y en el caso de prima única:

$$S_j^e = \Pi_R \cdot f_R(0, j) - \sum_{i=1}^{N_{[0,j]}} X_{i,R,[0,j]} \cdot f_R(T_i, j) \quad \text{con } j = 1, \dots, t$$

siendo la  $N_{[0,j]}$  la variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo  $[0, j]$ , con  $j \leq t$ , y  $X_{i,R,[0,j]}$  la variable aleatoria coste del siniestro  $i$ -ésimo a cargo del reasegurador, ocurrido en el intervalo  $[0, j]$ , con  $i = 1, \dots, N_{[0,j]}$ .

– Método prospectivo: El saldo estimado se obtiene, valorando en  $j$ , la diferencia entre los siniestros a cargo del reasegurador y las primas de reaseguro satisfechas a partir de  $j$ .

- En el caso de primas periódicas:

$$S_j^e = \sum_{i=1}^{N_{(j,t)}} X_{i,R,(j,t]} \cdot f_R(T_i, j) - \sum_{s=j+1}^{t-1} P_{s,R} \cdot f_R(s, j) \quad \text{con } j = 1, \dots, t$$

- y en el caso de prima única:

$$S_j^e = \sum_{i=1}^{N_{(j,t)}} X_{i,R,(j,t]} \cdot f_R(T_i, j) \quad \text{con } j = 1, \dots, t$$

siendo  $N_{(j,t]}$  la variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo  $(j, t]$  y  $X_{i,R,(j,t]}$  la variable aleatoria coste del siniestro  $i$ -ésimo a cargo del reasegurador, ocurrido en el intervalo  $(j, t]$ , para  $i = 1, \dots, N_{(j,t]}$ .

Siendo  $N_{[0,j]} + N_{(j,t]} = N_t$ .

En el caso particular  $j = t$ , entonces  $S_t^e = 0$ .

La variable aleatoria saldo estimado,  $S_j^e$ , proporciona información al reasegurador sobre el saldo que debe tener la cuenta de experiencia en cada momento  $j$ , para que quede garantizada la solvencia dinámica de la operación.

Una vez calculada la variable aleatoria saldo estimado vamos a definir la variable aleatoria aportación,  $A_j$ , con  $j = 1, \dots, t-1$ , como la diferencia positiva entre el saldo estimado  $S_j^e$  y el saldo real  $S_j^r$  de la cuenta de experiencia en  $j$ . Para obtenerla, previamente hay que definir la variable saldo real en  $j$ ,  $S_j^r$ .

El saldo real en  $j$ ,  $S_j^r$ , vendrá dado por la diferencia entre los ingresos y los reintegros reales que haya experimentado la cuenta de experiencia hasta  $j$ , y valorados en  $j$ , sin considerar la posible aportación que el reasegurador pueda efectuar en  $j$ . Los ingresos serán las primas de reaseguro cobradas hasta  $j$ , inclusive, y las aportaciones realizadas por el reasegurador hasta  $j-1$ , mientras que los reintegros vendrán dados por los siniestros reales ocurridos hasta  $j$  a cargo del reasegurador.

- En el caso de primas periódicas:

$$S_j^r = \sum_{s=0}^j P_{s,R} \cdot f_R(s, j) + \sum_{s=1}^{j-1} A_s^* \cdot f_R(s, j) - \sum_{i=1}^{N_{[0,j]}^r} X_{i,R,[0,j]}^r \cdot f_R(T_i^r, j) \quad \text{con } j=1, \dots, t$$

y en el caso particular  $j=1$ :

$$S_1^r = \sum_{s=0}^1 P_{s,R} \cdot f_R(s, 1) - \sum_{i=1}^{N_{[0,1]}^r} X_{i,R,[0,1]}^r \cdot f_R(T_i^r, 1)$$

- Si la prima es única:

$$S_j^r = \Pi_R \cdot f_R(0, j) + \sum_{s=1}^{j-1} A_s^* \cdot f_R(s, j) - \sum_{i=1}^{N_{[0,j]}^r} X_{i,R,[0,j]}^r \cdot f_R(T_i^r, j) \quad \text{con } j=1, \dots, t$$

y cuando  $j=1$ :

$$S_1^r = \Pi_R \cdot f_R(0, 1) - \sum_{i=1}^{N_{[0,1]}^r} X_{i,R,[0,1]}^r \cdot f_R(T_i^r, 1)$$

siendo  $N_{[0,j]}^r$  el número de siniestros reales ocurridos en el intervalo  $[0, j]$ , con  $j \leq t$ ,  $X_{i,R,[0,j]}^r$  el coste real del siniestro  $i$ -ésimo a cargo el reasegurador ocurrido en el intervalo  $[0, j]$ , con  $i=1, \dots, N_{[0,j]}^r$ ,  $A_s^*$  la aportación que ha efectuado el reasegurador en la cuenta de experiencia en  $s$ , con  $s=1, \dots, j-1$  y  $T_i^r$  el momento real de pago, en años, del siniestro  $i$ -ésimo.

La variable aleatoria aportación vendrá dada por:

$$A_j = \begin{cases} 0 & S_j^e \leq S_j^r \\ S_j^e - S_j^r & S_j^e > S_j^r \end{cases} \quad \text{con } j=1, \dots, t-1$$

Una vez conocida la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $A_j$ , determinaremos la aportación,  $A_j^*$ , que debe efectuar el reasegurador en  $j$ . Si consideramos como criterio de cálculo su esperanza matemática, entonces:

$$A_j^* = E(A_j) \quad \text{con } j=1, \dots, t-1$$

### 3.2. Modelo con revisión

En el modelo con revisión, el saldo estimado no se calcula en el origen de la operación sino al final de cada año del contrato, ya que en este caso los parámetros de las funciones de distribución se van a revisar anualmente ajustándolos a la información de siniestralidad de cada cedente conocida hasta ese momento.

El objetivo de este modelo sigue siendo calcular el saldo estimado de la cuenta de experiencia así como las posibles aportaciones  $A_j^*$ , con  $j=1, \dots, t-1$ , que debe realizar el reasegurador, para garantizar dicho saldo.

Calcularemos, al final del año  $j$ , con  $j=1, \dots, t-1$ , el saldo estimado de la cuenta de experiencia en  $j$ , con los parámetros de siniestralidad establecidos en  $j$ ; por tanto las variables aleatorias, coste y número de siniestros, harán referencia a los siniestros ocurridos a partir de  $j$ , es decir, en el intervalo  $(j, t]$ , pero obtenidas con los parámetros de siniestralidad establecidos en  $j$ , a partir de la información pasada disponible hasta  $j$ . Las variables aleatorias coste y número de siniestros los simbolizaremos:

- $N_{(j,t)}^j$  : Variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo  $(j, t]$ , con los parámetros de siniestralidad establecidos en  $j$ .

- $X_{i,(j,t)}^j$  : Variable aleatoria coste del siniestro  $i$ -ésimo, con  $i = 1, \dots, N_{(j,t)}^j$ , ocurrido en el intervalo  $(j, t]$ , con los parámetros de siniestralidad establecidos en  $j$ .

La variable aleatoria coste a cargo del reasegurador,  $X_{i,R,(j,t)}^j$ , con  $i = 1, \dots, N_{(j,t)}^j$ , del siniestro  $i$ -ésimo ocurrido en el intervalo  $(j, t]$ , dependerá también de la modalidad de reaseguro que consideremos:

- En el reaseguro Cuota Parte:

$$X_{i,R,(j,t)}^j = \begin{cases} k_R \cdot X_{i,(j,t)}^j & k_R \cdot X_{i,(j,t)}^j < M_R \\ M_R & k_R \cdot X_{i,(j,t)}^j \geq M_R \end{cases}$$

- En el reaseguro Excess-Loss:

$$X_{i,R,(j,t)}^j = \begin{cases} 0 & X_{i,(j,t)}^j < M \\ X_{i,(j,t)}^j - M & M \geq X_{i,(j,t)}^j \geq M + M_R \\ M_R & X_{i,(j,t)}^j \geq M + M_R \end{cases}$$

La variable aleatoria aportación,  $A_j$ , con  $j = 1, \dots, t-1$ , que deberá de realizar el reasegurador en  $j$  para mantener la solvencia de la cuenta de experiencia, vendrá dada por la diferencia positiva en  $j$  de la variable aleatoria saldo estimado de la cuenta de experiencia,  $S_{j,R,(j,t)}^{e,j}$  y el saldo real de la cuenta de experiencia,  $S_j^r$ .

La variable aleatoria saldo estimado en  $j$ ,  $S_{j,R,(j,t)}^{e,j}$ , la definimos como el valor en  $j$  de la diferencia entre los siniestros a cargo del reasegurador y primas de reaseguro pendientes de pago a partir de  $j$ , con los parámetros de siniestralidad establecidos en  $j$ :

- En el caso de primas periódicas:

$$S_{j,R,(j,t)}^{e,j} = \sum_{i=1}^{N_{(j,t)}^j} X_{i,R,(j,t)}^j \cdot f_R(T_{i,(j,t)}, j) - \sum_{i=j+1}^{t-1} P_{i,R} \cdot f_R(i, j) \quad \text{con } j = 1, \dots, t$$

siendo  $T_{i,(j,t)}$ , con  $i = 1, \dots, N_{(j,t)}^j$ , la variable aleatoria momento de pago en años, del siniestro  $i$ -ésimo ocurrido en el intervalo  $(j, t]$ .

- En el caso de prima única:

$$S_{j,R,(j,t)}^{e,j} = \sum_{i=1}^{N_{(j,t)}^j} X_{i,R,(j,t)}^j \cdot f_R(T_{i,(j,t)}, j) \quad \text{con } j = 1, \dots, t$$

La variable aleatoria aportación,  $A_j$ , será:

$$A_j = \begin{cases} 0 & S_{j,R,(j,t)}^{e,j} \leq S_j^r \\ S_{j,R,(j,t)}^{e,j} - S_j^r & S_{j,R,(j,t)}^{e,j} > S_j^r \end{cases} \quad \text{con } j = 1, \dots, t-1$$

Una vez conocida la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $A_j$ , al igual que en el modelo anterior, determinaremos la aportación,  $A_j^*$ , que debe efectuar el reasegurador en  $j$ . Si consideramos como criterio de cálculo su esperanza matemática, entonces:

$$A_j^* = E(A_j) \quad \text{con } j = 1, \dots, t-1$$

#### 4. HIPÓTESIS RESPECTO A LAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Para poder determinar la variable aleatoria saldo estimado, deberemos asumir hipótesis respecto a las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias que intervienen en el proceso de riesgo :

$$(X_1, X_2, \dots, X_{N_t}, T_1, T_2, \dots, T_{N_t}, N_t)$$

La variable aleatoria  $X_i$ , coste del  $i$ -ésimo siniestro ocurrido en el intervalo  $[0, t]$ , con  $i = 1, 2, \dots, N_t$ , asumiremos que se distribuye según una función de distribución exponencial de parámetro  $\mu_0$ ,  $X_i \sim \text{Exp}(\mu_0)$ , siendo  $1/\mu_0$  el coste medio de los siniestros en el intervalo  $[0, t]$ .

Del mismo modo, vamos a asumir que la variable aleatoria  $X_{i,(j,t)}^j$ , coste del siniestro  $i$ -ésimo, con  $i = 1, \dots, N_{(j,t)}^j$ , ocurrido en el intervalo

$(j, t]$ , con los parámetros de siniestralidad establecidos en  $j$ , se distribuye según una función de distribución exponencial de parámetro  $\mu_j$ ,  $X_{i,(j,t]}^j \sim \text{Exp}(\mu_j)$ , siendo  $1/\mu_j$  el coste medio de los siniestros en el intervalo  $(j, t]$ .

También asumiremos que la variable aleatoria tiempo de interocurrencia, en años, entre dos siniestros en el intervalo  $[0, t]$ ,  $T_s - T_{s-1}$ , sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda_0 > 0$ , para  $s = 1, 2, \dots, N_t$ . Este parámetro queda determinado en el origen de la operación. Bajo esta hipótesis queda definida la distribución de probabilidad del número de siniestros  $N_t$ , ya que:

$$\text{Si } T_s - T_{s-1} \sim \text{Exp}(\lambda_0) \text{ para } s = 1, 2, \dots, N_t \text{ y } \lambda_0 > 0 \text{ entonces}$$

$$N_t \sim P(\lambda_0 \cdot t)$$

A partir de  $T_s - T_{s-1}$  podemos determinar la variable aleatoria  $T_i$  con  $i = 1, 2, \dots, N_t$  por suma:

$$T_i = \sum_{s=1}^i T_s - T_{s-1} \text{ con } T_0 = 0$$

Como la variable aleatoria número de siniestros,  $N_t$ , sigue una distribución de Poisson, su esperanza coincide con el valor del parámetro de la distribución, esto es,  $E(N_t) = \lambda_0 \cdot t$ , pudiéndose interpretar  $\lambda_0$  como el número medio anual de siniestros. El parámetro  $\lambda_0$  también nos servirá para calcular el tiempo medio entre dos siniestros, dado que  $E(T_s - T_{s-1}) = \frac{1}{\lambda_0}$ .

Del mismo modo, si el tiempo de interocurrencia, en años, entre dos siniestros en el intervalo  $(j, t]$ ,  $T_s - T_{s-1}$ , con  $s = 1, \dots, N_{(j,t]}^j$ , sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda_j > 0$ , entonces queda definida la distribución de probabilidad del número de siniestros  $N_{(j,t]}^j$ , ya que:

$$\text{Si } T_s - T_{s-1} \sim \text{Exp}(\lambda_j) \text{ para } s = 1, \dots, N_{(j,t]}^j \text{ y } \lambda_j > 0 \text{ entonces}$$

$$N_{(j,t]}^j \sim P(\lambda_j \cdot (t - j))$$

A partir de  $T_s - T_{s-1}$  podemos determinar la variable aleatoria  $T_{i,(j,t]}^j$ , con  $i = 1, \dots, N_{(j,t]}^j$  como:

$$T_{i,(j,t]} = j + \sum_{s=1}^i T_s - T_{s-1} \quad \text{con } T_0 = j$$

En este caso el parámetro  $\lambda_j$  queda determinado en el momento  $j$  y para todo el intervalo  $(j, t]$ .

Como la variable aleatoria número de siniestros,  $N_{(j,t]}^j$ , sigue una distribución de Poisson su esperanza coincide con el valor del parámetro de la distribución, esto es,  $E(N_{(j,t]}^j) = \lambda_j \cdot (t - j)$ , pudiéndose interpretar  $\lambda_j$ , al igual que en el caso anterior, como el número medio anual de siniestros, pero en este caso asociado al intervalo  $(j, t]$ . El parámetro  $\lambda_j$  también nos servirá para calcular el tiempo medio entre dos siniestros, dado que  $E(T_s - T_{s-1}) = \frac{1}{\lambda_j}$ .

## 5. DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL COSTE MEDIO Y DEL NÚMERO MEDIO DE SINIESTROS A PARTIR DE LA TEORÍA DE LA CREDIBILIDAD

El coste medio o esperanza matemática de la variable aleatoria  $X_{i,(j,t]}^j$ , con  $i = 1, \dots, N_{(j,t]}^j$ , vamos a definirla como  $E(X_{i,(j,t]}^j) = \frac{1}{\mu_j} = \alpha_j \cdot (1 + \sigma_j)$ , siendo  $\alpha_j$  la componente histórica calculada en el momento  $j$  y  $\sigma_j$  la componente subjetiva introducida por el reasegurador en el momento  $j$ , expresada como recargo en tanto por uno. La componente histórica,  $\alpha_j$ , vendrá determinada por la experiencia de siniestralidad de la cedente y/o de la cartera, y la componente subjetiva dependerá de las expectativas futuras que tenga el reasegurador respecto a la posible evolución del coste medio de los siniestros en el intervalo considerado.

En el caso particular que  $j = 0$ ,  $X_{i,(0,t]}^0 = X_i$  y  $N_{(0,t]}^0 = N_t$ , y en este caso  $E(X_i) = \frac{1}{\mu_0} = \alpha_0 \cdot (1 + \sigma_0)$ , siendo  $\alpha_0$  la componente histórica y  $\sigma_0$  la componente subjetiva introducida por el reasegurador en el momento 0.

Como ya hemos dicho, la variable aleatoria número de siniestros,  $N_{(j,t]}^j$ , sigue una distribución de Poisson y su esperanza es  $E(N_{(j,t]}^j) = \lambda_j \cdot (t - j)$ , donde  $\lambda_j$  se interpreta como el número medio anual de siniestros en el intervalo  $(j, t]$ , parámetro que deberemos estimar. En el caso particular que  $j = 0$ ,  $N_{(0,t]}^0 = N_t$  y  $E(N_t) = \lambda_0 \cdot t$ , siendo  $\lambda_0$  el parámetro a estimar en este caso.

Para estimar la componente histórica del coste medio y el número medio anual de siniestros de cada cedente nos podemos encontrar frente a dos posibles escenarios:

- No disponemos de experiencia de siniestralidad pasada de la cedente. En este caso, el coste medio y el número medio de siniestros para esta cedente vendrán dados por el coste y número medio del ramo.
- Disponemos de experiencia de siniestralidad pasada de la cedente. En este otro caso aplicaremos la Teoría de la Credibilidad para discriminar el coste medio y el número medio de siniestros de cada cedente, en función de su propia historia de siniestralidad, pero teniendo en cuenta también la experiencia de siniestralidad de la cartera.

### **5.1. Obtención del estimador del parámetro coste medio de los siniestros**

Para determinar estimador de la componente histórica del coste medio, o de la esperanza matemática de las variables aleatorias  $X_i$  o  $X_{i,(j,t]}^j$ ,  $\alpha_j$  con  $j = 0, 1, \dots, t - 1$ , vamos a asumir la existencia de independencia entre las cedentes, así como que los parámetros de riesgo, que describen las características de riesgo de cada cedente, están idénticamente distribuidos.

Dicho estimador lo obtendremos aplicando el modelo de credibilidad de Bühlmann-Straub, ya que suponemos que el reasegurador dispone de información respecto al coste medio de los siniestros ocurridos

desde hace H años, a contar desde j , y del número de siniestros ocurridos cada año, para cada una de las cedentes.

Las variables más relevantes que intervienen en la obtención del estimador de credibilidad son:

- $\theta_k$  : Parámetro de riesgo. Es una variable aleatoria desconocida, que describe las características de riesgo de cada cedente, con  $k = 1, 2, \dots, K$  , siendo K el número de cedentes.
- $X_{kh}$  : Variable aleatoria observable que nos indica el coste medio anual por siniestro, con  $k = 1, 2, \dots, K$  y  $h = 1, 2, \dots, H$  , siendo H el número de años observados para cada cedente.
- $w_{kh}$  : Pesos o ponderaciones naturales, que son números positivos conocidos, con  $k = 1, 2, \dots, K$  y  $h = 1, 2, \dots, H$  , y los interpretaremos como el número de siniestros ocurridos cada año para cada cedente.

En el Modelo de Bühlmann-Straub se asume independencia entre y dentro de las cedentes, así como que las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo,  $E(X_{kh} / \theta_k) = \alpha_j(\theta_k)$ , y la varianzas depende del periodo considerado, a través de los pesos o ponderaciones naturales.

$\alpha_j(\theta_k)$  es la prima de riesgo individual para una cedente concreta, esto es, la cuantía esperada del coste medio de los siniestros para cada cedente  $k = 1, 2, \dots, K$  , y su estimador ajustado de credibilidad lineal según el Modelo de Bühlmann-Straub viene dado por:

$$\hat{\alpha}_j(\theta_k) = (1 - Z_k) \cdot m + Z_k \cdot X_{kw}$$

donde:

- $X_{kw} = \frac{\sum_{h=1}^H w_{kh} \cdot X_{kh}}{w_{k\bullet}}$  con  $w_{k\bullet} = \sum_{h=1}^H w_{kh}$  Es el estimador individual del coste medio y no es más que la media aritmética ponderada de la experiencia de siniestralidad de cada cedente.

- $m = E(\alpha_j(\theta_k))$ . Es la media poblacional, esto es, el estimador colectivo del coste medio. Es el coste medio esperado de los siniestros para el conjunto de la cartera, que a su vez no es más que el valor esperado de todas las primas de riesgo individuales.
- $Z_k$  con  $k = 1, 2, \dots, K$ . Es el factor de credibilidad, con  $0 \leq Z_k \leq 1$ . Cada cedente tiene su propio factor de credibilidad y viene definido por:

$$Z_k = \frac{a \cdot w_{k\bullet}}{\sigma^{*2} + a \cdot w_{k\bullet}}$$

- $\sigma^{*2} = E(\sigma^2(\theta_k))$ . Es el valor esperado de la dispersión total de los datos del coste medio de los siniestros en el tiempo, de toda nuestra cartera.
- $a = \text{Var}(\alpha_j(\theta_k))$ . Mide la dispersión existente entre las primas de riesgo individuales. Es un indicador de la heterogeneidad de la cartera.

En la fórmula del estimador de credibilidad aparecen tres parámetros estructurales  $m$ ,  $a$  y  $\sigma^{*2}$  que deben ser previamente estimados para poder aplicar dicha fórmula.

### **Estimador de la media poblacional: $m = E(\alpha_j(\theta_k))$**

El estimador de la media poblacional más utilizado, que vamos a simbolizarlo por  $X_{zw}$ , es el propuesto por Dubey, A. y Gisler, A. (1981), ya que se trata de un estimador insesgado y de varianza mínima:

$$X_{zw} = \sum_{k=1}^K \frac{Z_k}{Z_{\bullet}} \cdot X_{kw} \quad \text{con} \quad Z_{\bullet} = \sum_{k=1}^K Z_k$$

Este estimador en realidad es un pseudo-estimador ya que a través del factor de credibilidad  $Z_k$  depende de los parámetros estructurales  $a$  y  $\sigma^{*2}$ . En la práctica ambos parámetros son reemplazados por sus correspondientes estimadores.

### Estimador del parámetro $\sigma^{*2} = \mathbf{E}(\sigma^2(\theta_k))$

El estimador más adecuado, en la mayoría de los casos, para el parámetro  $\sigma^{*2}$  es el que propuesto por Bühlmann, H. y Straub, E. (1970), que vamos a simbolizarlo por  $\hat{\sigma}^{*2}$  y no es más que el valor medio de las K varianzas individuales empíricas:

$$\hat{\sigma}^{*2} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K \frac{1}{H-1} \cdot \sum_{h=1}^H w_{kh} \cdot (X_{kh} - X_{kw})^2$$

siendo  $X_{kw} = \sum_{h=1}^H \frac{w_{kh} \cdot X_{kh}}{w_{k\bullet}}$  y  $w_{k\bullet} = \sum_{h=1}^H w_{kh}$ .

### Estimador del parámetro $a = \mathbf{Var}(\alpha(\theta_k))$

El estimador que vamos a utilizar es el propuesto también por Bühlmann, H. y Straub, E. (1970), y vamos a simbolizarlo por  $\hat{a}$  y se define como:

$$\hat{a} = \frac{1}{c} \cdot \left[ \sum_{k=1}^K \frac{w_{k\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \cdot (X_{kw} - X_{ww})^2 - (K-1) \cdot \frac{\hat{\sigma}^{*2}}{w_{\bullet\bullet}} \right]$$

donde

$$w_{k\bullet} = \sum_{h=1}^H w_{kh} \quad \text{y} \quad w_{\bullet\bullet} = \sum_{k=1}^K w_{k\bullet}$$

$$X_{kw} = \sum_{h=1}^H \frac{w_{kh} \cdot X_{kh}}{w_{k\bullet}} \quad \text{y} \quad X_{ww} = \sum_{k=1}^K \frac{w_{k\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \cdot X_{kw}$$

$$c = \sum_{k=1}^K \frac{w_{k\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \cdot \left[ 1 - \frac{w_{k\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} \right]$$

Es posible que  $\hat{a} < 0$ , en este caso se utiliza como estimador  $\hat{a} = 0$ .

En el caso particular que  $\hat{a} = 0 \Rightarrow Z_k = 0 \Rightarrow \hat{\alpha}_j(\theta_k) = m$ . En este caso, Dubey, A. y Gisler, A. (1981) proponen como estimador de la media poblacional,  $X_{ww}$ , que viene definido:

$$X_{ww} = \sum_{k=1}^K \frac{W_{k\bullet}}{W_{\bullet\bullet}} \cdot X_{kw}$$

con  $W_{k\bullet} = \sum_{h=1}^H W_{kh}$  y  $W_{\bullet\bullet} = \sum_{k=1}^K W_{k\bullet}$ .

## 5.2. Obtención del número medio de siniestros

Para estimar el parámetro número medio de siniestros,  $\lambda_j$  con  $j=0,1,\dots,t-1$ , vamos a asumir, al igual que en el caso anterior, la existencia de independencia entre las cedentes, así como que los parámetros de riesgo están idénticamente distribuidos.

El estimador de dicho parámetro vamos a obtenerlo, en este caso, aplicando el Modelo de credibilidad de Bühlmann, ya que suponemos que el reasegurador dispone únicamente de información respecto al número de siniestros ocurridos desde hace  $H$  años, a contar desde  $j$ , para cada una de las cedentes.

Las variables más relevantes que intervienen en la obtención del estimador de credibilidad según el Modelo de Bühlmann son:

- $\theta_k$ : Parámetro de riesgo. Es una variable aleatoria desconocida, que describe las características de riesgo de cada cedente, con  $k = 1,2,\dots,K$  siendo  $K$  el número de cedentes.
- $N_{kh}$ : Variable aleatoria observable que nos indica el número de siniestros, con  $k = 1,2,\dots,K$  y  $h = 1,2,\dots,H$ , siendo  $H$  el número de años observados para cada cedente.

En el Modelo de Bühlmann se asume independencia entre y dentro de las cedentes, así como que las observaciones esperadas son homogéneas en el tiempo,  $E(N_{kh} / \theta_k) = \lambda_j(\theta_k)$ , y la varianza no depende del periodo considerado.

$\lambda_j(\theta_k)$  es la prima de riesgo individual para una cedente en concreto, en este caso, es el número medio de siniestros esperados cada ce-

dente con  $k = 1, 2, \dots, K$  y su estimador ajustado de credibilidad lineal viene dado por:

$$\hat{\lambda}_j(\theta_k) = (1 - Z) \cdot m + Z \cdot N_{k\bullet}$$

donde:

- $N_{k\bullet} = \sum_{h=1}^H \frac{N_{kh}}{H}$ . Es estimador individual del número medio de siniestros y no es más que la media aritmética de los siniestros ocurridos a cada cedente.
- $m = E(\lambda_j(\theta_k))$ . Es la media poblacional, el estimador colectivo del número medio de siniestros, esto es, el número medio esperado de siniestros para el conjunto de la cartera, que a su vez no es más que el valor esperado de todas las primas de riesgo individuales.
- $Z$  es el factor de credibilidad, con  $0 \leq Z \leq 1$ , siendo único para la cartera y viene definido por:
 
$$Z = \frac{a \cdot H}{\sigma^2 + a \cdot H}$$
- $\sigma^2 = E(\sigma^2(\theta_k))$ . Es el valor esperado de la dispersión total del número de siniestros de nuestra cartera en el tiempo.
- $a = \text{Var}(\lambda_j(\theta_k))$ . Es un indicador de la heterogeneidad de la cartera, medida a través del número medio de siniestros individuales esperados.

Al igual que en el Modelo de Bühlmann-Straub, en la fórmula de credibilidad aparecen tres parámetros estructurales  $m$ ,  $a$  y  $\sigma^2$  que deben ser previamente estimados. Para estimarlos vamos a utilizar los estimadores propuestos por Norberg, R. (1979).

### **Estimador de la media poblacional: $m = E(\lambda(\theta_k))$**

El estimador de la media poblacional,  $N_{\bullet\bullet}$ , es el valor medio observado:

$$N_{\bullet\bullet} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K N_{k\bullet} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K \frac{1}{H} \cdot \sum_{h=1}^H N_{hk}$$

## Estimador del parámetro $\sigma^{*2} = \mathbf{E}(\sigma^2(\theta_k))$

Un estimador adecuado, que vamos a simbolizar por  $\hat{\sigma}^{*2}$ , es el valor medio de las K varianzas individuales empíricas:

$$\hat{\sigma}^{*2} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^K \frac{1}{H-1} \cdot \sum_{h=1}^H (N_{kh} - N_{k\cdot})^2$$

## Estimador del parámetro $a = \mathbf{Var}(\lambda(\theta_k))$

El estimador que vamos a utilizar para estimar el parámetro  $a$ , y que vamos a simbolizar por  $\hat{a}$ , se define como:

$$\hat{a} = \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^K (N_{k\cdot} - N_{\cdot\cdot})^2 - \frac{\hat{\sigma}^{*2}}{H}$$

Es posible que  $\hat{a} < 0$ , en este caso utilizaremos como estimador:

$$\hat{a} = \frac{1}{K-1} \cdot \sum_{k=1}^K (N_{k\cdot} - N_{\cdot\cdot})^2$$

## 6. Aplicación numérica

Vamos a considerar una compañía de reaseguros que contrata un reaseguro *finite risk* a 5 años para un determinado ramo con tres compañías de seguros (cedentes). La compañía de reaseguros dispone hoy,  $j = 0$ , de información respecto al coste de los siniestros, expresados en miles de euros, y al momento de ocurrencia de cada siniestro, expresado en años, acaecidos en los últimos cinco años,  $H = 5$ , para cada una de las tres cedentes,  $K = 3$ .

Los datos de la siniestralidad histórica para cada una de las tres cedentes son los siguientes:

Cedente 1 (k = 1)		Cedente 2 (k = 2)		Cedente 3 (k = 3)	
Diferimiento	Coste	Diferimiento	Coste	Diferimiento	Coste
0,3361	5,5000	0,3076	4,0823	0,0254	4,1065
0,5219	4,2500	0,3249	7,0642	0,4648	4,9236
0,5994	1,0000	0,3372	1,0327	0,5016	2,4565
0,9356	3,2500	0,4894	0,2486	0,6278	0,2316
0,9998	1,0000	0,5038	5,0599	1,6176	9,7855
1,1083	2,0000	0,6500	9,6727	1,7908	1,4671
1,2508	3,5000	0,6916	2,4659	1,8032	5,7930
1,2589	2,5000	0,9519	1,7657	1,8144	2,7915
1,6180	2,5000	1,0762	10,2710	2,1123	4,1836
1,7014	1,0000	1,6280	12,9910	2,2418	2,6089
1,8885	6,5000	1,8103	3,4260	2,3149	2,9194
2,1532	0,5000	1,8244	17,9068	2,5616	13,0480
2,4576	2,0000	1,8707	5,1849	2,7478	0,0927
2,5165	2,0000	1,9006	4,7011	2,9789	10,3902
3,7405	0,5000	1,9045	6,0894	3,1169	1,1304
3,8529	0,5000	2,0356	0,2645	3,3640	22,5375
3,9986	2,6000	2,4530	1,0989	3,6507	0,5052
4,0255	5,0000	2,4653	1,8359	3,7459	7,6579
4,0271	6,2500	2,5431	0,6137	3,8180	8,2535
4,6397	7,2500	3,0590	0,6556	3,9022	5,2094
4,8345	2,7500	3,5735	3,0009	3,9874	9,2917
4,9321	3,7500	3,5954	0,6499	4,0338	1,1087
		3,9506	5,4664	4,3714	3,9622
		4,0611	9,8734	4,5310	12,2829
		4,1543	12,2953	4,6852	0,2307
		4,2638	0,8074	4,6959	2,3442
		4,4236	0,5569	4,8734	10,3656
		4,4325	26,5370	4,8843	17,9788
		4,6998	3,1321		
		4,9675	0,8519		

De la anterior información podemos obtener el número de siniestros ocurridos cada año, así como el coste medio de los mismos, para cada una de las tres cedentes que integran la cartera.

Número de siniestros			
h	k = 1	k = 2	k = 3
1	5	8	4
2	6	7	4
3	3	4	6
4	3	4	7
5	5	7	7

Coste medio de los siniestros			
h	k = 1	k = 2	k = 3
1	3,0000	3,9240	2,9295
2	3,0000	8,6529	4,9593
3	1,5000	0,9533	5,5405
4	1,2000	2,4432	7,7979
5	5,0000	7,2220	6,8962

## Modelo sin revisión

Para calcular el estimador de la componente histórica del coste medio hoy, en el origen de la operación,  $\alpha_0$ , hemos aplicado el modelo de credibilidad de Bühlmann-Straub, ya que no sólo disponemos de información, para cada cedente, respecto al coste medio de los siniestros ocurridos en los 5 últimos años, sino también del número de siniestros ocurridos cada año, información esta última que vamos a asignarle el significado de ponderación o pesos naturales conocidos. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

k	$\hat{\alpha}_0(\theta_k)$	$X_{kw}$	$Z_k$
1	4,8876	3,0045	0,0142
2	4,9226	5,3201	0,0193
3	4,9341	5,9877	0,0180

### Parámetros estructurales:

$$X_{zw} = 4,9150$$

$$\hat{\sigma}^2 = 29,2610$$

$$\hat{a} = 0,5610$$

Para estimar el parámetro número medio de siniestros hoy, en el origen de la operación,  $\lambda_0$ , hemos aplicado el modelo de Bühlmann ya que sólo disponemos de información, para cada cedente, respecto al número de siniestros ocurridos cada año. Los resultados obtenidos en este caso son:

k	$\hat{\lambda}_0(\theta_k)$	$N_k$	$Z$
1	5,0821	4,4000	0,269
2	5,5128	6,0000	0,269
3	5,4051	5,6000	0,269

### Parámetros estructurales:

$$N_{\cdot} = 5,3330$$

$$\hat{\sigma}^2 = 9,2000$$

$$\hat{a} = 0,1870$$

A continuación obtendremos para un reaseguro *finite risk* cuota parte y para un *finite risk* exceso de pérdida, el saldo estimado por el método de simulación de Monte Carlo. Los datos han sido obtenidos simulando 50.000 trayectorias de evolución de la siniestralidad del reasegurador para cada una de las tres cedentes.

Para el caso de un reaseguro *finite risk* cuota parte a prima única, con una cuota de cesión del 50%,  $k_R = 0,5$ , suponiendo que el tanto de interés que proporciona la cuenta de experiencia es del 3% efectivo anual, el saldo estimado,  $S_j^e$ , calculado al final de cada uno de los 5 años de vigencia del contrato de reaseguro para cada una de las tres cedentes, expresado en miles de euros, es:

Saldo estimado en el origen de la operación Reaseguro cuota parte			
j	Cedente 1	Cedente 2	Cedente 3
1	46,805260	51,164997	50,215015
2	35,629105	38,923470	38,243820
3	24,113569	26,310287	25,888378
4	12,235229	13,387703	13,148104
5	0,00000	0,00000	0,00000

y para el caso del reaseguro Exceso de Pérdida, con un pleno de retención de la cedente  $M = 5$  y con una capacidad del reasegurador por siniestro  $M_R = 6$  (expresado los plenos en miles de euros):

Saldo estimado en el origen de la operación Reaseguro Exceso de Pérdida			
j	Cedente 1	Cedente 2	Cedente 3
1	23,794001	26,089884	25,617228
2	18,107178	19,834793	19,521482
3	12,255095	13,424452	13,203841
4	6,218809	6,829707	6,709347
5	0,00000	0,00000	0,00000

En la siguiente tabla mostramos la evolución de la prima única capitalizada, de los siniestros acumulados capitalizados y del saldo estimado, para la cedente 1, en el caso del reaseguro cuota parte:

j	Prima única capitalizada	Siniestros acumulados capitalizados	Saldo estimado
1	59,426708	12,621449	46,805260
2	61,209509	25,580404	35,629105
3	63,045794	38,932224	24,113569
4	64,937168	52,701939	12,235229
5	66,885283	66,885283	0,00000

donde la esperanza matemática de la prima única de reaseguro asciende 57,696 miles de euros.

### Modelo con revisión

En este caso nos planteamos calcular para el reaseguro *finite risk* cuota parte definido en el modelo anterior, el saldo estimado de la cuenta de experiencia para la cedente 1, revisando anualmente los parámetros de las funciones de distribución en función de la evolución de la siniestralidad real de cada cedente. Al igual que en el caso anterior estimaremos las variables aleatorias por simulación de Monte Carlo y realizaremos 50.000 simulaciones.

Supondremos que el número medio anual y el coste medio anual de siniestros a partir del origen del contrato y para los 4 años siguientes son:

Número de siniestros			
j	k = 1	k = 2	k = 3
1	3	9	7
2	5	8	6
3	4	6	5
4	3	9	8

Coste medio de los siniestros			
j	k = 1	k = 2	k = 3
1	4,0000	8,8000	8,7000
2	4,5000	6,0000	9,0000
3	5,0000	5,0000	4,0000
4	5,0000	8,0000	8,0000

La siguiente tabla muestra la evolución, para cada año, del estimador del número de siniestros  $\lambda_j(\theta_1)$ , del estimador del coste de los siniestros  $\alpha_j(\theta_1)$ , de la esperanza matemática del saldo estimado  $E(S_{j,R,(j,t)}^{e,j})$ , su desviación tipo  $D(S_{j,R,(j,t)}^{e,j})$  y de la esperanza matemática del saldo estimado  $E(S_j^e)$  del modelo sin revisión.

j	$\hat{\lambda}_j(\theta_1)$	$\hat{\alpha}_j(\theta_1)$	$E(S_{j,R,(j,t)}^{e,j})$	$D(S_{j,R,(j,t)}^{e,j})$	$E(S_j^e)$
1	4,589	5,415	47,00491	15,4954	46,8052
2	4,591	5,516	36,4131	13,8375	35,6291
3	4,489	5,381	23,5704	11,1572	24,1136
4	4,546	5,571	2,4651	8,2584	12,2352

Para los datos de siniestralidad considerados podemos observar como el valor esperado del saldo estimado con revisión es mayor en los años 1,2 y 4 que el que se hubiese dotado de no considerar la revisión de los parámetros.

Un aspecto interesante a destacar es ver como influye el saldo estimado de la cedente 1 cuando variamos la siniestralidad del resto de cedentes. Consideremos el siguiente supuesto: si en el año 4 el número medio y el coste medio de los siniestros de la cedente 1 permanecen iguales a los datos anteriores y por ejemplo disminuimos la siniestralidad del resto de cedentes, esta circunstancia afectará a los estimadores  $I_4(q_1)$  y  $a_4(q_1)$  y por tanto a su saldo estimado.

Supongamos que para el último año  $j = 4$ , las cedentes 2 y 3 tuviesen un menor número medio y un menor coste medio anual de siniestros respecto a los datos anteriores:

Número de siniestros			
j	k = 1	k = 2	k = 3
4	5	7	5

Coste medio de los siniestros			
j	k = 1	k = 2	k = 3
4	5,0000	7,0000	6,0000

Bajo estas hipótesis:

j	$\hat{\lambda}_j(\theta_1)$	$\hat{\alpha}_j(\theta_1)$	$E(S_{j,R,(j,t)}^{e,j})$	$D(S_{j,R,(j,t)}^{e,j})$
4	4,523	5,418	9,6517	6,4480

el saldo estimado de la cedente 1 en el año 4 pasa de 12,4651 a 9,6517.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado el saldo o provisión de la cuenta de experiencia en un reaseguro *finite risk*. Para su determinación hemos utilizado dos enfoques, modelo sin revisión y modelo con revisión.

En el modelo sin revisión hemos asumido que los parámetros de siniestralidad se mantienen constantes a lo largo del plazo de vigencia de la operación y, por tanto, no se contempla la revisión de los mismos. De tal forma, que en el origen de la operación, hemos calculado el saldo estimado de la cuenta de experiencia al final de cada año. Las posibles aportaciones que garanticen el saldo estimado se deberán de calcular a posteriori una vez conocido el saldo real.

En el modelo con revisión, el saldo estimado no se calcula en el origen de la operación sino al final de cada uno de los periodos anuales del contrato, ya que en este caso contemplamos la revisión de los parámetros de las funciones de distribución, ajustándolos a la información de siniestralidad conocida hasta ese momento.

Hemos supuesto que la cartera del reasegurador está formado por tres cedentes del mismo ramo y para la estimación de los parámetros de siniestralidad hemos utilizado modelos de credibilidad para tener en cuenta tanto la experiencia individual como la de la cartera.

En la aplicación numérica del modelo con revisión, se pone de manifiesto como el saldo estimado de una cedente depende no sólo de la experiencia individual de siniestralidad, sino también de la experiencia del resto de cedentes que componen la cartera.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bühlmann, H. *Experience rating and credibility*. Astin Bulletin, 1967, vol. 4, part 3, 199-207.

Bühlmann, H; Straub, E. *Glanbwürdigkeit für Schadensätze*. MVSVM, 1970, vol. 70, Heft 1, 111-133.

Dubey, A.; Gisler, A. *On parameter estimators in credibility*. MVSVM, 1981, vol. 81, Heft 2, 107-122.

Durá, J.M.; López, J.M. *Fundamentos de estadística*. Madrid: EDITORIAL ARIEL, 1988.

Norberg, R. *The credibility approach to experience rating*. SAJ, 1979, nº 4, 181-221.

Pitacco, E. *Simulation in Insurance*. In M. Goovaerts (eds.) *Insurance and Risk Theory*, D. Reidel Publishing Company, 1986.

Sarrasí Vizcarra, F.J.; Pérez Frutuoso, M.J. *Una aproximación al reaseguro financiero en la modalidad de finite risk*. Gerencia de Riesgos y Seguros, 2003, nº 82, 2º trimestre, 21-32.

Swiss Re. *La transferencia alternativa de riesgos mediante el seguro finite risk*. Suiza de Reaseguros. 1997, Sigma nº 5.



## Ponencia 19

### **BAYESIAN APPROACH AND QUASI – LIKELIHOOD FUNCTIONS APPLIED TO LOSS RESERVING**

J.R.Sanchez y J.L.Vilar

#### **ABSTRACT**

This article shows how distributions defined by means of Quasi-Likelihood Function (QLF) can be used in a Bayesian framework in the same way as the usual likelihood function when estimating loss reserves. QLF considers the relationship between the mean and the variance to specify a likelihood distribution.

The QLF is a particular case of the Generalized Linear Models (GLMs), which allows applying different types of distributions for the outstanding claim data, all belonging to the Natural Exponential Family (NEF). In particular, we focus on the use of the Inverse Gaussian (IG) distribution as a natural generalization of the models already used in claim reserving. We express it by means of its QLF then use it in Bayesian models to calculate reserve estimation and its distribution.

The reason for expressing the IG in terms of QLF is that this approach reduces the likelihood distribution to a one-parameter exponential family, allowing the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) convergence.

Finally, we compare the predictor error and the reserve estimates when using the IG distribution and other distributions, and we compare the application of Bayesian MCMC and GLIMs Maximum Likelihood Estimation (MLE) approaches.

**Keywords:** Chain-Ladder Method Generalized Linear Models, Inverse Gaussian Distribution, Quasi-Likelihood Function, Markov Chain Monte Carlo.

## 1. INTRODUCTION

One of the most important tasks regarding the solvency analysis of insurance companies is the calculation of reserves to prevent against IBNR's. This reserve prevents against the claims yet occurred though unknown to the Company. Forecasting methods like the Chain-Ladder Method (CLM) or its stochastic extensions, have been common tools to obtain reserve estimations.

In this paper, we focus on Bayesian models to estimate the claim reserving amounts using MCMC. In particular, we outline the use of QLF as an alternative way to rewrite the IG distribution, when using it in the GLM framework. We perform the Bayesian analysis filling the MCMC technique with the QLF of the IG and a parametric structure of its mean. Then we calculate claim reserves estimates.

The reason for specifying the distribution in terms of QLF is that it allows expressing a relationship between its mean and variance. This approach reduces the likelihood to a one-parameter exponential family, very useful in the context of MCMC calculations.

The justification for using Bayesian approach instead of GLM one is that the first includes randomness assumptions on the parameters.

We believe that MCMC techniques offer many advantages from the practical point of view. For example, they make possible modeling prior information about the parameters, obtaining a complete predictive distribution of the reserves to which risk measures may be applied.

The paper is structured as follows. In the second section we summarize the CLM. The third section summarizes the CLM stochastic gener-

alizations via GLMs and describes how the QLF can be used to rewrite the likelihood in terms of the mean–variance relationship. Bayesian estimation is the topic of the fourth section. We give an application to IBNR estimation in the fifth section. The sixth section is devoted to the conclusions.

## 2. THE CHAIN-LADDER METHOD

Loss reserving methods consider a traditional Run–off triangle (triangle of incremental losses) which represents the claim amounts according to the year when the claim arose (index  $i$  for  $1 \leq i \leq N$ ) and the year when the claim was notified or paid (index  $j$  for  $1 \leq j \leq N$ ), where  $N$  is the total number of years. The figure in cell  $i, j$  is the incremental claim amount  $Y_{i,j}$  with a delay of  $j-1$  years from the origin year  $i$ .

We assume that the data are arranged in a triangle of incremental claims  $\{Y_{i,j} : j=1, \dots, N-i+1; i=1, \dots, N\}$ , where the claims are known for  $i+j \leq N+1$  and unknown for  $i+j > N+1$ . The Run – off triangle can be found in Table 1.

The cumulative claim amounts  $\{Z_{i,j} : i+j \leq N+1\}$  are defined as  $Z_{i,j} = \sum_{k=1}^j Y_{i,k} \geq 0$ , and the development factors are defined as

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^{N-j+1} Z_{i,j}}{\sum_{i=1}^{N-j+1} Z_{i,j-1}} \quad (2.1)$$

We assume that all the sums of the incremental claims for each column must be positive. This assumption is worth to avoid model can breakdowns in the presence of incremental negative claims amounts (see Alba [2]). Table 2 shows the data (claim amounts) used in this article. They have been taken from Taylor and Ashe [14].

**Table 1**  
The Run-off Triangle

		Development Year						
i / j		1	2	...	j	...	N - 1	N
Origin Year	1	$Y_{1,1}$	$Y_{1,2}$	...	$Y_{1,j}$	...	$Y_{1,N-1}$	$Y_{1,N}$
	2	$Y_{2,1}$	$Y_{2,2}$	...	$Y_{2,j}$	...	$Y_{2,N-1}$	
	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...		
	i	$Y_{i,1}$	$Y_{i,2}$	...	$Y_{i,j}$			
	⋮	⋮	⋮	⋮				
	N - 1	$Y_{N-1,1}$	$Y_{N-1,2}$					
	N	$Y_{N,1}$						

The aim of the CLM is to complete the empty triangle on the lower right corner of the table with the help of the development factors. These factors are applied to the latest cumulative claim amounts of each row to obtain the estimation of the unknown claim amounts:

$$Z_{i,j} = Z_{i,N-i+1} * \prod_{k=N-i+2}^N f_k, \text{ for } i + j \geq N + 2 \quad (2.2)$$

This way, it is possible to estimate the total amount of outstanding claim as

$$R_{Total} = \sum_{i=1}^N Z_{i,N} - \sum_{i=1}^N Z_{i,N-i+1} \quad (2.3)$$

For comparison purposes the chain-ladder reserve estimates and its development factors can be found in Table 3.

**Table 2**  
Data Run-off Triangle

Origin Year	Development Year									
	357848	766940	610542	482940	527326	574398	146342	139950	227229	67948
	352118	884021	933894	1183289	445745	320996	527804	266172	425046	
	290507	1001799	926219	1016654	750816	146923	495992	280405		
	310608	1108250	776189	1562400	272482	352053	206286			
	443160	693190	991983	769488	504851	470639				
	396132	937085	847498	805037	705960					
	440832	847631	1131398	1063269						
	359480	1061648	1443370							
	376686	986608								
344014										

**Table 3**  
Chain-ladder reserve estimates

Origin Year $i$	Reserve estimates $R_i$	Development Year $j$	Factors $f_j$
2	94,633.81	1	3.491
3	469,511.29	2	1.747
4	709,637.82	3	1.457
5	984,888.64	4	1.174
6	1,419,459.46	5	1.104
7	2,177,640.62	6	1.086
8	3,920,301.01	7	1.054
9	4,278,972.26	8	1.077
10	4,625,810.69	9	1.018
<b>Overall</b>	<b>18,680,855.61</b>		

### 3. STOCHASTIC EXTENSIONS OF THE CHAIN-LADDER METHOD

Stochastic generalizations of the CLM make possible obtaining not only an estimate, but also a predictive distribution of outstanding claims. For a review about these stochastic extensions see England and Verrall [3] and Hess and Schmidt [6].

The starting point is Mack [7], where this author investigates the stochastic nature of CLM, assuming no distribution assumption and specifying the first two moments for the cumulative claims as

$$E\left[Z_{i,j} \mid Z_{i,1}, \dots, Z_{i,j-1}\right] = Z_{i,j-1} f_j \quad (3.1)$$

$$\text{Var}\left[Z_{i,j} \mid Z_{i,1}, \dots, Z_{i,j-1}\right] = \sigma_j^2 Z_{i,j-1} \quad (3.2)$$

He also obtains reserve estimates and prediction errors. The reserve distribution is not available except when some approximation assumption is made.

England and Verrall [3] reproduce the Chain-Ladder estimates using GLMs. For that aim they assume an Over-Dispersed Poisson (ODP) distribution with proportional mean and variance:

$$E\left[Y_{i,j}\right] = \mu_{i,j} \quad (3.3)$$

$$\text{Var}\left[Y_{i,j}\right] = \phi \mu_{i,j}, \quad \phi \in (0, \infty) \quad (3.4)$$

The Over-dispersion is introduced by means of the dispersion or scale parameter  $\phi$ .

In the context of Bayesian models, Verrall [16] notices that the connection between the ODP model and the CLM is not immediately apparent. For this reason, he prefers to use the Over-Dispersed Negative Binomial (ODNB) as a recursive model, where the incremental claim amounts, have mean and variance

$$E\left[Y_{i,j} \mid Z_{i,j-1}\right] = (f_j - 1)Z_{i,j-1}, \quad \text{for } j \geq 2 \quad (3.5)$$

$$\text{Var}\left[Y_{i,j} \mid Z_{i,j-1}\right] = \phi f_j (f_j - 1)Z_{i,j-1}, \quad \text{for } j \geq 2 \quad (3.6)$$

The parametric expression of the expected development factors  $f_j$  is:

$$\log(\log(f_j)) = \gamma_j \quad (3.7)$$

GLMs have been often used for estimating claim reserves. These were first described in Nelder and Wedderburn [9]. They allow assuming a broader class of distributions called the natural exponential family NEF.

This last consists in densities of the form:

$$f(y_{i,j}; \theta_{i,j}, \varphi) = \exp \left\{ y_{i,j} \theta_{i,j} - b(\theta_{i,j}) \right\} / \varphi + c(y_{i,j}, \varphi) \quad (3.8)$$

Where  $y_{i,j}$  is the incremental claim amount and  $\theta_{i,j}$  is the parameter corresponding to the origin year  $i$  with a delay of  $j-1$  years. The mean and variance are defined by

$$E[Y_{i,j}] = \mu_{i,j}(\theta_{i,j}) = b'(\theta_{i,j}) \quad (3.9)$$

$$Var[Y_{i,j}] = \varphi b''(\theta_{i,j}) = \varphi V(\mu_{i,j}) \quad (3.10)$$

The variance is a product of two factors:

- $V(\mu_{i,j})$  is known as the variance function. It specifies the relationship between the variance and the mean.
- The parameter  $\varphi$  is known as the dispersion parameter. This parameter provides model flexibility allowing proportionality between its mean and its variance.

In the context of the GLMs, we have to specify a link function  $g(\mu_{i,j}) = \eta_{i,j} = (\mathfrak{N} \cdot \bar{\beta})_{i,j}$  to determine the relationship between the random component and the systematic components:

- The random component captures the distributional assumption expressed in (3.9) and (3.10).
- The systematic component is based on a linear predictor, which fills the model with information about the independent variables. This component is expressed as a product of the covariates  $(\beta_1, \beta_2, \dots)^T$  and a design matrix  $\mathfrak{N}$  full of zeros and ones.

$$\eta_{i,j} = (\mathfrak{N} \cdot \bar{\beta})_{i,j} = \beta_0 + \beta_1 X_{ij,1} + \dots + \beta_p X_{ij,p}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (3.11)$$

The canonical link  $g(\mu_{i,j}) = \theta_{i,j}$  is a monotone, differentiable function. Since the mean function is (3.10), the canonical link is its inverse:

$$(b')^{-1}(\mu_{i,j}) = \theta_{i,j} \quad (3.12)$$

We estimate the  $\theta$  values maximizing the likelihood

$$L(y; \theta, \varphi) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{N-i+1} f(y_{i,j}; \theta_{i,j}, \varphi) \quad (3.13)$$

The maximization is achieved in two steps:

- Firstly consider the logarithm of the likelihood:

$$l(y; \theta, \varphi) = \log L(y; \theta, \varphi) \quad (3.14)$$

- Secondly, differentiate the  $l$  function:

$$S(\theta) = \frac{\delta l(y; \theta, \varphi)}{\delta \theta} \quad (3.15)$$

then find the root of  $S(\theta) = 0$ .

This maximization procedure provides the idea for constructing QLF. According to McCullagh and Nelder [8], the QLF is a function with similar properties than the log-likelihood function when deduced from a member of the NEF. Using (3.10) and (3.13) as well as,  $V(\mu) = b''(\theta) = \frac{\delta \mu}{\delta \theta}$ . In our context of run-off triangle we note  $Q(\mu_{i,j}; y_{i,j})$  for the QLF and write it down as:

$$\frac{dQ(\mu_{i,j}; y_{i,j})}{d\mu_{i,j}} = \frac{dQ(\mu_{i,j}; y_{i,j})}{d\theta_{i,j}} \frac{d\theta_{i,j}}{d\mu_{i,j}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-i+1} \frac{y_{i,j} - b'(\theta_{i,j})}{\varphi b''(\theta_{i,j})} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-i+1} \frac{y_{i,j} - \mu_{i,j}}{\varphi V(\mu_{i,j})} \quad (3.16)$$

Wedderburn [18] demonstrates that the loglikelihood (3.14) is identical to the QLF (3.16) if and only if it comes from an NEF.

The formula linking the loglikelihood and (3.16) is:

$$l(y; \theta, \varphi) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-i+1} \int_y^{\mu} \frac{y_{i,j}^{-t}}{\varphi V(t)} dt = l(y; \mu_{i,j}, \varphi) - l(y; y_{i,j}, \varphi) \quad (3.17)$$

or equivalently

$$l(y_{i,j}; \theta_{i,j}, \varphi) = \left\{ y_{i,j} \theta(\mu_{i,j}) - b(\theta(\mu_{i,j})) \right\} - \left[ y_{i,j} \theta(y_{i,j}) - b(\theta(y_{i,j})) \right] \Big/ \varphi \quad (3.18)$$

Table (4) shows the distributions used in this paper and its corresponding QLF. We can check for each distribution its variance function  $V(\mu)$ .

Even if the parameter  $\varphi$  is not necessary to maximize the likelihood distribution, it is in fact essential to determine the claims amounts distribution. It can be estimated through the Pearson's chi-square statistic (see England and Verrall [3]).

$$\varphi_j = \frac{1}{N-j+1} \sum_{i=1}^{N-j+1} \frac{(Z_{i,j} - \mu_{i,j})^2}{V(\mu_{i,j})} \quad (3.19)$$

**Table 4**

QLF of some common distributions in loss reserving

Distribution	$Q(\mu; y)$	$\theta(\mu)$	$\mu(\theta) = b'(\theta)$	$V(\mu) = b''(\theta)$
Poisson <i>dpois</i> ( $\mu$ )	$y \log \mu - \mu$	$\log(\mu)$	$\exp(\theta)$	$\mu$
Gamma <i>dgamma</i> ( $\mu, \alpha$ )	$-\frac{y}{\mu} - \log \mu$	$1/\mu$	$-1/\theta$	$\mu^2$
Inv. Gaussian <i>dinvgauss</i> ( $\mu, \sigma^2$ )	$-\frac{y}{2\mu^2} + \frac{1}{\mu}$	$1/\mu^2$	$(-2\theta)^{-1/2}$	$\mu^3$

Renshaw and Verrall [12] computed the Run-off triangle on a two-way analysis of variance (ANOVA) model. They used the following linear predictor:

$$\eta_{i,j} = c + \alpha_i + \beta_j \quad (3.20)$$

The  $\alpha_i$  and  $\beta_j$  are column and row effect parameters satisfying the constraint  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ . Further information can be found in Verrall [15]. The QLF has one dimensional parameter  $\theta_{i,j} = \mu_{i,j}$ , so we maximize the likelihood with the formulas (3.13 to 3.15), with respect to  $c, \alpha_i$  and  $\beta_j$ .

The reserve estimation under the GLMs will be calculated as:

$$R_{Total}^{GLM} = \sum_{i=2}^N \sum_{j=N+2-i}^N \hat{\mu}_{i,j} \quad (3.21)$$

with  $\hat{\mu}_{i,j} = g^{-1}(c + \alpha_i + \beta_j) = g^{-1}\left(\left(\sum \bar{\beta}\right)_{i,j}\right)$  for a given link function  $g$ .

Table 5 shows the parameters  $c, \alpha_i$  and  $\beta_j$  adjusted by MLE. Table 6 shows the dispersion parameter  $\varphi$  as well as a comparison about the total loss reserving amount for different distributions. Note that the parameter  $\varphi < 1$  is under-dispersed for the Gamma and IG distribution. This means that the model tends to ignore the large claims amounts. All the figures were obtained using the statistical software R [11].

**Table 5**  
Parameters adjusted for an IG - QLF

Coef.	Estimate	Std Dev.	Coef.	Estimate	Std Dev.	Coef.	Estimate	Std Dev.
$c$	8.81e-12	1.74e-12	$\alpha_7$	-1.70e-12	1.16e-12	$\beta_4$	-6.30e-12	1.51e-12
			$\alpha_8$	-2.06e-12	1.16e-12	$\beta_5$	-3.96e-12	1.78e-12
$\alpha_2$	-1.69e-12	1.14e-12	$\alpha_9$	-1.74e-12	1.45e-12	$\beta_6$	-3.40e-13	2.41e-12
$\alpha_3$	-1.64e-12	1.15e-12	$\alpha_{10}$	-3.65e-13	5.18e-12	$\beta_7$	9.04e-13	2.82e-12
$\alpha_4$	-1.59e-12	1.16e-12				$\beta_8$	1.14e-11	5.40e-12
$\alpha_5$	-1.31e-12	1.22e-12	$\beta_2$	-6.04e-12	1.50e-12	$\beta_9$	1.49e-12	4.03e-12
$\alpha_6$	-1.47e-12	1.19e-12	$\beta_3$	-6.14e-12	1.50e-12	$\beta_{10}$	2.07e-10	5.56e-11

**Table 6**

Total amount of outstanding claim reserves

Distribution		$R_{Total}$	$\varphi$
Poisson	$dpois(\mu)$	18,680,856	52,601.93
Gamma	$dgamma(\mu, \nu)$	17,474,711	0.1001933
Inv. Gaussian	$dinvgauss(\mu, \sigma^2)$	16,790,386	2.424508e-07

#### 4. BAYESIAN GENERALIZED LINEAR MODELS

Bayesian generalized linear models have been recently applied to predict the loss reserves. Some examples of these applications can be found in Alba [1] [2], England and Verrall [4], Ntzoufraz and Dellaportas [10] and Verrall [17].

The Bayesian models include a likelihood function  $f(y|\theta)$  for the known claim amounts  $\{y_{i,j} : j = 1, \dots, N - i + 1; i = 1, \dots, N\}$ . They also include some available information about the parameters  $\theta$ 's through a prior density  $\pi(\theta)$ . When the information about the parameters  $\theta$ 's is missing, we use non-informative priors to complete the model. All kinds of information can be mixed using Bayes's Theorem

$$\pi(\theta|y) = \frac{f(y|\theta) \cdot \pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(y|\theta) \cdot \pi(\theta) d\theta} \quad (4.1)$$

The result is a posterior distribution  $\pi(\theta|y)$  on the parameters conditioned to the past claims experience.

MCMC techniques are used to find the posterior distribution given the data and the prior assumption, when analytical calculation cannot be achieved. This can happen because of the nonexistence of a conjugate model, given the choice made on distributions, or because of the multidimensionality of the model. These techniques include the use of

numerical techniques like the Gibbs or Metropolis – Hastings sampling methods. Additional information about the use of these methods can be found in Gelman [5].

We can estimate the future claim amounts  $y^L$  with the posterior predictive distribution. To obtain this last, we have to consider the likelihood of the known data  $y^U$  (upper left corner of the table) and the prior information  $\pi(\theta)$ , then calculating it following :

$$f(y_{i,j}^L) = \int_{\Theta} f(y_{i,j}^L | \theta) \pi(\theta | y_{i,j}^U) d\theta, \quad \text{for } i + j > N + 1 \quad (4.2)$$

## 5. BAYESIAN MODELS USING QUASI LIKELIHOOD FUNCTIONS

Therefore, the first step in a Bayesian model consists in defining a conditioned density function  $f(y_{i,j} | \theta_{i,j})$  for the data. We can choose any distribution belonging to the NEF family rewritten as a QLF. The aim of this paper is exemplifying the IG case. Following formula (3.19) and table (4), we define the IG likelihood function in terms of its QLF as

$$Q(Y_{i,j} | \mu_{i,j}, \varphi) = \varphi^{-1} \left( -\frac{y_{i,j}}{2\mu_{i,j}^2} + \frac{1}{\mu_{i,j}} + \frac{1}{2y_{i,j}} - \frac{1}{y_{i,j}} \right) \quad (5.1)$$

The model has scalar parameter  $\varphi$  and the same predictor structure given in formula (3.20).

The second step incorporates prior information about the  $c, \alpha_i, \beta_j$  parameters. This information is modeled through the non-informative priors densities  $\pi(c), \pi(\alpha_i)$  and  $\pi(\beta_j)$ . We will follow the choice of Ntzoufraz and Dellaportas [10]:

$$\begin{aligned} c &\sim dnorm(0, \sigma_c^2) && \text{with } \sigma_c^2 = 1000 \\ \alpha_i &\sim dnorm(0, \sigma_{\alpha_i}^2) && \text{with } \sigma_{\alpha_i}^2 = 100 \quad \text{for } i = 2, \dots, N \\ \beta_j &\sim dnorm(0, \sigma_{\beta_j}^2) && \text{with } \sigma_{\beta_j}^2 = 100 \quad \text{for } j = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5.2)$$

These non informative priors densities model a lack of information about the components of the predictor structure defining very large values of  $\sigma$ .

With (3.19) we estimate the dispersion parameter  $\phi$  filling its figure in Table 6. For the IG distribution it is  $\phi = 2.424508e-07$ .

Using the Bayes theorem (4.1), the posterior distribution is

$$\pi(c, \alpha, \beta, \phi, y^L | y^U) \propto f(y^U | c, \alpha, \beta, y^L) * \pi(c, \alpha, \beta, y^L) \quad (5.3)$$

Considering the likelihood function  $f(y|\theta)$  through the QLF (5.1), we can now achieve calculations involving

$$\pi(c, \alpha, \beta, \phi, y^L | y^U) \propto Q(y^U | c, \alpha, \beta, \phi) * \pi(y^L | c, \alpha, \beta, \phi) * \pi(c) * \pi(\alpha) * \pi(\beta) \quad (5.4)$$

The computing package WinBUGS [13] does not include the IG distribution. Yet the zeros trick allows incorporating its likelihood function. For that aim we need to specify a prior assumption on the future variates  $y^L$ . We define this additional prior density as

$$y_{i,j}^L \sim dgamma\left(\frac{\mu_{i,j}}{\phi}, \frac{1}{\phi}\right) \quad (5.5)$$

MCMC supplies samples from the posterior distribution by simulating the parameters  $\mu, \alpha, \beta, y^L$  by means of the Gibbs sampling.

In WinBUGS Gibbs sampling is straightforward to apply, simply requiring the filling of a values grid, where the rows relate to iterations of the Gibbs sampler, and the columns relate to parameters. For example, if  $t$  iterations of the Gibbs sampler are required, and there are  $k$  parameters, then it is necessary to fill a  $t$  times  $k$  grid.

In our case we consider 4 parameters defined with conditional distributions:

$$\begin{aligned}
\pi(\mu|\alpha, \beta, y^L, y^U) &= \frac{\pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U)}{\pi(\alpha, \beta, y^L | y^U)} = \frac{\pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U)}{\int \pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U) \partial\mu} \\
\pi(\alpha|\mu, \beta, y^L, y^U) &= \frac{\pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U)}{\pi(\mu, \beta, y^L | y^U)} = \frac{\pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U)}{\int \pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U) \partial\alpha} \\
\pi(\beta|\mu, \alpha, y^L, y^U) &= \frac{\pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U)}{\pi(\mu, \alpha, y^L | y^U)} = \frac{\pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U)}{\int \pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U) \partial\beta} \\
\pi(y^L|\mu, \alpha, \beta, y^U) &= \frac{\pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U)}{\pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U)} = \frac{\pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U)}{\int \pi(\mu, \alpha, \beta, y^L | y^U) \partial y^L}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

The first iteration of Gibbs sampling consists in random draws from the full conditional distribution of each parameter. This way each parameter is updated from its conditional distribution and then we fill the first row iteration with the parameters  $\hat{\mu}_1, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$  and  $\hat{\phi}_1$ . To fill the next row, we need to update again the conditional distribution incorporating now the values of the first iteration. We update  $t$  times the parameters.

Gibbs sampling can be implemented with the computing package WinBUGS [13]. Table 7 shows the parameters  $c, \alpha_i$  and  $\beta_j$  estimated by MCMC.

Table 8 show the reserve estimates with different distribution assumption over the likelihood function. An initial burn-in sample of 10,000 iterations was used. The results of these observations were discarded, to remove any effect from the initial conditions seeking this way the simulations convergence. Then further 50,000 simulations were run to reach the results. The result includes the predictive variance for the outstanding claims which is quite difficult to derive analytically. The estimates include both parameter variability and process variability. These predictive estimates are used to compute the mean and variance of the reserves.

**Table 7**  
Parameters adjusted for an IG - QLF

Coef.	Estimate	Std Dev.	Coef.	Estimate	Std Dev.	Coef.	Estimate	Std Dev.
$C$	5.66	1.409e-4	$\alpha_7$	0.3727	2.50e-04	$\beta_4$	0.9955	2.21e-04
			$\alpha_8$	0.3888	2.75e-04	$\beta_5$	0.3734	1.88e-04
$\alpha_2$	0.4017	1.62e-04	$\alpha_9$	0.2846	2.89e-04	$\beta_6$	0.1616	1.85e-04
$\alpha_3$	0.3592	1.74e-04	$\alpha_{10}$	0.181	3.16e-04	$\beta_7$	-0.1632	1.94e-04
$\alpha_4$	0.06441	1.67e-04				$\beta_8$	-0.5404	1.91e-04
$\alpha_5$	0.2731	1.87e-04	$\beta_2$	0.9185	1.88e-04	$\beta_9$	-0.1376	2.37e-04
$\alpha_6$	0.3173	2.15e-04	$\beta_3$	0.9084	2.00e-04	$\beta_{10}$	-1.441	1.89e-04

**Table 8**  
Estimation of Reserves by Accident Year Using Different Distributions  
with MCMC: Poisson, Gamma, and Inverse Gaussian assumptions

Accident Year	Poisson		Gamma		Inverse Gaussian	
	Reserves	Std Dev.	Reserves	Std Dev.	Reserves	Std Dev.
2	97	112.40	93	1.04	102	0.02
3	477	220.00	447	3.34	456	0.10
4	719	264.70	611	3.83	518	0.10
5	993	308.70	992	5.79	958	0.19
6	1429	379.60	1,453	8.26	1,465	0.32
7	2195	495.90	2,187	13.13	2,153	0.53
8	3955	800.60	3,666	24.08	3,334	0.90
9	4298	1,058.00	4,123	31.92	3,951	1.12
10	4685	2,031.00	4,517	47.97	4,424	1.37
$R_{Total}$	<b>18,850</b>	<b>2,991.00</b>	<b>18,090</b>	<b>76.25</b>	<b>17,360</b>	<b>2.48</b>

## 6. CONCLUSIONS

An important aspect in the constitution of loss reserving reserves is the fact that the data behavior between different insurance portfolios may differ. For that reason it is worth analyzing and learning from the data rather than imposing the same distribution assumption in all situations. This article shows how, the assumption of an IG distribution to the run-off triangle data may be worked out until the reserve estimation and distribution is reached. This is done in a Bayesian framework.

Table 8 shows how the use of diffuse priors in Bayesian analysis leads close reserves estimates to the MLE ones, when fitting the same model structure over the mean (3.20).

The plot (1) shows the posterior distribution for the IG likelihood assumption. Notice that in our example the IG distribution furnishes the smallest error predictor.

In this example the reserves in both MCMC and GLM's are not equal, as can be seen in Table 6 and 8. The estimates of the total reserves obtained with the Bayesian method presented in this paper are higher. The variance of the IG MCMC estimates for the total reserve estimations are lower than those obtained with the other distributional assumptions.

The Bayesian model seems to provide a good fit to the data. Comparing with any other distribution assumption, it also provides a smaller variance of the predictive distribution. Apparently, taking smaller parameters over  $\varphi$  has a systematic effect on the variances of the reserves. The reason is that with the trick of zeros we need to add an additional prior assumption over the future values of the model, so if we introduce over-dispersion in the parameters of the prior Gamma distribution, the values are less informative when we take smallest values on  $\varphi$ .

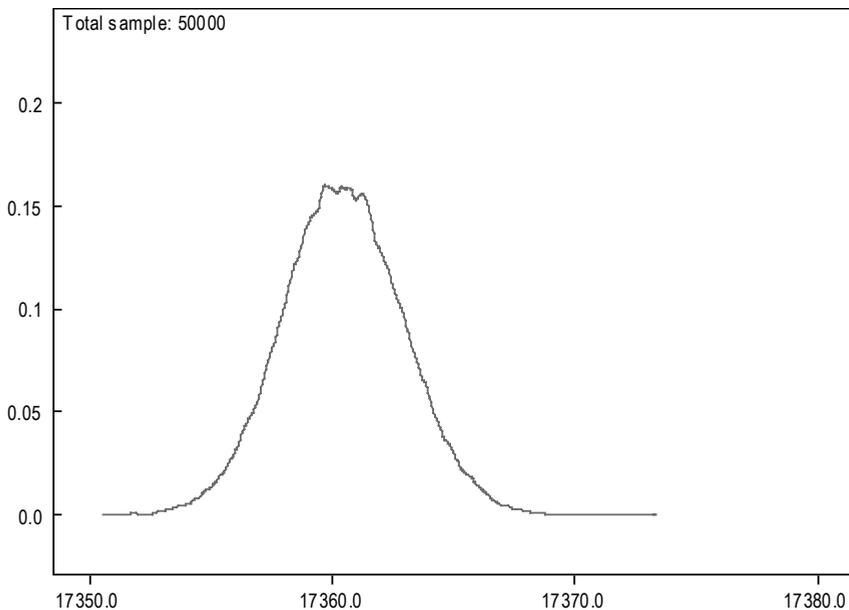
McCullagh & Nelder [8] consider some disadvantage of using QLF instead of its likelihood function. The QLF are expressed in the esti-

mation of the model by the value of the dispersion parameter  $\varphi$  being fixed at once. If the variation in the data is more than that implied by the underlying probability distribution, the estimated model is considered to be over-dispersed, a situation that can result in the standard errors and confidence intervals being underestimated.

For this reason we must be careful with these estimates. In our case this was the only way to get estimates with IG assumption and MCMC techniques. The reason is that the IG likelihood is reduced to a one parameter model. This allows the convergence when applying MCMC and avoids the problem of multi-stationary predictive distributions .

### Plot (1)

Posterior Distribution of Reserves by Accident Year Using the IG



This research is being carried under research project SEJ2005-06744/ECON of Ministerio de Ciencia e Innovación.

## REFERENCES

- Alba, E. d. (2002). "Bayesian Estimation of Outstanding Claim Reserves." *North American Actuarial Journal* 6(4): 1 - 20.
- Alba, E. d. (2006). "Claim Reserving When There Are Negative Values in the Runoff Triangle: Bayesian Analysis Using The Three-Parameter Log-Normal Distribution." *North American Actuarial Journal* 10(3): 45-59.
- England, P. D. and R. J. Verrall (2002). "Stochastic claims reserving in general insurance." London: Institute of Actuaries: 1 - 76.
- England, P. D. and R. J. Verrall (2005). "Incorporating expert opinion into a stochastic model for the chain-ladder technique." *Insurance: Mathematics and Economics* 355-370.
- Gelman, A., J. B. Carlin, et al. (2004). "Bayesian Data Analysis. Second Edition." Chapman & Hall/CRC, Boca Ranton, Florida, USA.
- Hess and Schmidt (2002). "A comparison of models for the chain-ladder method." *Insurance Math. Econom.* 31: 351-364.
- Mack, T. (1993). "Distribution-free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimates." *Astin Bulletin* 23: 213 - 225.
- McCullagh, P. and J. A. Nelder (1989). "Generalized Linear Models." Chapman and Hall/CRC Second Edition: 28 - 32.
- Nelder, J. A. and R. W. M. Wedderburn (1972). "Generalized linear models." *Journal of the Royal Statistical Society A* (135:370–384).
- Ntzoufras, I. and P. Dellaportas (2002). "Bayesian modelling of outstanding liabilities incorporating claim count uncertainty." *North American Actuarial Journal* 6: 113 - 128.
- R, D. C. T. (2008). "R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>."

Renshaw, A. E. and R. J. Verrall (1998). "A stochastic model underlying the chain-ladder technique." *British Actuarial Journal* 4: 903 - 923.

Spiegelhalter, D. J., T. Andrew, et al. (2001). "WinBUGS 1.4: Bayesian Inference Using Gibbs Sampling. Imperial College and MRC Biostatistics Unit, Cambridge, UK. [www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs](http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs)."

Taylor, G. C. and F. R. Asche (1983). "Second Moments of Estimates of Outstanding Claims." *Journal of Econometrics* 23: 37-61.

Verrall, R. J. (1990). "Bayes and empirical Bayes estimation for the chain-ladder model." *Astin Bulletin* 20: 217-243.

Verrall, R. J. (2001). "A Bayesian Generalised Linear Model for the Bornhuetter-Ferguson Method of Claims Reserving." *Actuarial Research Paper* 139: 1 - 16.

Verrall, R. J. (2004). "Obtaining predictive distributions for reserves which incorporate expert opinion." *Variance* 1: 283-315.

Wedderburn, R. W. M. (1974). "Quasi-likelihood functions, generalized linear models and the Gauss—Newton method." *Biometrika* 61(3): 439 - 447.



## Ponencia 20

# SELECCIÓN DE FACTORES DE RIESGO MEDIANTE ÁRBOLES DE CLASIFICACIÓN: INFLUENCIA DE LA VARIABLE BONUS-MALUS

Piedad Tolmos Rodríguez-Piñero

### RESUMEN

Con este artículo se prosigue la investigación de la que ya se dio cuenta en la pasada edición del congreso RIESGO, realizando ahora una selección de los factores de riesgo que describen a los asegurados de la cartera mediante Árboles de Clasificación. Se utiliza para ello una nueva base de datos, con nuevos factores de riesgo, y en esta ocasión se dirigirá la atención no únicamente a recoger aquellos factores relevantes de cara a la siniestralidad de los asegurados, sino a observar la influencia de la variable Bonus Malus. La salida del árbol asignará una importancia relativa a cada variable que permitirá analizar la repercusión de la inclusión o no de esta importante variable en el conjunto de factores.

**Palabras Clave:** Factores de Riesgo, Clasificación de Asegurados del Seguro del Automóvil, Bonus Malus, Árboles de Clasificación, Máquinas de Vectores Soporte

### 1. INTRODUCCIÓN

Para que un problema de clasificación tenga éxito, a menudo es necesario que se reduzca la cantidad de información proporcionada, especialmente cuando en la mayoría de los casos, se maneja información

que no es relevante para el proceso. Es por ello que se suele recurrir a lo que se conoce como extracción de características, procedimiento por el cual se seleccionan las características más importantes de la muestra, las que más información proporcionan para su posterior clasificación. Se trata, por tanto, de caracterizar un objeto para que sea reconocido por medidas cuyos valores son muy similares para objetos en la misma categoría, y muy diferentes para objetos de diferentes categorías. Esto nos lleva a la idea de buscar características “distintivas” que sean invariantes frente a transformaciones irrelevantes del dato de entrada. El subconjunto de variables de entrada seleccionado será el que preserve o mejore la capacidad del clasificador [Weston et al. (2000)].

En el ámbito de una compañía de seguros de automóvil, tales variables son los factores de riesgo del asegurado, por lo que la selección resulta reveladora de cara a la compañía, pues le informa de qué factores son los realmente importantes de cara a la siniestralidad, mejorando de esta forma el proceso de recogida de datos, lo que redundará en un mejor funcionamiento del sistema.

Ese proceso forma parte de uno de los principales campos de la Teoría del Aprendizaje, el llamado “Problema de Selección de Características”, esto es, la selección de los factores o rasgos que permitan desechar aquellos elementos que se revelen como irrelevantes para el estudio que se desea realizar.

En la pasada edición del Congreso dimos cuenta de la resolución de un problema de estas características en el marco de un problema más general: el de la clasificación de los asegurados de una cartera de una compañía del seguro<sup>36</sup> del automóvil atendiendo a si han presentado o no siniestro en un año. Para resolver el problema utilizamos técnicas de Aprendizaje, la clasificación con Máquina de Vectores Soporte, y la selección de factores con Algoritmos Genéticos. Nos motivó para ello el valer nos de herramientas que si bien son habituales en la resolución de problemas de clasificación, resultaban innovadoras en el ámbito actuarial.

---

<sup>36</sup> Los datos empleados en los experimentos han sido cedidos por la aseguradora MAPFRE en el marco de la Beca de Riesgos y Seguros 2006 que nos concedió su Fundación MAPFRE Estudios.

En la misma línea se ha proseguido la investigación, presentando ahora los resultados de la selección de factores de riesgo con una nueva base de datos de la misma compañía, y una nueva técnica, los árboles de clasificación o decisión.

El Aprendizaje por Árboles de Decisión es una de las herramientas de inferencia inductiva más utilizadas y prácticas de las que abarca la Teoría del Aprendizaje. Se han aplicado con mucho éxito a un amplio abanico de tareas, desde el diagnóstico médico, al estudio de riesgo en la concesión de créditos bancarios. Una de las principales novedades que presentan los árboles es que permiten el tratamiento de datos no numéricos de modo “directo”.

En la base de datos con la que ahora se cuenta aparecen nuevos factores de riesgo, uno de los cuales es el nivel de Bonus Malus. La importancia que este factor tiene para la compañía nos animó a realizar un estudio comparando la selección de los factores incluyendo la variable y sin introducirla en el conjunto de factores, de cara a observar su posible influencia sobre el resto de variables. Contaremos para ello, además de la selección propiamente dicha, con la importancia relativa que asignará el árbol a cada factor en la salida del sistema. Son los resultados de esa experiencia los que presento aquí.

## 2. FORMALIZACIÓN DEL PROBLEMA Y DATOS

Entre los distintos modos de tratar un problema de selección de características, el más frecuente es el siguiente: dado un conjunto de datos del espacio  $\mathbb{R}^n$ , extraer un subconjunto de  $m$  variables ( $m < n$ ) que posean el error de clasificación menor [Weston et al. (2000)]. En este caso, los conjuntos de vectores de  $\mathbb{R}^n$   $\{\mathbf{x}_i\}, i \in \{1, \dots, l\}$  representarán a los asegurados, descritos por un conjunto de factores de riesgo (cada componente de  $\mathbf{x}_i$ ,  $x_{ij}$ , será un factor), de modo que la salida será  $\{y_i\}, i \in \{1, \dots, l\}$   $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$   $m < n$ , con un error de clasificación menor

Para la selección se empleó una muestra de unos 10000 asegurados de la base de datos correspondiente al año 2005, donde los factores de riesgo recogidos eran

- Tipo de Vehículo
- Uso
- Naturaleza
- CV
- Tara
- Plazas
- Código postal
- Nivel BM
- Ámbito
- Acuerdo
- Repara
- Ocasional
- Antigüedad del vehículo
- Edad
- Antigüedad de carnet
- Sexo
- Zona de circulación
- Diesel

De igual modo que se hizo en el anterior experimento [Heras, Bousoño, Tolmos, Santiago, 2007] con los datos de 2003, se procedió a categorizar las variables, generándose dos nuevas bases de datos: una incluyéndose los niveles de Bonus-Malus, y otra sin incluirlos.

Por otro lado, en esta ocasión, al permitirlo los datos que se nos había proporcionado, se tomaron muestras teniendo en cuenta el número de siniestros de cada conductor.

### **3. LOS ÁRBOLES DE CLASIFICACIÓN**

Hablando de forma general, podemos considerar el aprendizaje mediante árboles como un procedimiento para aproximar funciones objetivo valoradas de forma discreta, en los que la función que se va a

aprender se representa por medio de un árbol de decisión. Los árboles de aprendizaje permiten también una segunda representación como conjuntos de reglas if-then (“si-entonces”) para mejorar la legibilidad humana.

Una de las novedades que presentan los árboles es que permiten el tratamiento de datos no numéricos de modo “directo”. En los métodos habituales, incluso en los utilizados hasta ahora para resolver el problema con los datos de 2003, se emplearon datos representados por valores numéricos, reales o discretos, generalmente en forma de vector. Pero, ¿cómo tratar un problema de clasificación en el que los valores que tenemos son nominales (por ejemplo, descripciones discretas)? La dificultad más importante que presenta este tipo de variables, es que, a diferencia de las numéricas, carecen de la noción de similaridad y, aún peor, no existe relación de orden entre ellas. Son lo que se llaman variables categóricas. Un modo bastante usual de tratar este tipo de datos es especificando los valores de un número fijo de propiedades mediante una d-tupla de propiedades, en las que se den los valores nominales que caractericen el objeto. Otra vía es describir la muestra utilizando una cadena de longitud variable con atributos nominales (por ejemplo, AGTTCACGATTCAT representaría un segmento de la cadena de ADN).

Un árbol de decisión o de clasificación, o, sencillamente, árbol, es básicamente un diagrama que representa un sistema de clasificación o un modelo predictivo como el descrito [Breimann 1984]. El árbol se estructura como una secuencia de preguntas sencillas, cuyas respuestas trazan un camino que lleva hacia abajo en el árbol. El (o los) punto final alcanzado (hojas) determina la clasificación o predicción hecha por el modelo, que puede constituir una respuesta tanto cualitativa como cuantitativa. La apariencia gráfica de esa secuencia de preguntas es la de un “árbol”, en el que la primera pregunta se coloca en el primer nodo o raíz, que va uniendo sucesivamente las respuestas con los otros nodos mediante unos conectores que representan las “ramas” del árbol. Los nodos terminales, de los que no parten más ramas, serían las hojas del árbol, en los que, como digo, se recogería la respuesta al problema de clasificación o decisión.

La construcción de árboles se puede ver como un tipo de selección de variables, en el que cuestiones como la interacción entre las variables o las transformaciones monótonas de éstas se manejan automáticamente. Como ya hemos apuntado, se utilizan más frecuentemente como método de clasificación, aunque es posible construir árboles de regresión en los que cada nodo final es un valor predicho. La diferencia entre ambos radica en el tipo de variable dependiente que se utiliza: mientras que en el árbol de clasificación es una variable cualitativa, en el de regresión es cuantitativa.

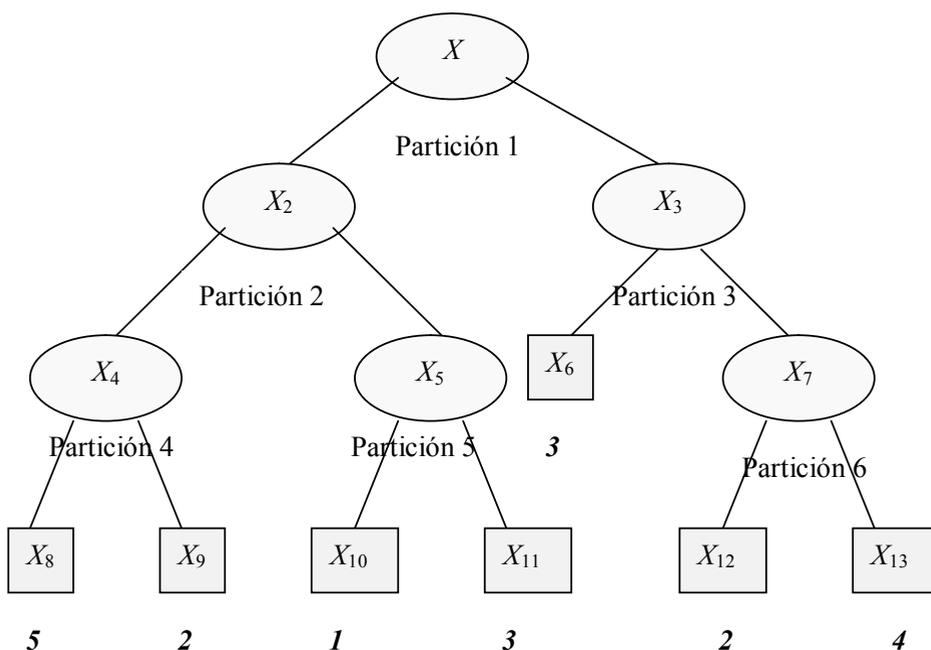
Notemos con  $X$  el espacio muestral de la variable que deseamos clasificar. El objetivo del árbol es determinar una partición del espacio. Los árboles dividen el espacio en rectángulos multidimensionales vía el uso de reglas lógicas binarias<sup>37</sup>. En realidad, un árbol corta el espacio  $X$  en hipercubos más y más pequeños, cada uno de ellos correspondiente a un nodo terminal del árbol.

Dos árboles se pueden comparar en el sentido de que su partición inducida se aproxime en mayor o menor medida a la regla de decisión correcta para el problema. En problemas de tipo lógico el modo más sencillo de comparar particiones es contar el número de errores que se cometen en la clasificación, o bien, si se dispone de una partición a priori de  $X$ , calculando la probabilidad de error.

Pero veamos más detalladamente cuáles son los elementos de un árbol, y cuál sería el proceso intuitivo para construirlo. El siguiente diagrama representaría un árbol binario de 5 clases [Breimann 1984]:

---

<sup>37</sup> La estructura de árboles clasificadores binarios, de los que de cada nodo parten dos únicas ramas, es la más habitual, pero no la única.



Cada división se corresponde con la respuesta a una pregunta formulada. Según ésta, se separan los elementos del conjunto en dos subconjuntos disjuntos<sup>38</sup>, cuya unión es el conjunto del que habían partido. En este ejemplo,  $X = X_2 \cup X_3$  y  $X_2 \cap X_3 = \emptyset$ . Del mismo modo,  $X_2 = X_4 \cup X_5$  y  $X_4 \cap X_5 = \emptyset$ , y  $X_3 = X_6 \cup X_7$  y  $X_6 \cap X_7 = \emptyset$ . Los subconjuntos sin división ulterior, en este caso  $X_6, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}$ , son los subconjuntos o nodos terminales (las hojas del árbol, que decíamos antes). Todos ellos forman una partición del nodo raíz  $X$ . Cada uno de los nodos terminales está señalado con una etiqueta que designa a una clase. Evidentemente, distintos de estos nodos pueden pertenecer a la misma clase, esto es, pueden tener la misma etiqueta. La partición correspondiente al clasificador es la obtenida colocando juntos todas las hojas que pertenecen a la misma clase. Así, en nuestro ejemplo tendríamos:

$$\begin{array}{lll}
 A_1 = X_{10} & A_2 = X_9 \cup X_{12} & A_3 = X_6 \cup X_1 \\
 A_4 = X_{13} & A_5 = X_8 &
 \end{array}$$

<sup>38</sup> Se puede demostrar que todo árbol puede representarse tomando únicamente decisiones binarias.

En problemas de tipo estadístico, la distribución de clases de  $X$  normalmente se solapa, por lo que no constituye realmente una partición que describa completamente tales clases. Para cada celda de la partición se tiene una distribución de probabilidad sobre todas las clases, y la regla de decisión de Bayes escoge aquella clase con mayor probabilidad, que estará relacionada con la idea de minimizar la probabilidad conjunta de clasificar incorrectamente. Por supuesto, no se conoce en la práctica la estructura de la probabilidad completa, pero sí se dispondrá de un conjunto selecto de  $n$  casos clasificados (conjunto de test, como en los otros métodos de aprendizaje) que podemos asumir que constituye una muestra aleatoria e independiente. De este modo podemos estimar la probabilidad de error de clasificación como la proporción de dichos errores en la muestra.

El ejercicio de generación y “cultivo” (crecimiento) de un árbol parte de un conjunto de datos de entrenamiento “etiquetados” sobre el que se ha decidido el conjunto de propiedades que se pueden emplear para discriminar la muestra, aunque debe determinarse de qué modo se organizarán los test sobre el árbol. Lo ideal sería que cada subconjunto en el que se divida una muestra contenga datos con la misma etiqueta. En ese caso, diríamos que ese subconjunto sería “puro”, y podría terminar esa porción del árbol. Sin embargo, lo habitual es que exista una mezcla de etiquetas en cada subconjunto, de manera que en cada rama, habrá de tomar la decisión de seguir dividiendo y hacer que el árbol crezca más, u optar por parar, y aceptar una decisión imperfecta.

Esta idea sugiere un proceso recursivo de crecimiento del árbol bastante obvio: dado un subconjunto de datos representado en cierto nodo, declararlo un nodo terminal (y establecer qué categoría asignarle), o dar otra propiedad para dividir el subconjunto en otros (dos). En realidad, ese es tan sólo un ejemplo de una metodología de crecimiento de árboles mucho más amplia conocida como CART® (classification and regression trees), que es la que se sigue en este experimento.

El proceso general de construcción de un árbol gira en torno a tres elementos:

1. La selección de las reglas de decisión para separar cada nodo. Esto implica un procedimiento de búsqueda de la característica j-ésima que debería usarse en el i-ésimo nodo para realizar la partición de las muestras en los subgrupos.
2. Escoger el umbral  $x_k$  para la característica j-ésima que se debería asignar en el i-ésimo nodo. Un ejemplo de decisión sería  $\{x \in \mathcal{R} : x_j \leq x_k\}$
3. La decisión de cuándo declarar un nodo terminal o continuar dividiéndole. Posteriormente habrá que realizar la asignación de cada hoja a una clase.

La raíz del problema reside en encontrar buenas divisiones y en saber cuándo dejar de separar.

Siguiendo a L. Breimann [Breimann 1984], las particiones se llevan a cabo de manera que la característica j-ésima y el umbral en cierto nodo sean tan “puros” como sea posible. El descenso en la impureza en cada nodo t está medido con una función de impureza  $I(t)$ . Una muy utilizada es la definida por el Criterio de Gini:

$$I(t) = \sum_{i \neq j} p(w_i|t)p(w_j|t)$$

$$p(w_i|t) = N_j(t) / N(t) \tag{5.1}$$

donde  $I(t)$  es la impureza en el nodo t,  $p(w_i|t)$  es una estimación de la distribución de probabilidad sobre  $w_i$ ,  $N_j(t)$  es el número de muestras en la clase  $w_j$  que llevan al nodo t y  $N(t)$  es el número total de muestras en ese nodo.

La función de impureza  $I(t)$  en el nodo t nos permite elegir la partición que minimice la impureza en las dos ramas que conducen hacia los nodos  $t_L$  y  $t_D$  (izquierdo y derecho respectivamente). El descenso en la impureza de la función es,

$$dI(t) \equiv \sum_{i \neq j} p(w_i|t)p(w_j|t) - (I(t_D)p_D + I(t_I)p_I)$$

$$\equiv \sum_{i \neq j} p(w_i|t)p(w_j|t) - \left( \sum_{i \neq j} p(w_i|t_D)p(w_j|t_D)p_D + \sum_{i \neq j} p(w_i|t_I)p(w_j|t_I)p_I \right)$$

Ahora podemos proceder a hacer crecer nuestro árbol mediante el “método de un paso adelante”<sup>39</sup> seleccionando nodos que maximicen el descenso en la impureza sobre nuestras características. El procedimiento descrito arriba puede aplicarse hasta que cada nodo terminal contenga una sola observación, pero a menudo conduce a una sobrealimentación de los datos de entrenamiento y la clasificación no demuestra ser útil. Debe, por tanto, detenerse el proceso de división o podar el árbol hasta que se tengan miembros puros en el sentido que se comentó antes de todas las muestras que lleguen a un nodo pertenezcan a la misma clase) a casi puros de clase. El método más popular de poda es el propuesto por Breimann, que parte de una idea básica: los árboles demasiado grandes (con muchas hojas) conducen a una sobrealimentación del sistema. Por otra parte, la tasa de mala clasificación  $R(t)$  aumentará si el número de hojas es demasiado escaso, por lo que debe buscarse el equilibrio entre ambas premisas.

#### 4. RESULTADOS OBTENIDOS

La selección de factores mediante árboles de clasificación la hemos realizado con los datos correspondientes a la base de datos de la compañía correspondiente al año 2005, como ya advertimos en la Introducción. Conviene recordar que existe un interés añadido en escoger los factores con estos datos, y es el de observar la influencia de la variable “nivel de Bonus Malus”. Por ese motivo, se ejecutaron dos procesos de selección, uno con una muestra que no incluía éste factor, y otro con una que sí lo hacía.

<sup>39</sup> Básicamente consiste en tomar la partición siguiente a una dada de manera óptima pero sin optimizar el conjunto del árbol, lo que evita una explosión combinatoria en cuanto al número de las decisiones futuras a considerar. Eligiendo la medida justa de optimizar en cada corte, podemos facilitar las próximas divisiones.

Las variables más importantes se seleccionaron usando un “Random Forests”<sup>40</sup>. Se trata de una herramienta bastante nueva para el análisis de datos, que realiza una combinación aleatoria de clasificadores débiles (esto es, se escogen muestras y variables aleatoriamente para entrenar cada clasificador). Esos clasificadores suelen ser árboles de decisión, que no tienen influencia unos sobre otros en el momento de ser construidos. La suma de todas las decisiones hechas por los árboles determina la predicción completa del “bosque”. Al escoger variables y muestras de modo aleatorio, es posible obtener la eficacia de cada variable a la hora de separar las clases. Este hecho promediado para todos los árboles, donde las variables se seleccionan, como digo, de manera aleatoria, permite obtener rápidamente una medida de la utilidad de la variable.

La aleatoriedad se presenta de dos modos en el Random Forests; una a nivel de los árboles, y otra al de los nodos. En el caso de los árboles, la aleatorización tiene lugar vía las observaciones. A nivel de los nodos, sin embargo, ocurre empleando un subconjunto de predictores seleccionados aleatoriamente. Se permite crecer a cada árbol hasta un tamaño máximo, sin ejecutar ninguna poda. Se repite este proceso hasta que se crean los árboles que el usuario haya determinado, y a ese conjunto es al que llamamos “bosque aleatorio”. Una vez que lo tenemos, se utilizan las predicciones para cada árbol en un proceso de “votación”. La predicción total se determina votando por clasificación y haciendo una media por regresión. De este modo, para clasificar un objeto nuevo desde un vector de entrada, hacemos “descender” el vector por cada uno de los árboles del bosque. Cada árbol da, como decimos, una clasificación, “vota” por esa clase en concreto. El bosque asignará al objeto la clase más votada.

Por último, en el RF no se precisa del método de validación cruzada que utilizábamos hasta ahora para obtener una estimación insesgada del error del conjunto de Tes. En este caso, se estima internamente, durante la ejecución.

---

<sup>40</sup> Aunque más que un Árbol de Clasificación es una colección de ellos (un bosque), siempre que nos refiramos a esta parte del experimento, lo haremos como a Árbol.

El software utilizado para los árboles es el llamado CART (Classification and Regression Trees). Como ya sabemos, existen varios modos de hacer crecer los árboles de decisión. El que emplea CART es binario, dividiendo cada nodo padre en dos descendientes, colocando preguntas con respuestas si / no en cada nodo de decisión. Además, busca esas preguntas de modo que dividan los nodos en descendientes que sean relativamente homogéneos. Incorpora además un método automático de testeo y validación del árbol.

En nuestro problema, la idea es seleccionar los factores de riesgo que son más discriminativos, esto es que separan mejor los datos en los nodos de los árboles. Para medir la importancia de una variable se permutan sus valores y se mira cuánto error más se comete por no usar los valores “buenos”. Si el error al colocar los valores erróneos en un factor es grande, ese factor será seleccionado. De este modo, se van tomando decisiones en el árbol de modo que en cada nodo del árbol se decide con una variable.

Los resultados que se obtuvieron son los que se muestran a continuación. Junto al factor seleccionado aparece un valor numérico que indica la importancia relativa que asigna el RF a esa variable.

#### Sin nivel de Bonus Malus

BARCELONA	45.8380
ANTVE	31.2240
ámbito8 (Interurbano)	30.8260
ámbito9 (Urbano)	28.2190
CARNET	27.5340
uso1 (Particular)	27.5140
TIPO9 (Turismo)	23.8380
EDAD	22.1510
TARA	21.4760
ámbito10 (Regional)	20.0310
ARAGÓN	18.5590
ANDALUCÍA	16.1720
tipo13 (FURGONETA)	15.9550
CV	13.9670
DIESEL	13.9080

CASTILLA Y LEÓN	13.5800
PLAZAS	10.9120
Privado	10.0080
CATALUÑA	9.2500
uso19 (RENTING)	8.9560
uso7 (TRANSPORTE)	8.7900
GALICIA	8.3710
tipo14 (furgoneta combi)	7.1480
ASTURIAS	4.4950
COM VALENCIANA	1.9270

### Con nivel de Bonus Malus

B 109	107.8240
CARNET	65.4550
BARCELONA	48.2820
EDAD	48.1710
ámbito 8 (Interurbano)	47.1090
ANTVEHÍ	43.1090
B 116	42.5970
TARA	42.3360
ámbito 9 (Urbano)	41.3570
uso 1 (Particular)	38.4670
TIPO 9 (Turismo)	36.8170
ámbito 10 (Regional)	29.3960
B 110	28.5630
tipo 13 (FURGONETA)	27.9960
ANDALUCÍA	25.7540
PLAZAS	25.2830
B 119	23.8490
B 121	23.1880
CV	22.9840
GALICIA	21.2720
ARAGÓN	20.8040
CATALUÑA	20.4460
DIESEL	19.7060
B 36	17.7030
B 120	17.0260
B 118	16.5940
B 56	16.2080
uso 19 (RENTING)	15.8140
tipo 14 (furgoneta combi)	14.7140
B 113	11.4270

Es interesante observar la importancia de los factores de riesgo representados por los niveles de BM (Tabla 1). En concreto, el primer factor seleccionado (B109) se corresponde con el nivel de BM de máxima bonificación, en el que se encuentran, probablemente, los mejores conductores. La importancia relativa asignada por el árbol a dicho factor (107.8240) se encuentra, además, a gran distancia de las asignadas a los restantes factores (el siguiente factor en importancia, la antigüedad de carnet, tiene asociado el valor 65.4550). Resalta asimismo el hecho de que gran parte de los restantes niveles de BM han resultado seleccionados asimismo como factores relevantes del riesgo. El resto de los factores seleccionados son los “esperados”, la antigüedad del carnet, del vehículo, la edad, y provincias como Barcelona, etc. Coinciden además en su mayor parte con los seleccionados en el caso de no incluir el BM como variable. Resultan desplazados algunos factores provincias, y el USO 7. Estos hechos nos permiten resaltar la importancia del nivel de BM como factor de riesgo en la tarificación a priori y sugieren interesantes relaciones entre ambos tipos de tarificación a priori y a posteriori.

**Tabla 1**  
Niveles de Bonus Malus considerados por la Compañía

Nivel 1	071 & 109 & 089 & <missing>
Nivel 2	006 & 012 & 045 & 072 & 110 & 024 & 055
Nivel 3	007 & 013 & 044 & 073 & 111 & 025 & 056
Nivel 4	001 & 008 & 014 & 043 & 078 & 112 & 026 & 057
Nivel 5	015 & 027 & 041 & 079 & 113 & 058
Nivel 6	002 & 009 & 016 & 028 & 040 & 080 & 099 & 114 & 059
Nivel 7	003 & 004 & 017 & 029 & 039 & 081 & 115 & 061
Nivel 8	005 & 011 & 018 & 037 & 082 & 116 & 030 & 062
Nivel 9	019 & 088 & 117 & 031
Nivel 10	020 & 084 & 118 & 032
Nivel 11	021 & 119 & 085 & 034 & 085
Nivel 12	022 & 086 & 120 & 049
Nivel 13	023 & 121 & 087
Nivel Especifico Flotas	36

## 5. CONCLUSIONES

Se ha llevado a cabo una selección de los factores de riesgo que tienen la mayor cantidad de información de una cartera de clientes de una empresa del seguro del automóvil. Para ello se ha utilizado una técnica innovadora en este tipo de cuestiones, los árboles de clasificación (RANDOM FOREST).

Con el objeto de estudiar la influencia del factor “Nivel de Bonus Malus”, se realizaron dos selecciones, una sin incluir esa variable, y otra en la que sí se introducía. Al observar las dos selecciones se puede concluir que el nivel de Bonus Malus es un factor de riesgo relevante, con una importancia relativa que supera a factores considerados habitualmente con más riesgo de siniestralidad como pueden ser la antigüedad del carnet o del vehículo, o conducir en la ciudad de Barcelona, lugar con más siniestralidad de los presentes en la base de datos utilizada.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boj del Val E., Claramunt Bielsa M.M., Fortiana Gregori J. Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación Cuadernos de la Fundación MAPFRE Estudios, N°. 88 2004

Bousoño Calzón, Heras Martínez, Tolmos Rodríguez-Piñero Factores de Riesgo y Cálculo de primas mediante Técnicas de Aprendizaje FUNDACIÓN MAPFRE, Madrid, Junio 2008 .

Breiman L., Friedman, J.H., Olshen, R.A., Stone, C.J.. Classification and regression trees, Chapman & Hall/CRC 1984

Brockett, P.L., Xiaohua Xia and Derring, R. A. "Using Kohonen's Self-Organizing Feature Map to Uncover Automobile Bodily Injury Claims Fraud". Journal of Risk and Insurance, Vol. 65, No 2, (1998) 245.

Burges, C. J.: "A tutorial on Support Vector Machines for pattern recognition", Knowledge Discovery and Data Mining, 2(2) (1998):121-167  
Cortes C., Vapnik V. Support Vector Networks. Machine Learning, 20. 273-297, 1995.

Salcedo-Sanz, S., Fernández-Villacañas, J. L., Segovia-Vargas, M. J. and Bousoño-Calzón, C. "Genetic programming for the prediction of insolvency in non-life insurance companies", Computers & Operations Research. 2002.

Sanchis, A., Gil, J. A., and Heras, A.: "El análisis discriminante en la previsión de la insolvencia en la empresa de seguros no-vida", Revista Española de Financiación y Contabilidad 115 2003.

Scholkopf B, Smola A. Learning with kernels. Cambridge, MA: MIT Press; 2002.

Shapiro, A. Soft Computing Applications in Actuarial Science. ARCH. 2001. <http://www.soa.org:80/library/arch/2000-09/arch01v113.pdf>

Shapiro, A. The merging of Neural Networks, fuzzy logic and genetic algorithms. 2002, Insurance: Mathematics and Economics 31 115-131  
2002

Segovia-Vargas MJ, Salcedo-Sanz S, Bousoño-Calzón C. Prediction of insolvency in non-life insurance companies using Support Vector Machines and genetic algorithms. In: Proceedings of X SIGEF Congress in Emergent Solutions for the Information and Knowledge Economy, León, Spain, 2004

Tolmos, P. Molero J.J., Sevillano F. J. The use of a Neural Network in the prediction of the IBEX-35 stock index. Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Meeting on Artificial Intelligence And Emerging Technologies in Accounting, Finance and Taxation. Huelva, 2000.

Tolmos, P. Selección de factores de riesgo y predicción de siniestros en el seguro del automóvil mediante métodos de aprendizaje máquina. Tesis doctoral, Universidad Rey Juan Carlos, España. 2007

Vapnick, V., Cortes, C. Support-Vector Networks.. Machine Learning, 20, (1995) 273-297

Weston, H., Mukherjee, S., Chapelle, O., Pontil, M., Poggio, T., and Vapnik, V.: Feature Selection for SVMs, Advances in NIPS 12, MIT Press, 526-532. 2000



### **III. GESTIÓN DE RIESGOS**



## Ponencia 21

### VALORACIÓN Y COBERTURA DE DERIVADOS DE VOLATILIDAD

Raquel Balbás Aparicio

#### RESUMEN

Los derivados de varianza, volatilidad y correlación (derivados de volatilidad) están siendo cada vez más negociados ya que estos instrumentos nos permiten nuevas oportunidades de diversificación de riesgos y, como señala la evidencia empírica, proporcionan coberturas muy adecuadas cuando nos enfrentamos a situaciones de inestabilidad en los mercados. Además, los *hedge funds* y otros inversores amantes del riesgo normalmente venden estos productos debido a su elevada prima de riesgo. Hay dos tipos de enfoques que se pueden utilizar para valorar y cubrir derivados de volatilidad. El primero hace uso de un modelo completo de volatilidad estocástica, por ejemplo el modelo de Heston, y el segundo utiliza carteras de réplica compuestas por infinitas opciones. Este último tiene la ventaja de que la mayoría de las opciones pueden negociarse en el mercado real. De modo que tenemos un precio de mercado, incluso con los costes de transacción generados por la clásica horquilla de precios. Sin embargo, en la práctica es imposible utilizar infinitas opciones, lo cual genera errores de cobertura. Este artículo trata con este tipo de réplicas y proporciona aproximaciones óptimas compuestas únicamente por un número finito de opciones, proporcionando una horquilla de precios alternativa para el derivado de volatilidad así como una estrategia de cobertura dinámica. Utilizamos funciones generales de riesgo (medidas coherentes o acotadas por la media, medidas de desviación, etc.) para construir tanto la cartera de cobertura como la horquilla de precios del derivado de volatilidad.

**Palabras clave:** Derivado de volatilidad, cartera de pseudo-réplica, medida de riesgo, optimización de riesgos.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los derivados de varianza y volatilidad se están convirtiendo en activos por los que hay un interés creciente en los mercados de capitales. Su rendimiento no depende de si estamos en épocas alcistas o bajistas, sino que se relaciona con la velocidad a la que se producen los cambios de precios en los mercados. Esto ha hecho que sean instrumentos muy interesantes a la hora de diversificar carteras. Así, mientras la evidencia empírica pone de manifiesto que los distintos índices regionales o sectoriales muestran un altísimo grado de correlación, especialmente cuando “las cosas van mal”, que es cuando la diversificación debería ser más eficaz, los derivados de volatilidad tienen correlación muy baja con estos índices, y además, esta correlación es negativa, lo que compensa posibles pérdidas en los mercados de contado. Por consiguiente, son un buen vehículo de diversificación de riesgos.

Además, la correlación negativa aludida ha hecho que numerosos inversores los compren para “salvarse” de las épocas bajistas. Empíricamente se ha observado que este hecho ha provocado primas usualmente altas, es decir, los vendedores de varianza o volatilidad suelen “ganar casi siempre” y “perder con muy poca frecuencia” (Demeterfi *et al.*, 1999). Aprovechando este hecho, muchos *Hedge Funds* han tomado posiciones vendedoras en los últimos años, pero asumen un fuerte riesgo de asimetría. En efecto, nuevamente la experiencia muestra que las pérdidas, aunque poco frecuentes, suelen ser mucho mayores que las habituales ganancias (Demeterfi *et al.*, 1999).

Todo lo anterior justifica el interés creciente que estos derivados han despertado entre los inversores. El volumen de contratación ha crecido de forma permanente, llegando a los 30 o 35 millones de nominal en 2008 (Broadie y Jain, 2008). Estos activos se empezaron a negociar en mercados organizados hace aproximadamente 2 años cuando el CBOE (*Chicago Board Option Exchange*) comenzó a comercializar

el VIX (sobre el *SP500*), el VXD (sobre el *Dow Jones Industrial Average*) y el VXN (sobre el *NASDAQ100*) entre otros. También se han creado Fondos de Volatilidad y Varianza, como por ejemplo el *European Strategic Fund* que únicamente trata con derivados de volatilidad, principalmente sobre índices europeos.

La asimetría de rendimientos provoca la necesidad de cubrir las posiciones vendedoras (y compradoras), lo que conduce a la conveniencia de modelos de valoración apropiados. Esto ha hecho despertar también el interés de los investigadores teóricos. Así, Carr y Madam (1998) ya dan métodos de valoración bajo supuestos simples. Mucho más compleja es la metodología propuesta en Carr *et al.* (2005) o Carr y Wu (2006), donde se utilizan varios modelos de volatilidad estocástica. Una de las conclusiones importantes de todos estos análisis es la sensibilidad que precio teórico y estrategia de cobertura tienen al modelo de valoración utilizado, así como a los parámetros estimados para el modelo (véase Moskowitz, 2003).

Un método alternativo es la utilización de “carteras réplicas compuestas por infinitas opciones europeas”, propuesto por Demeterfi *et al.* (1999), quienes se basaron en ideas previas de Neuberger (1994), que no estudió derivados de volatilidad pero sí réplicas de la función logaritmo con infinitas opciones europeas. Demeterfi *et al.* (1999) probaron que el *swap* de varianza se puede replicar y cubrir con infinitas opciones europeas. El método es altamente interesante, pues las opciones europeas son fáciles de encontrar en el mercado, y, al tener precio disponible, generan un precio de mercado y una estrategia de cobertura del *swap* de varianza que sólo usa datos de mercado, y, por consiguiente, es independiente de cualquier modelo teórico de valoración.

Demeterfi *et al.* (1999) muestran cómo usar su metodología en la práctica, si bien, no miden adecuadamente el error que se comete al negociar sólo con un número finito de opciones. Es obvio que en la práctica no puede haber carteras que incorporen infinitos activos.

La metodología de Demeterfi *et al.* (1999) se ha combinado con frecuencia con la fórmula de Black y Scholes y el efecto “sonrisa de la

volatilidad” (Carr y Lee, 2007), de forma que se puedan incorporar opciones sintéticas en la cartera réplica si el error se considera excesivo. Pero sigue sin tenerse un criterio de error claro, y la simple interpolación de opciones puede distorsionar sensiblemente los datos de mercado, especialmente, cuando esta sonrisa es muy pronunciada (esto pasa, véase Branger y Schlag, 2004). Por tanto, la mayor ventaja del método, la independencia del modelo y la sola dependencia del mercado, parece desvanecerse ligeramente.

Broadie y Jain (2008) parecen ser los primeros en utilizar un criterio objetivo para medir el error. Para tal fin usan la desviación típica de la diferencia de la rentabilidad de la cartera de opciones europeas y la rentabilidad del *swap* de varianza. Además, Broadie y Jain (2008) dan un segundo paso importante al usar también una cartera con infinitas opciones para replicar el *swap* de volatilidad. En este caso, no obstante, asumen el modelo de Heston con volatilidad estocástica para explicar el comportamiento del subyacente.

El enfoque de Broadie y Jain (2008) presenta dos contribuciones importantes, ya que extiende el análisis a otro activo y mide el error, pero tiene todavía inconvenientes. Como se ha dicho, los derivados de volatilidad muestran fuerte asimetría, con lo que la desviación típica es poco apropiada para medir errores (no es compatible con la dominancia estocástica de segundo orden, Ogryczak y Ruszczyński, 1999). Además, la desviación típica no da el error en términos monetarios, y su medida acotada por la media asociada, que sí lo hace, no es coherente (Rockafellar, *et al.*, 2006).

En este trabajo nos proponemos utilizar las teorías desarrolladas en Balbás *et al.* (2009a) y, especialmente, en Balbás *et al.* (2009b), de forma que podamos valorar y cubrir derivados de volatilidad con un número finito de opciones, minimizando el error cometido mediante medidas de riesgo coherentes, acotadas por la media, y compatibles con la dominancia estocástica. Además, ampliaremos la gama de derivados a los que se aplicará la metodología, y, como novedades adicionales, utilizaremos también opciones digitales europeas y consideraremos los costes de transacción, que pueden ser altos incluso en los mercados tradicionales de opciones.

En la sección siguiente veremos cómo replicar cualquier pago final mediante una cartera estática de infinitas opciones digitales y europeas. En la tercera se describirán los derivados de volatilidad, varianza y covarianza más habituales, y en la cuarta veremos cómo éstos se pueden replicar o aproximar mediante opciones digitales y europeas. La quinta sección será para hacer ver cómo la metodología es útil aunque haya sólo un número finito de opciones y se incorporen los costes de transacción. En efecto, la metodología de valoración y cobertura de Balbás *et al.* (2009b) puede aplicarse perfectamente, y permite minimizar el efecto de los inconvenientes mencionados. La última sección presenta las conclusiones más importantes de este trabajo.

## 2. RÉPLICA DE UN PAGO ARBITRARIO

En esta sección consideraremos un modelo de un periodo con dos fechas de negociación,  $t = 0$  (momento actual) and  $t = T$  (momento futuro arbitrario).  $r_t$  será el tipo libre de riesgo entre  $0$  y  $T$ , lo cual implica que  $e^{r_f T}$  ( $e^{-r_f T}$ ) será el factor de capitalización (descuento) para el intervalo de tiempo  $[0, T]$ . Si denotamos el precio de un activo por  $S$  entonces un subíndice  $t$  indicará cuando estamos valorando ese precio. Así,  $S_0$  representará su precio actual (numérico) mientras  $S_T$  es el precio (aleatorio) en  $T$ , y se podrían utilizar notaciones similares si reemplazáramos  $S$  por un símbolo diferente.

Construiremos combinaciones de opciones Europeas y/o Digitales que replican pagos finales arbitrarios (en  $T$ ). Es importante recordar que una *Call* (*Put*) Europea paga la cantidad  $C_T(k) = (S_T - k)_+$  ( $P_T(k) = (k - S_T)_+$ ) en la fecha de vencimiento  $T$ , siendo  $S_T$  el precio final del activo subyacente y  $k$  el precio de ejercicio de la opción<sup>41</sup>. De forma similar, una *Call* Digital pagará

$$D_T(k) = \begin{cases} 1, & S_T \geq k \\ 0, & S_T < k \end{cases},$$

---

<sup>41</sup> De ahora en adelante denotaremos  $x_+ = \text{Max}\{x, 0\}$  para cada  $x \in \mathbf{R}$ .

mientras el pago de una *Put* Digital análoga será  $1 - D_T(k)$ . En general, asumiremos que la distribución final de la variable aleatoria  $S_T$  es conocida, y dado el conjunto  $A \subset \mathbf{R}$ , la expresión  $\mu(S_T \in A)$  denotará la probabilidad del suceso  $S_T \in A$ .

En primer lugar, necesitaremos dos lemas instrumentales.

### Teorema 1.

Sean  $a, b \in \mathbf{R}$ , y  $g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  una función continua tal que su primera derivada  $g'$  existe en  $(a, b)$ .

$$g(S) = g(a) + \int_a^S g'(k) dk \quad (1)$$

a) se verifica para cada  $S \in [a, b]$ .

b) Supongamos además que la segunda derivada  $g''$  existe en  $(a, b)$  y  $g'$  puede ser extendida a una función continua en  $[a, b]$ . Entonces,

$$g(S) = (g(h) - hg'(h)) + Sg'(h) + \int_S^h g''(k)(k - S) dk \quad (2)$$

se verifica para cada  $S, h \in [a, b]$ .

*Demostración.* El enunciado a) es bien conocido en el Cálculo habitual, de modo que probaremos sólo b). Sean  $S, h \in [a, b]$  y asumamos  $S < h$ .<sup>42</sup> Si integramos por partes tenemos:

$$\begin{aligned} \int_S^h g''(k)(k - S) dk &= \int_S^h k g''(k) dk - S \int_S^h g''(k) dk \\ &= k g'(k) \Big|_{k=S}^{k=h} - \int_S^h g'(k) dk - S \int_S^h g''(k) dk \\ &= h g'(h) - S g'(S) - g(h) + g(S) - S(g'(h) - g'(S)) \\ &= g(S) - S g'(h) + (h g'(h) - g(h)), \end{aligned}$$

y la prueba queda completada. □

<sup>42</sup> Todo sería absolutamente similar si  $S > h$ .

## Teorema 2.

Sean  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, b_i > a_i, i = 1, 2$ , y  $g: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbf{R}$

una función continua. Supongamos que las derivadas parciales de primer y segundo orden de  $g$  existen en  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$  y las de primer orden pueden ser extendidas a funciones continuas en  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ .

$$\text{Entonces, } g(S_1, S_2) = g(a_1, a_2) + \int_{a_1}^{S_1} \int_{a_2}^{S_2} \frac{\partial^2 g}{\partial k_1 \partial k_2} dk_1 dk_2$$

se verifica para cada  $(S_1, S_2) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ .

*Demostración.*

Omitimos la prueba ya que el resultado es bien conocido.  $\square$

Los lemas anteriores nos permiten varias formas de replicar sintéticamente un derivado arbitrario utilizando Opciones *Call* y *Put* Digitales y/o Europeas.

## Teorema 3.

Sean  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  y  $g: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  una función arbitraria tal que  $g$  y su primera derivada existen y son continuas fuera de un conjunto finito  $D = \{d_1 < d_2 < \dots < d_m\} \subset (a, b)$ . Supongamos que  $g$  puede ser extendida a otra función continua en  $(a, d_1]$ , y la misma propiedad se cumple si  $(a, d_1]$  es reemplazado por  $[d_i, d_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Denotemos por  $J_i$  el salto de  $g$  en  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Entonces, si  $h \in (a, b)$ ,  $h \leq d_1$  y  $S_T$  es un precio (aleatorio) en  $T$

tal que  $\mu(S_T \in (a, b)) = 1, \mu(S_T \in D \cup \{h\}) = 0$

el pago final  $g(S_T)$  puede ser replicado de la siguiente forma:

- i) Invirtiendo  $g(h)^- e^{-r_f T}$  euros en el activo sin riesgo.<sup>43</sup>
- ii) Comprando  $J_i$  Calls Digitales con precio de ejercicio  $d_i, i = 1, 2, \dots, m$ .
- iii) Comprando  $g'(k)dk$  Calls Digitales para cada precio de ejercicio  $k \in (a, b) \setminus D, k > h$ .<sup>44</sup>
- iv) Vendiendo  $g'(k)dk$  Puts Digitales para cada precio de ejercicio  $k \in (a, b) \setminus D, k > h$ .<sup>45</sup>

### Demostración.

Si el precio final del activo subyacente es  $S_T < h$ , entonces el Lema 1 implica que

$$g(S_T) = g(h)^- - \int_{S_T}^h g'(k)dk$$

que claramente indica que la cartera propuesta paga  $g(S_T)$  euros en  $T$ .

Además, si  $S_T > h$ ,  $S_T \notin D$  y  $D$  tiene intersección vacía con  $(h, S_T]$ , entonces, teniendo en cuenta el Lema 1, la cartera propuesta pagará

$$g(h)^+ + \int_h^{S_T} g'(k)dk = g(S_T)$$

lo que conduce obviamente a

$$g(h)^- + J_h + \int_h^{S_T} g'(k)dk = g(S_T)$$

donde  $J_h$  es el salto de  $g$  en  $h$  (que puede ser nulo). De forma similar, si existe un único  $d \in (h, S_T] \cap D$  tenemos

<sup>43</sup> De ahora en adelante el superíndice - (+) indicará que estamos calculando el límite por la izquierda (derecha).

<sup>44</sup> Como viene siendo habitual, si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos entonces  $A \setminus B$  será el conjunto compuesto por aquellos elementos en  $A$  que no pertenecen a  $B$ .

<sup>45</sup> Como la posterior observación 1 señalará, el supuesto  $h \leq d_1, h \leq d_2$  se puede cambiar por uno más débil.

$$g(S_T) = \int_d^{S_T} g'(k)dk + J_d + \int_h^d g'(k)dk + g(h)^- + J_h =$$

$$\int_h^{S_T} g'(k)dk + J_d + g(h)^- + J_h$$

donde  $J_d$  denota el salto de  $g$  en  $d$ . Por inducción, la cartera propuesta paga  $g(S_T)g(S_T)$  en la fecha de vencimiento  $T$ , independientemente del número de discontinuidades dentro del intervalo  $(h, S_T]. (h, S_T]$ .  $\square$

#### Teorema 4

Sean  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  y  $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una función arbitraria tal que  $g$  y su primera y segunda derivadas  $g'$  y  $g''$  existen y son continuas fuera de un único elemento  $d \in (a, b)$ . Supongamos que  $g$  y  $g'$  pueden extenderse y convertirse en continuas en  $(a, d]$ , y la misma propiedad se verifica si reemplazamos  $(a, d]$ , por  $[d, b)$ . Denotamos por  $J_d$  y  $J'_d$  los saltos de  $g$  y  $g'$  en  $d$ . Entonces, si  $S_T$  es un precio (aleatorio) en  $T$  tal que

$$\mu(S_T \in (a, b)) = 1, \mu(S_T = d) = 0$$

el pago final  $g(S_T)$  puede ser replicado mediante:

- i) La inversión de  $(g(d)^- - hg'(d)^-)e^{-r_f T}$  euros en el activo sin riesgo.
- ii) Comprando  $g'(d)^-$  unidades del activo subyacente.
- iii) Comprando  $g''(k)dk$  Puts Europeas con precio de ejercicio  $k$  para cada  $k \in (a, d)$ .
- iv) Comprando  $g''(k)dk$  Calls Europeas con precio de ejercicio  $k$  para cada  $k \in (d, b)$ .
- v) Comprando  $J'_d$  Calls Europeas con precio de ejercicio  $d$ .

vi) Comprando  $I_d$  Calls Digitales con precio de ejercicio  $d$ .

**Demostración.** En primer lugar vamos a asumir que  $S_T < d$ . Así (2) nos lleva a

$$g(S_T) = (g(d)^- - dg'(d)^-) + S_T g'(d)^- + \int_{S_T}^d g''(k)(k - S_T) dk,$$

lo cual indica claramente que la estrategia propuesta paga la cantidad final  $g(S_T)$ . Además, para  $S_T > d$  (2) nos lleva a

$$\begin{aligned} g(S_T) &= (g(d)^+ - dg'(d)^+) + S_T g'(d)^+ + \int_d^{S_T} g''(k)(S_T - k) dk \\ &= (g(d)^- - dg'(d)^-) + (J_d - dJ'_d) + S_T g'(d)^- + J'_d(S_T - d) + dJ'_d + \int_d^{S_T} g''(k)(S_T - k) dk, \end{aligned}$$

y la estrategia propuesta paga de nuevo  $g(S_T)$ . □

**Observación 1.** Los Teoremas 3 y 4 se podrían extender fácilmente si fuera necesario. En particular, la condición  $h \leq d_1$  del Teorema 3 puede ser sustituida por  $h \geq d_m$  en cuyo caso la cantidad a invertir en el activo sin riesgo sería  $g(h)^+ e^{-rfT}$ , y la segunda parte de la estrategia de réplica debe sustituirse por la venta  $J$  Puts Digitales. Análogamente,  $h$  debe estar dentro del intervalo  $(d_1, d_m)$ , en cuyo caso la estrategia de réplica necesitaría algunas modificaciones.

Respecto al Teorema 4, el número de discontinuidades puede ser mayor que uno, aunque la estrategia de réplica sería entonces un poco más complicada. En efecto, supongamos por ejemplo que  $h$  av dos discontinuidades  $d_1 < d_2$  de  $g$ . Tomemos por ejemplo  $h \in (d_1, d_2)$  y, utilizando notaciones obvias, consideremos

$$g^*(S) = \begin{cases} g(S) + J_1 + J'_1(S - d_1), & S < d_1 \\ g(S), & d_1 < S < d_2 \\ g(S) - J_2 - J'_2(S - d_2), & S > d_2 \end{cases}$$

Así el Teorema 4 se podría aplicar a  $g^*$  siempre que  $g^*$  fuera dos veces continuamente diferenciable, en cuyo caso  $g$  puede ser replicada

también con una cartera de opciones Europeas y Digitales ya que la diferencia entre  $g$  y  $g^*$  es exactamente dos *Calls* y/o *Puts* Digitales más dos Europeas. Más aún, si  $g^*$  es una pero no dos veces continuamente diferenciable, entonces podría modificarse añadiendo polinomios de segundo grado adecuados. Se podrían aplicar argumentos análogos si el número de discontinuidades de  $g$  fuera mayor que dos. □

### 3. DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS DERIVADOS DE VARIANZA Y VOLATILIDAD

#### 3.1 Swaps de Varianza y Volatilidad

Consideremos un conjunto finito de fechas de negociación

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

La varianza realizada en  $[0, T]$  es igual a

$$\widehat{W}^T(n) = \frac{1}{n(\Delta T)} \sum_{i=1}^n r_i^2, \quad (3)$$

donde:  $r_i^2 = L\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right),$

y  $\Delta t = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$ . Análogamente, la volatilidad realizada se representa como la raíz cuadrada de la expresión anterior, es decir,

$$\widehat{V}^T(n) = \sqrt{\frac{1}{n(\Delta T)} \sum_{i=1}^n r_i^2}. \quad (4)$$

En general, si :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dz \quad (5)$$

es un Movimiento Browniano que refleja la evolución del activo subyacente, entonces la varianza realizada en  $[0, T]$  se define como siguiente la integral estocástica

$$\widehat{W}^T = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(S_t, t) dt, \quad (6)$$

y la volatilidad realizada es la raíz cuadrada de la expresión anterior,

$$\widehat{V}^T = \sqrt{\widehat{W}^T}. \quad (7)$$

Se puede probar que

$$\lim_{(\Delta t \rightarrow 0)} \widehat{W}^T(n) = \widehat{W}^T, \quad (8)$$

donde se puede garantizar, al menos, la convergencia en probabilidad (véase Broadie y Jain, 2008, entre otros). En consecuencia, en la práctica los mercados financieros utilizan (3) y (4) como estimaciones de (6) y (7). Para tener valores bajos de  $(\Delta t)$  el mercado normalmente recurre a datos diarios, es decir,

$$(\Delta t) = \frac{1}{252}.$$

Una posición larga en un *Swap* de varianza implica el pago de un precio (numérico)  $\widehat{W}_0^T$  en  $t = 0$ , y a cambio se recibe la cantidad aleatoria  $\Phi \widehat{W}^T(n)$  en  $t=T$ , siendo  $\Phi > 0$  un valor nominal conocido por los agentes. Análogamente, el comprador de un *Swap* de Volatilidad debe pagar  $\widehat{V}_0^T$  en  $t = 0$  y recibir el pago aleatorio  $\widehat{\Phi} \widehat{V}^T(n)$  en  $t = T$ .<sup>46</sup>

En la próxima sección proporcionaremos fórmulas para valorar y cubrir ambos activos.

<sup>46</sup> En realidad, el precio inicial (numérico) de un *Swap* de Varianza o Volatilidad se paga normalmente en  $t = T$  también, pero nosotros no vamos a considerar esta situación. En cualquier caso, la diferencia entre los dos escenarios no es relevante ya que en el segundo caso el precio teórico sería obviamente igual al precio en el primer caso multiplicado por el factor de capitalización  $e^{rfT}$ . Análogamente, la estrategia de réplica sería casi idéntica en ambos casos.

Comentarios similares serían pertinentes si utilizáramos Futuros u Opciones sobre *Swaps* de Varianza y *Swaps* de Covarianza.

### 3.2 Futuros y Opciones sobre Swaps de Varianza

Una posición larga en un Futuro sobre Swap de Varianza con vencimientos en  $T_1 < T_2$  implica aceptar en  $t = 0$  el compromiso de comprar un Swap de Varianza en  $T_1$  con vencimiento en  $T_2$ .

Consideremos las fechas de negociación

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T_1 < t_{k+1} < \dots < t_{k+h} = T_2$$

Con  $\Delta t = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \dots, k + h$ .

Entonces 
$$\widehat{W}^{T_2}(k + h) = \frac{1}{(k + h)(\Delta t)} \sum_{i=1}^{k+h} r_i^2,$$

$$\widehat{W}^{T_1}(k) = \frac{1}{k(\Delta t)} \sum_{i=1}^k r_i^2$$

y

$$\widehat{W}^{I(T_1, T_2)}(h) = \frac{1}{h(\Delta t)} \sum_{i=k+1}^{k+h} r_i^2$$

De donde,  $(k + h)\widehat{W}^{T_2}(k + h) = k\widehat{W}^{T_1}(k) + h\widehat{W}^{I(T_1, T_2)}(h),$

lo cual conduce a 
$$\widehat{W}^{I(T_1, T_2)}(h) = \frac{k + h}{h}\widehat{W}^{T_2}(k + h) - \frac{k}{h}\widehat{W}^{T_1}(k).$$

como  $\frac{k + h}{h} = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$  y  $\frac{k}{h} = \frac{T_1}{T_2 - T_1},$

tenemos 
$$\widehat{W}^{I(T_1, T_2)}(h) = \frac{T_2}{T_2 - T_1}\widehat{W}^{T_2}(k + h) - \frac{T_1}{T_2 - T_1}\widehat{W}^{T_1}(k).$$

Por tanto, si multiplicamos por  $\Phi$  a ambos lados de la anterior igualdad, y tenemos en cuenta que el futuro será pagado en  $T_1$ , acabamos de probar que:

## Teorema 5.

El Futuro sobre *Swap* de Varianza con vencimientos en  $T_1$  y  $T_2$  se replica mediante la compra de  $\frac{T_2}{T_2 - T_1}$  *Swaps* de Varianza con vencimiento en  $T_2$ , la venta de  $\frac{T_1}{T_2 - T_1}$  *Swaps* de Varianza con vencimiento en  $T_1$  y tomando prestado el precio de la estrategia anterior durante el intervalo de tiempo  $[0, T_1]$ . Por consiguiente, el precio de un Futuro sobre *Swap* de Varianza viene dado por

$$\widehat{W}_0^{(T_1, T_2)} = \left( \frac{T_2}{T_2 - T_1} \widehat{W}_0^{T_2} - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \widehat{W}_0^{T_1} \right) e^{r_f T_1}, \quad (9)$$

$$o \quad e^{r_f T_2} \widehat{W}_0^{(T_1, T_2)} \quad \text{si el activo se paga en } t = T_2.$$

Una Opción sobre *Swap* de Varianza se puede introducir de distintas formas que no son equivalentes, aunque todas ellas son bastante análogas desde un punto de vista teórico y no hay diferencias significativas entre las aproximaciones que nos permiten valorarlas y cubrirlas. En cualquier caso, debemos fijar las características de la opción que vamos a tratar. Así, consideraremos que el comprador de una *Call* (*Put*) Europea sobre *Swap* de Varianza con vencimientos en  $T_1 < T_2$  tiene el derecho (no la obligación) de comprar (vender) un *Swap* de varianza en  $T_1$  con vencimiento en  $T_2$ , y a cambio pagará (recibirá) el precio de ejercicio  $E$ . El precio de la opción se paga en  $t = 0$ , mientras que el precio de ejercicio se paga en  $T_1$ . Las relaciones entre todos los parámetros involucrados serán dadas en la próxima sección.

### 3.3 Swaps de Covarianza

Consideremos un conjunto finito de fechas de negociación

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T.$$

Consideremos también dos activos subyacente cuyos procesos de precios vendrán denotados por  $S_t$  y  $\bar{S}_t$ . Su covarianza realizada en  $[0, T]$  viene dada por

$$\hat{C}^T(n) = \frac{1}{n(\Delta t)} \sum_{i=1}^n r_i \bar{r}_i .$$

donde  $\bar{r}_i = L\left(\frac{\bar{S}_{t_i}}{\bar{S}_{t_{i-1}}}\right)$ . El comprador de un *Swap* de Covarianza con vencimiento en  $T$  pagará en  $t = 0$  el precio numérico  $\hat{C}_0^T$ , y recibirá el pago aleatorio  $\Phi \hat{C}^T(n)$  at  $t = T$ .

De nuevo, en la siguiente sección trataremos temas de valoración y cobertura para *Swaps* de Covarianza.

#### 4. VALORACIÓN Y COBERTURA DE DERIVADOS DE VARIANZA, COVARIANZA Y VOLATILIDAD

Durante toda esta sección haremos uso de las funciones

$$g_1(x) = (x - 1) - L(x)$$

$$y,^{47} \quad g_2(x) = \sqrt{(x - 1) - L(x)} .$$

Por lo tanto, a continuación se muestran las principales propiedades que utilizaremos.

##### Teorema 6.

$g_1$  y sus derivadas de cualquier orden están bien definidas para  $x > 0$ .

$g_2$  está bien definida para  $x > 0$ , v sus derivadas de cualquier orden están bien definidas para  $x > 0$  y  $x \neq 1$  .

Más aún, tenemos

$$g_2'(1)^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} , g_2'(1)^- = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (11)$$

<sup>47</sup> En este trabajo  $L(\square)$  denotará el logaritmo natural.

y

$$g_2'(1)^+ = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad g_2'(1)^- = \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad (12)$$

*Demostración.* Las propiedades de  $g_1$  son obvias, de modo que analizaremos  $g_2$  en un entorno de  $x = 1$ . Es sabido que

$$L(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

para  $0 < x < 2$ . Por consiguiente,  $g_2(x) = |x-1| \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{(x-1)}{3} + \frac{(x-1)^2}{4} - \dots}$

para  $0 < x < 2$ . Por otro lado, calculando las derivadas de la forma estándar es fácil ver que

$$g_2'(x) = \frac{x-1}{2xg_2(x)} \quad (13)$$

$$= \frac{x-1}{2x|x-1| \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{(x-1)}{3} + \frac{(x-1)^2}{4} - \dots}}$$

que obviamente implica (11). Análogamente,

$$g_2''(x) = \frac{\left( g_1(x) - \frac{(x-1)^2}{2} \right)}{2x^2 g_1(x) g_2(x)} \quad (14)$$

$$= \frac{(x-1)^3 \left( -\frac{1}{3} + \frac{x-1}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} + \dots \right)}{2x^2(x-1)^2 |x-1| \left( \frac{1}{2} - \frac{(x-1)}{3} + \frac{(x-1)^2}{4} - \dots \right) \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{(x-1)}{3} + \frac{(x-1)^2}{4} - \dots}}$$

que obviamente implica (12). □

Supongamos que  $F_0^T$  refleja el precio futuro del activo subyacente con vencimiento en  $T$ .<sup>48</sup> Entonces, bajo supuestos generales (véase Neu-

<sup>48</sup> Si la relación estándar de paridad contado/futuro debe cumplirse entonces tendremos

$F_0^T = (S_0 - D)e^{rfT}$ , siendo  $D$  el valor actual de los dividendos a pagar antes de  $T$ , aunque, por el momento, no impondremos el cumplimiento de esa expresión.

berger, 1994, y Demeterfi, 1999) se puede probar que el precio del *Swap* de Varianza es igual al de un activo cuyo pago final es

$$g_{vas}(S_T) = \frac{\Phi}{T} \left[ \frac{S_T}{F_0^T} - 1 - L \left( \frac{S_T}{F_0^T} \right) \right]. \quad (15)$$

Consecuentemente, el precio del *Swap* de Volatilidad se aproxima por el del activo cuyo pago final en  $T$  es

$$g_{vas}(S_T) = \frac{\Phi}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{S_T}{F_0^T} - 1 - L \left( \frac{S_T}{F_0^T} \right)}. \quad (16)$$

Como ésta es obviamente una función dos veces continuamente diferenciable para  $S_T > 0$ , tenemos:

### Teorema 7.

Supongamos que  $S_T$  es un pago final aleatorio tal que  $\mu(S_T > 0) = 1$ .

Entonces, si  $h > 0$  y la función  $g_{vas}$  anterior representa el pago final del *Swap* de Varianza, las siguientes estrategias replican el *Swap* de Varianza:

*Estrategia\_VarS\_1:*

i) Prestando  $\frac{\Phi}{T} \left[ \frac{h}{F_0^T} - 1 - L \left( \frac{h}{F_0^T} \right) \right] e^{-r_f T}$  euros.

ii) Comprando  $\frac{\Phi}{T} \left[ \frac{1}{F_0^T} - \frac{1}{k} \right] dk$  *Calls* Digitales para cada precio de ejercicio  $k$ ,  $h < k < \infty$ .

iii) Vendiendo  $\frac{\Phi}{T} \left[ \frac{1}{F_0^T} - \frac{1}{k} \right] dk$  *Puts* Digitales para cada precio de ejercicio  $k$ ,  $0 < k < h$ .<sup>49</sup>

<sup>49</sup> Nótese que la inversión en el activo sin riesgo desaparece si tomamos  $h = F_0^T$ . La misma propiedad se verifica para la estrategia *Estrategia\_VarS\_2* que viene a continuación.

*Estrategia\_VarS\_2:*

i) Endeudándose en  $\frac{\Phi}{T} \left( L \left( \frac{\mathbf{h}}{F_0^T} \right) \right) e^{r_f T}$  euros.

ii) Comprando  $\frac{\Phi}{T} \left[ \frac{1}{F_0^T} - \frac{1}{\mathbf{h}} \right]$  unidades del activo subyacente.

iii) Comprando  $\frac{\Phi}{T} \frac{1}{k^2} dk$  *Puts* Europeas con precio de ejercicio  $k$ ,  $0 < k < \mathbf{h}$ .

iv) Comprando  $\frac{\Phi}{T} \frac{1}{k^2} dk$  *Calls* Europeas con precio de ejercicio  $k$ ,  $\mathbf{h} < k < \infty$ .

Además,

$$W_0^T = \frac{\Phi}{T} \left[ \frac{\mathbf{h}}{F_0^T} - 1 - L \left( \frac{\mathbf{h}}{F_0^T} \right) \right] e^{-r_f T} + \quad (17)$$

$$+ \frac{\Phi}{T} \int_0^{\mathbf{h}} \left[ \frac{1}{F_0^T} - \frac{1}{k} \right] (1 - D_0(k)) dk + \frac{\Phi}{T} \int_{\mathbf{h}}^{\infty} \left[ \frac{1}{F_0^T} - \frac{1}{k} \right] D_0(k) dk ,$$

donde  $D_0(k)$  representa el precio actual de la *Call* Digital con precio de ejercicio  $k$ . Análogamente,

$$W_0^T = -\frac{\Phi}{T} \left[ L \left( \frac{\mathbf{h}}{F_0^T} \right) \right] e^{-r_f T} + \frac{\Phi}{T} \left[ \frac{1}{F_0^T} - \frac{1}{\mathbf{h}} \right] S_0 + \frac{\Phi}{T} \int_0^{\mathbf{h}} \frac{P_0(k)}{k^2} dk + \frac{\Phi}{T} \int_{\mathbf{h}}^{\infty} \frac{C_0(k)}{k^2} dk \quad (18)$$

siendo  $P_0(k)$  y  $C_0(k)$  el precio actual de una *Put* y *Call* Europeas con precios de ejercicio  $k$ .

*Demostración.*

La demostración puede ser omitida ya que todas las afirmaciones se deducen inmediatamente de (15) y de los Teoremas 3 y 4.  $\square$

**Observación 2.** De acuerdo con el Teorema 5 y la expresión (9), el Futuro sobre *Swap* de Varianza es fácilmente replicable mediante la combinación de deuda y *Swaps* de Varianza, de modo que el último Teorema claramente también se puede aplicar para replicar el Futuro sobre *Swap* de Varianza por medio de infinitas Opciones Digitales o Europeas.  $\square$

**Teorema 8.**

Supongamos que  $S_T$  es un pago final aleatorio tal que

$$\mu(S_T > 0) = 1, \mu(S_T = F_0^T) = 0 .$$

Entonces, si la función anterior  $g_{vas}$  representa el Pago Final del *Swap* de Varianza, las siguientes estrategias aproximan la réplica del *Swap* de Volatilidad:

*Estrategia\_VolS\_1:*

i) Compra de 
$$\frac{1}{F_0^T} \frac{\Phi}{\sqrt{T}} \frac{k-1}{\sqrt{g_{vas}(k)}} dk \quad (19)$$

*Calls* Digitales para cada precio de ejercicio  $k \in (0, \infty)$ ,  $k > F_0^T$ .

ii) Venta de (19) *Puts* Digitales para cada precio de ejercicio  $k \in (0, \infty)$ ,  $k < F_0^T$ .

*Estrategia\_VolS\_2:*

i) Endeudamiento en  $\frac{\Phi}{\sqrt{2T}} \frac{F_0^T - 1}{F_0^T} e^{-r_f T}$  euros en el activo sin riesgo.

ii) Venta de  $\frac{\Phi}{\sqrt{2T}} \frac{F_0^T - 1}{(F_0^T)^2}$  unidades del activo subyacente.

iii) Compra de

$$4F_0^T \frac{\Phi}{\sqrt{T}} \frac{g_{vas}(k)^2 - (k - F_0^T)^2}{2k\sqrt{g_{vas}(k)}} dk \quad (20)$$

*Puts* Europeas con precios de ejercicio  $k$  para cada  $k \in (0, F_0^T)$ .

iv) Compra de (20) *Calls* Europeas con precio de ejercicio  $k$  para cada  $k \in (F_0^T, \infty)$ .

v) Compra de  $\frac{2}{\sqrt{2}}$  *Calls* Europeas con precio de ejercicio  $F_0^T$ .<sup>50</sup>

Demostración.

La *Estrategia\_VolS\_1* viene de (16) y el Teorema 3 si se toma  $h = F_0^T$  y se tiene en cuenta (13) y (14). La demostración de la *Estrategia\_VolS\_2* es análoga pero se debe aplicar (13), (14), el Teorema 4 con  $d = F_0^T$ , y el valor del salto de  $g'_2$  en  $x = 1$  que es igual a  $\frac{2}{\sqrt{2}}$  debido a (11).  $\square$

**Observación 3.** De forma análoga se pueden formar carteras compuestas por infinitas opciones que aproximen la réplica de un futuro sobre *swap* de varianza, de un *swap* de covarianza, o de un *swaption* (opción sobre *swap*) de varianza o volatilidad.

Concretamente, para el futuro basta aplicar los teoremas anteriores junto con el Teorema 5, que pone al futuro en función de *swaps* de varianza al contado.

Para el *swap* de covarianza entre dos activos de pago final  $S_T$  y  $\bar{S}_T$  es suficiente observar que

$$\hat{C}^T(n) = \frac{1}{2} (\widehat{W}^T(S_T + \bar{S}_T, n) - \widehat{W}^T(S_T, n) - \widehat{W}^T(\bar{S}_T, n)), \quad (21)$$

<sup>50</sup> Igual que en el resultado anterior, las estrategias anteriores nos proporcionan fórmulas concretas para el precio del *Swap* de Volatilidad, aunque las expresiones son un poco más complicadas en este caso. Por ejemplo, la *Estrategia\_VolS\_1* implica que

$$V_0^T = \frac{1}{F_0^T \sqrt{T}} \left[ \int_{F_0^T}^{\infty} \left[ \frac{k-1}{g_{\text{var}}(k)} \right] D_0(k) dk - \int_0^{F_0^T} \left[ \frac{k-1}{g_{\text{var}}(k)} \right] (1 - D_0(k)) dk \right].$$

donde  $\widehat{W}^T(S_T + \bar{S}_T, n)$ ,  $\widehat{W}^T(S_T, n)$ , y  $\widehat{W}^T(\bar{S}_T, n)$  representan la varianza realizada de  $S_T + \bar{S}_T$ ,  $S_T$ , y  $\bar{S}_T$  respectivamente. Puesto que cada término del miembro de la derecha de (21) puede replicarse por una familia infinita de opciones europeas y/o digitales cuyo subyacente sea  $S_T + \bar{S}_T$ ,  $S_T$ , y  $\bar{S}_T$  respectivamente, (21) pone de manifiesto que también el *swap* de covarianza es replicable con opciones europeas y/o digitales. Los detalles de cómo es la réplica concreta serán omitidos por ser ya elementales.

El primer término de (21), es decir, si denotamos  $\bar{F}_0^T = (S_T + \bar{S}_T)e^{rfT}$ ,

$$\widehat{W}^T(S_T + \bar{S}_T, n) = \frac{\Phi}{T} \left[ \frac{S_T + \bar{S}_T}{\bar{F}_0^T} - 1 - L \left( \frac{S_T + \bar{S}_T}{\bar{F}_0^T} \right) \right] \quad (22)$$

puede ser replicado también con opciones binarias sobre  $S_T$ , y  $\bar{S}_T$ , en lugar de con opciones sobre  $S_T + \bar{S}_T$ . En efecto, defínase un *Call* binario de precios de ejercicio  $(k_1, k_2)$  como aquel que paga al madurar

$$D_T(k_1, k_2) = \begin{cases} 1, & S_T \geq k_1, \bar{S}_T \geq k_2 \\ 0, & \text{Otros casos} \end{cases}.$$

Entonces, el lema 2 pone de manifiesto que (22) puede replicarse mediante el activo sin riesgo más

$$\frac{\partial^2 \widehat{W}^T(k_1 + k_2, n)}{\partial S_2 \partial k_2} dk_1 dk_2$$

unidades de la opción digital  $D_T(k_1, k_2)$ .

Respecto a los *swaption*, u opciones sobre *swap*, supondremos para simplificar la exposición que su pago final, al madurar, es

$$(g_{vas}(S_T) - E)^+ \quad (23)$$

para el de varianza y

$$(g_{vol}(S_T) - E)^+ \quad (24)$$

para el de volatilidad. En realidad, las expresiones anteriores sólo se verifican si la opción y su *swap* subyacente expiran a la vez. En otro caso  $g_{\text{vol}}(S_T)$  y  $g_{\text{vol}}(S_T)$  deben sustituirse por el valor del *swap* al expirar el *swaption* (véase Teorema 7). Puesto que esto sólo complica las fórmulas finales, pero en nada cambia la metodología, aceptemos (23) y (24).

Por otro lado, (15) y (16) ponen de manifiesto que (23) y (24) son suma de dos funciones diferenciables con continuidad salvo a lo sumo en un punto en el que hay continuidad de la función pero salto en la derivada. Por tanto, su réplica se obtiene fácilmente sin más que aplicar los Teoremas 3 y 4, tal y como se hizo en los Teoremas 7 y 8.  $\square$

## 5. EFECTO DE LAS IMPERFECCIONES Y DE LA FALTA DE INFINITAS OPCIONES

La falta de infinitas opciones y la existencia de costes de transacción pueden tener un claro efecto en la efectividad de las estrategias de réplica anteriores. Ambas cuestiones serán tratadas en la esta sección.

Asumamos que  $A_1, A_2, \dots, A_k$  representan los pagos aleatorios en  $T$  de las opciones disponibles. Obviamente, todos ellos serán funciones que dependan de la variable aleatoria  $S_T$ . El inversor puede aplicar nuestros hallazgos de Balbás *et al.* (2009b) y utilizar las opciones anteriores combinadas con el subyacente y el activo sin riesgo para “casi replicar” el pago  $g(S_T)$  en el que esté interesado. Supongamos que elige la estrategia

$$x = (x_f, x_0, x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^{k+2},$$

siendo  $x_f e^{-r_f T}$  la cantidad invertida en el activo sin riesgo, siendo  $x_0$  el número de unidades de activo subyacente negociadas, y siendo  $x_i$  el número de unidades negociadas de la opción relacionada,  $i = 1, 2, \dots, k$ . La primera cuestión importante consiste en cómo medir el error cometido

$$M = g(S_T) - x_f - x_0 S_T - \sum_{i=1}^k x_i A_i \quad (25)$$

con un simple valor numérico. Una respuesta habitual evitaría esta cuestión (Demeterfi, *et al.*, 1999) o nos llevaría a considerar la Desviación Estándar de la variable anterior (Broadie and Jain, 2008), aunque preferiremos centrarnos en una función de riesgo más general  $\rho$ . Impondremos que  $\rho$  sea una Medida de Riesgo Acotada por la Media como las definidas en Rockafellar *et al.* (2006).

Asumamos que  $p \in [1, \infty)$  es tal que  $L^p$  (o  $L^p(\mu)$ ) contiene todas las variables aleatorias involucradas en (25), siendo  $L^p$  el espacio de variables aleatorias con momentos finitos para aquellos órdenes menores o iguales que  $p$ . Supongamos que  $\rho$  es continua en todo el espacio  $L^p$ . Denotemos por  $q \in (1, \infty]$  el conjugado de  $p$  (es decir,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ), supongamos que  $E(\cdot)$  representa la esperanza matemática y tomemos

$$\Delta_p = \{z \in L^q; -\mathbb{E}(yz) \leq \rho(y), \forall y \in L^p\} \quad (26)$$

y consideremos los supuestos de Balbás *et al.* (2009b). Entonces, de acuerdo a los hallazgos de este artículo el precio de venta (*ask*) que podría proponer un *broker* será proporcionado por el problema de optimización.

Fijemos una función de riesgo que satisficiera los requerimientos anteriores y el error (25) nos sugerirá elegir  $x \in \mathbf{R}^{k+2}$  para resolver

$$\begin{cases} \text{Min } \rho \left( -g(S_T) + x_f + x_0 S_T + \sum_{i=1}^k x_i A_i \right) + P \\ x_f e^{-r_f T} + \sum_{j=0}^k x_j \Pi_j \leq P e^{-r_f T} \\ P \in \mathbb{R}, \quad x = (x_f, x_0, x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^{k+2} \end{cases} \quad (27)$$

siendo  $(P, x)$  las variables decisión y  $\Pi_j$  el precio *ask* (*bid*) de  $A_j$  cuando  $x_j \geq 0$  ( $x_j \leq 0$ ). Se puede demostrar que  $\rho$  y (27) no son

diferenciables en general no se pueden aplicar las clásicas aproximaciones para resolver (27). No obstante, la teoría desarrollada en Balbás *et al.* (2009a) y Balbás *et al.* (2009b), y muy especialmente en este último, prueba que (27) tiene un dual lineal, y que puede ser resuelto por algoritmos apropiados. La solución de (27) nos proporcionará el precio de venta de  $g(S_T)$  y la mejor estrategia de cobertura de esta venta, teniendo en cuenta las opciones disponibles y los costes de transacción que hay que pagar. Asimismo, el precio de compra y la cobertura de una compra vendrán de resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} - \rho \left( g(S_T) + x_f + x_0 S_T + \sum_{i=1}^k x_i A_i \right) P \\ x_f e^{-r_f T} + \sum_{j=0}^k x_j \Pi_j \leq P e^{-r_f T} \\ P \in \mathbb{R}, \quad x = (x_f, x_0, x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+2} \end{array} \right. .$$

## 6. CONCLUSIONES

Los derivados de varianza y volatilidad son cada vez más interesantes, tanto para inversores como para teóricos.

La literatura previa los ha estudiado mediante técnicas diversas, si bien, aquellas que se basan en la utilización de infinitas opciones europeas parecen ser más apropiadas por cuanto usan datos de mercado, y son más independientes de los modelos teóricos de valoración.

Pero el uso en la práctica de sólo un número finito de opciones provoca que se cometa un error que hasta ahora no ha sido fácil de medir.

Este trabajo ha pretendido contribuir a la literatura de varias maneras.

Por un lado, se ha ampliado el número de activos al que se le aplica la metodología.

Además, se han utilizado también las opciones digitales y, mucho más importante, se han incorporado los costes de transacción y se han medido los errores usando medidas generales de riesgo, interpretables en términos de posibles pérdidas económicas. Estas medidas son, adicionalmente, coherentes y compatibles con la dominancia estocástica de segundo orden. □

## 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber y D. Heath, 1999. "Coherent measures of risk". *Mathematical Finance*, 9, 203-228.

Balbás, A., R. Balbás y S. Mayoral, 2009a. Portfolio choice problems and optimal hedging with general risk functions: A simplex-like algorithm. *European Journal of Operational Research*, 192, 2, 603-620.

Balbás, A., R. Balbás y J. Garrido, 2009b "Extending pricing rules with general risk functions". *European Journal of Operational Research* (en prensa) doi:10.1016/j.ejor.2009.02.015.

Branger, N. y C. Schlag, 2004. "Why in the index smile so steep?" *Review of Finance*, 8, 109-127.

Broadie, M. y A. Jain, 2008. "Pricing and hedging volatility derivatives". *Journal of Derivatives*, 15, 3, 7-24.

Carr, P. y D. Madam, 1998. "Towards a theory of volatility trading". In Jarrow, R. (ed), *Volatility: New Estimation Techniques for Pricing Derivatives*, *RISK Publications*, London.

Carr, P., D. Madan, H. Geman y M. Yor, 2005. "Pricing options on realized variance". *Finance & Stochastics*, 9, 453-475.

Carr, P. y R. Lee, 2007. "Realized volatility and variance: Options via swaps". *Risk*, May, pp 76-83.

Carr, P. y L. Wu, 2006. "A tale of two indices". *Journal of Derivatives*, Spring, pp 13-29.

Cherny, A.S., 2006. "Weighted V@R and its properties". *Finance & Stochastics*, 10, 367-393.

Luenberger, D.G., 1969. "Optimization by vector spaces methods". John Wiley & Sons, New York.

Moskowitz, T., 2003. "An analysis of covariance risk and pricing anomalies". *Review of financial Studies*, 16, 417-457.

Nakano, Y., 2004. "Efficient hedging with coherent risk measure". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 293, 345-354.

Neuberger, A.J., 1994. "The log contract". *Journal of Portfolio Management*, 20, 2, 74-80.

Rockafellar, R.T., S. Uryasev y M. Zabarankin, 2006. "Generalized deviations in risk analysis". *Finance & Stochastics*, 10, 51-74.

Schied, A. 2007. "Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: A duality approach". *Finance & Stochastics*, 11, 107-129.

Skintzi, V.D. y A. N. Refenes, 2006. "Volatility spillovers and dynamic correlation in European bond markets". *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 16, 1, 23-40.

## Ponencia 22

### VALORACIÓN DE DERIVADOS DE CRÉDITO MEDIANTE DISTRIBUCIONES MULTIVARIANTES TIPO MARSHALL-OLKIN\*

Lluís Bermúdez, Faustino Prieto y José María Sarabia

#### RESUMEN

La valoración de derivados del crédito, tales como los *first-to-default* CDS o los *n<sup>th</sup>-to-default* CDS, depende de diversos factores que deben ser estimados: la probabilidad de insolvencia de cada una de las entidades subyacentes en la cartera de crédito, sus respectivos índices de recuperación, y la correlación entre los sucesos de crédito de la cartera. Un primer paso en el procedimiento para la valoración de estos derivados es la determinación, para cada entidad de la cartera, de las probabilidades neutrales de riesgo de insolvencia. Si definimos la correlación entre sucesos de crédito (*default correlation*) entre dos entidades como la correlación entre sus tiempos de insolvencia, necesitamos especificar una distribución conjunta de los tiempos hasta la insolvencia de manera que sus distribuciones marginales son las curvas de crédito, o distribución de los tiempos de insolvencia, para cada entidad. Hay muchas maneras de simular tiempos de insolvencia conjuntos, pero probablemente el más popular en la industria financiera y también en el mundo académico es el modelo con cópula gaussiana. Este trabajo identifica otra fuente potencial para modelar la correlación de *default*: las distribuciones multivariantes tipo Marshall-Olkin. Una vez obtenidos los tiempos de insolvencia conjuntos, la valoración de los derivados de crédito puede ser realizada mediante simulación de Monte Carlo.

---

\* Los autores agradecen la ayuda recibida del Ministerio de Educación y Ciencia/FEDER SEJ2007-63298 (LB) y SEJ2007-65818 (JMS y FP).

**Palabras clave:** *Basket Credit Default Swaps*, Curva de Crédito, Simulación Monte Carlo, Cópula Gausiana.

## 1. INTRODUCCIÓN

La crisis financiera que azota la economía mundial desde septiembre de 2007, según opinión de expertos analistas, tiene numerosas causas y, desgraciadamente, también numerosas y graves consecuencias. Pero todos ellos coinciden en que ésta es una “crisis de crédito”, tanto en sus orígenes como en sus efectos. Todos somos conscientes de la escasez de crédito que padecen empresas y particulares como consecuencia de la falta de confianza que la crisis financiera ha causado entre las entidades financieras. El desconocimiento por parte de éstas sobre la presencia o no de “activos tóxicos” en los balances del resto de entidades financieras es la principal causa de esta desconfianza y, a la vez, del agravamiento de esta crisis mundial. Los activos considerados como tóxicos, causantes y alimentadores de esta crisis financiera, son en su mayor parte derivados de crédito.

Los derivados de crédito permiten a los agentes del mercado intercambiar riesgos de crédito del mismo modo que los primeros derivados lo hacían con los riesgos de mercado. Es decir, los derivados de crédito permiten transferir el riesgo de crédito implícito en cualquier transacción económica de los agentes implicados en dicha transacción hacia otros intermediarios financieros. Durante la última década, el crecimiento del mercado de derivados de crédito ha sido espectacular. Su enorme éxito ha comportado la aparición de nuevos, y cada vez más complejos, contratos de derivados.

El derivado de crédito más simple y popular es el *credit default swap* (CDS). Este derivado es un contrato que ofrece protección ante el riesgo de impago (*default risk*) de una determinada compañía, que denominaremos entidad de referencia. Con este contrato, el comprador de protección obtiene el derecho a vender los bonos u obligaciones de la entidad de referencia por su valor nominal en el caso que ésta incumpla sus obligaciones (suceso de crédito). Por su lado, el vendedor

de protección se obliga a comprar dichos bonos por su valor nominal cuando ocurra el suceso de crédito. Para obtener esta protección, el comprador del CDS efectúa pagos periódicos hasta el vencimiento del contrato o hasta la ocurrencia del suceso de crédito. En definitiva, un CDS es como un contrato privado de seguro donde el vendedor de protección, a cambio del cobro de unas primas periódicas, asume el riesgo que el propietario de bonos de la entidad de referencia tiene como consecuencia de la posible futura insolvencia definitiva de dicha entidad. La diferencia más notable entre un CDS y un seguro es la falta de regulación sobre el primero: al vendedor del CDS no se le exige dotar las provisiones técnicas necesarias para hacer frente a un eventual suceso de crédito.

Sin embargo, los derivados de crédito más demandados en el mercado son aquellos en los que se ofrece protección sobre una cartera de riesgos de crédito (o conjunto de entidades de referencia), en lugar de ofrecerla sobre una única entidad de referencia. Podemos dividir estos derivados en dos grupos, los comercializados bajo la denominación de *basket credit default swap* (*basket CDS*) y los *collateralized debt obligations* (CDO).

Existen diferentes *basket CDS* según las condiciones que se establecen en el contrato para definir el suceso de crédito que da lugar a las obligaciones del vendedor. Así, un *add-up basket CDS* produce una obligación de pago cuando alguna de las entidades de referencia resulta insolvente, pudiéndose producir otros pagos si otras entidades quebrasen antes del vencimiento del contrato. El tipo de *basket CDS* más habitual es el *first-to-default CDS*, donde la obligación de pago del vendedor se produce sólo cuando ocurre el primer impago, dando lugar a la cancelación del contrato. Paralelamente, también existen *second-to-default CDS* y *n<sup>th</sup>-to-default CDS* en los que la obligación se origina, respectivamente, cuando ocurre el segundo o el enésimo impago.

Aunque no van a ser tratados en este trabajo, los CDO son estructurados sobre una cartera de riesgos de crédito. Si la cartera está formada por préstamos recibe la denominación de *collateralized loan obligations* (CLO),

si está constituida por bonos *collateralized bond obligations* (CBO). Finalmente los *synthetic* CDO están basados en una cartera de CDS. Los CDO permitieron crear deuda considerada de alta calidad por las agencias de *rating* a partir de activos de deuda de media, baja y dudosa calidad. La creación y exitosa comercialización de CDO sobre carteras de hipotecas subprime (aquellas que tienen un alto riesgo de impago) ha sido una de las principales causas de la actual crisis financiera.

## 2. VALORACIÓN DE DERIVADOS DE CRÉDITO

Los métodos para la valoración de *basket* CDS y CDO han suscitado un enorme interés en la comunidad científica internacional. En este trabajo, se propone una metodología alternativa para la valoración de *basket* CDS. Antes de proceder a su presentación, puede ser necesario plantear el problema y detallar resumidamente los fundamentos de las metodologías utilizadas en la práctica financiera.

Para ello, en primer lugar, introducimos una variable aleatoria  $T_i$  que podemos denominar “tiempo hasta el suceso de crédito” (*time-until-default*) y que identificamos como el tiempo de supervivencia de cada una de las entidades de referencia (o instrumento financiero).

En segundo lugar, definimos  $F_i(t) = \Pr(T_i \leq t)$  como la función de distribución de la variable aleatoria tiempo de supervivencia de la entidad de referencia  $i$ ; y  $S_i(t) = 1 - F_i(t) = \Pr(T_i > t)$  como la respectiva función de supervivencia. A partir de estas dos funciones, suele definirse la función de azar (*hazard rate function*) para  $T_i$  como

$$h_i(t) = \frac{f_i(t)}{1 - F_i(t)} = -\frac{S_i'(t)}{S_i(t)} \approx \Pr[t < T_i \leq t + \Delta t | T_i > t]. \quad (1.1)$$

Para llevar a cabo la valoración del derivado de crédito, es necesario contar con la denominada curva de crédito (*credit curve*) para cada riesgo de crédito. Esta curva de crédito nos proporciona las probabilidades marginales de insolvencia condicionadas (*conditional default probabilities*) y puede definirse a partir de la función de azar. Existen

tres maneras de obtener la curva de crédito o la distribución del tiempo de supervivencia para cada riesgo de crédito: 1) a partir de las probabilidades históricas de impago proporcionadas por las agencias de *rating*; 2) a partir de la aproximación teórica del modelo de Merton (1974); y 3) a partir de la información de mercado relativa a los bonos o a las primas de los CDS pagadas por la cobertura del riesgo de crédito (Li, 1998). Las dos últimas alternativas producen lo que conocemos como probabilidades neutrales de riesgo (*risk-neutral probabilities*), y son las probabilidades que deben ser utilizadas para la valoración de los derivados de crédito.

En tercer lugar, debemos enfrentarnos al problema central de la valoración de derivados de crédito que ofrecen cobertura sobre una cartera de riesgos de crédito: el problema de la correlación entre sucesos de crédito (*default correlation*). Definiremos la *default correlation* entre dos entidades como la correlación entre sus tiempos de supervivencia. O de un modo más coloquial, como la tendencia en que dos entidades resultan insolventes al mismo tiempo. Los ciclos económicos y el efecto contagio cuando hablamos del riesgo de crédito son las principales causas de esta correlación positiva. Para tener en cuenta esta correlación en la valoración de los derivados de crédito necesitaremos especificar una distribución conjunta de los tiempos de supervivencia de manera que sus distribuciones marginales sean las curvas de crédito de cada referencia. Este problema ha sido abordado desde diferentes puntos de vista y, básicamente, podemos dividir en dos las metodologías utilizadas para ello: los modelos estructurales, basados en el modelo de Merton, y los modelos reducidos, que asumen que las probabilidades de insolvencia siguen determinados procesos estocásticos. En el siguiente apartado, resumimos uno de los modelos reducidos más simples y más utilizado en la práctica: el modelo con cópula gaussiana. A continuación, en el apartado 4 de este trabajo, presentamos un modelo alternativo para especificar la distribución conjunta basado en las distribuciones multivariantes tipo Marshall-Olkin.

Finalmente, una vez obtenida por simulación una muestra de tiempos de *default* conjunta, se calcula para cada escenario de la muestra el valor actual de la rama de pagos del derivado de crédito, en función

de la prima periódica del derivado, y el valor actual de la rama de cobros. De igualar ambas ramas se obtiene el valor de la prima para cada escenario de la muestra y, finalmente, la valoración del derivado de crédito se obtiene de calcular la media de éstos.

### 3. CORRELACIÓN ENTRE SUCESOS DE CRÉDITO: *DEFAULT CORRELATION*

Dada una cartera de riesgos de crédito, podemos obtener las distribuciones marginales de los tiempos de supervivencia para cada uno de los riesgos que la componen. Para valorar conjuntamente los riesgos de crédito podemos asumir que son independientes entre si, entonces la distribución conjunta de tiempos de supervivencia resultaría del producto de las marginales y cualquier análisis de la cartera podría ser llevado a cabo. Pero es obvio que la hipótesis de independencia no es aceptable en este caso: el riesgo de insolvencia de todos los riesgos de la cartera es más probable en época de recesión que en tiempos de crecimiento de la economía. Es decir, existe una correlación positiva entre los riesgos de crédito de la cartera.

Como ya hemos comentado, para tener en cuenta esta correlación en la valoración de los derivados de crédito necesitamos, dada la estructura de correlaciones entre los riesgos de la cartera, especificar la distribución conjunta de los tiempos de supervivencia de manera que sus distribuciones marginales sean las curvas de crédito de cada referencia. Existen muchas técnicas estadísticas que permiten especificar dicha distribución. Las funciones de cópula son una de las aproximaciones más utilizadas para ello.

Una cópula es una función ( $C$ ) que relaciona las distribuciones marginales univariantes con su distribución conjunta multivariante:

$$C(F_1(t_1), F_2(t_2), \dots, F_n(t_n); \Sigma) = F(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

donde  $\Sigma$  es la estructura de correlación entre las variables. Cualquier función de distribución multivariante  $F$  puede ser escrita a partir de una

cópula (Sklar, 1959), por lo que las funciones de cópula permiten analizar desde múltiples puntos de vista las distribuciones multivariantes.

De entre las diferentes funciones de cópulas, Li (2000) propuso la cópula gaussiana para tratar el problema de la correlación entre sucesos de crédito. Desde entonces, por su simplicidad, ha sido la más utilizada en la práctica financiera para la valoración de derivados de crédito sobre carteras de riesgo. En concreto, la cópula gaussiana se ha venido utilizando para simular tiempos de insolvencia de un conjunto de riesgos de crédito. A partir de los valores simulados, tal y como hemos comentado en la sección anterior, puede valorarse el derivado de crédito.

El proceso a seguir es relativamente sencillo. En primer lugar, aplicamos la transformación  $x_i = N^{-1}(Q_i(t_i))$ , donde  $N^{-1}$  es la función inversa de la distribución normal y  $Q_i(t_i)$  es la función de probabilidad acumulada de los tiempos de supervivencia del riesgo  $i$ . Con esta transformación, conseguimos tener variables  $x_i$  distribuidas como una normal estándar. Entonces, la distribución conjunta de las variables  $x_i$  es una normal multivariante de media 0 y matriz de coeficientes de correlación  $\Sigma$ . Resulta fácil simular valores de  $(x_1, \dots, x_n)$  a partir de dicha normal multivariante y, a partir de estos valores, deshaciendo la transformación inicial, obtenemos una muestra conjunta de tiempos de supervivencia o, si preferimos, de tiempos de insolvencia.

#### **4. DISTRIBUCIONES MULTIVARIANTES DE DEFAULT TIPO MARSHALL-OLKIN**

Partimos de una cartera con  $n$  componentes. Supongamos que para cada componente de la cartera  $i$  disponemos de una curva de crédito o una función de azar de su tiempo de supervivencia  $T_i$ . Se trata entonces de definir una distribución multivariante para el vector  $(T_1, \dots, T_n)$ .

Definiremos un modelo general de *default* multivariante para luego considerar dos casos particulares importantes. Comenzaremos por el caso bidimensional.

Supongamos que  $Z_0$ ,  $Z_1$  y  $Z_2$  son variables aleatorias mutuamente independientes con funciones de distribución  $G_i(\cdot)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Definimos la variable aleatoria  $(T_1, T_2)$  como

$$T_1 = \text{mín} \{Z_1, Z_0\},$$

$$T_2 = \text{mín} \{Z_2, Z_0\}.$$

Con este esquema las variables aleatorias  $T_1$  y  $T_2$  son dependientes, y la dependencia viene expresada por medio de la variable latente  $Z_0$ .

La función de supervivencia bidimensional del par  $(T_1, T_2)$  viene dada por

$$S(t_1, t_2) = \Pr(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = [1 - G_1(t_1)][1 - G_2(t_2)][1 - G_0(z)], \quad (1.2)$$

donde  $z = \text{máx} \{t_1, t_2\}$ . Notar que (1.2) presenta una componente singular.

#### 4.1 Caso exponencial

Si las distribuciones de los componentes de  $T_i$  siguen distribuciones de tipo exponencial, entonces obtenemos la distribución clásica de Marshall-Olkin (Marshall y Olkin, 1967).

Supongamos entonces que la media de las  $Z_i$  es  $1/\lambda_i$ . En este caso particular, el coeficiente de correlación entre  $T_1$  y  $T_2$  viene dado por  $\lambda_0/\lambda$ , donde  $\lambda = \sum \lambda_i$ . Los estimadores de los parámetros se pueden obtener mediante máxima verosimilitud. Supongamos una muestra de  $n$  tiempos de *default*  $(t_{1i}, t_{2i})$ . Si  $u_i$  representa el número de pares donde  $t_{ij} < t_{3-i,j}$  y  $u_{12}$  el número de parejas donde  $t_{1i} = t_{2i}$  los estimadores de máxima verosimilitud son:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{u_i}{n(n-1)v}, \quad i = 1, 2 \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}_0 = \frac{u_{12}}{n(n-1)v},$$

donde  $v = \sum \text{mín} \{t_{1i}, t_{2i}\}$ , (Arnold, 1968).

En el caso que las componentes sigan distribuciones de tipo exponenciales generalizadas, se obtiene el modelo propuesto por Sarhan

y Balakrishnan (2007). Algunas extensiones de este tipo de modelos se pueden encontrar en Sarabia y Gómez-Déniz (2008).

## 4.2 Caso general

La generalización del modelo anterior a dimensiones superiores a dos es bastante directa. Primero, consideramos las variables aleatorias mutuamente independientes  $Z_0, Z_1, \dots, Z_n$ . Segundo, definimos el vector  $\underline{T}$  del siguiente modo:

$$T_i = \min \{Z_i, Z_0\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nuevamente, la variable aleatoria latente  $Z_0$  proporciona la dependencia al modelo. La función de supervivencia del vector  $n$ -dimensional viene dado por,

$$S(t_1, \dots, t_n) = \Pr(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n) = [1 - G_0(z)] \prod_{i=1}^n [1 - G_i(t_i)]$$

donde  $z = \max \{t_1, \dots, t_n\}$ .

El proceso de simulación de los tiempos de *default* es bastante directo. Por simplificar, supongamos que las componentes  $T_i$  siguen distribuciones exponenciales de media  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . El proceso de simulación de resume en tres pasos:

1. Simular  $n+1$  observaciones  $U_0, U_1, \dots, U_n$  de tipo uniforme en  $(0, 1)$ .
2. Calcular  $n+1$  observaciones de tipo exponencial por medio de

$$Z_i = -\lambda_i \log(U_i); \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

3. Calcular  $T_1 = \min \{Z_1, Z_0\}, \dots, T_n = \min \{Z_n, Z_0\}$ .

Una propiedad de interés de este tipo de modelos es que la distribución de mínimos se puede obtener de forma cerrada. Si  $T = \min \{T_1, \dots, T_n\}$ , la función de supervivencia de  $T$  viene dada por,

$$S_T(t) = \prod_{i=1}^n [1 - G_i(t)].$$

Esta propiedad permite calcular, por ejemplo, el primer tiempo medio de *default*.

## 5. CONCLUSIONES

Se ha propuesto una clase de distribuciones multivariantes para modelizar correlaciones de *default*. Esta clase de distribuciones recibe el nombre de distribuciones tipo Marshall-Olkin, puesto que en el caso exponencial coincide con el modelo clásico propuesto por estos autores. Dicha clase de distribuciones posee una expresión cerrada para la función de distribución conjunta. La distribución propuesta es fácil de simular y la distribución del mínimo de los componentes es conocida. Todo ello apunta a que sea una buena propuesta para utilizarla en la valoración de derivados de crédito referidos a una cartera de riesgos de crédito. En especial, para la valoración de contratos *first-to-default*.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnold, B.C. Parameter estimation for a multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 1968, vol. 63, 848-852.

Li, D. X. Constructing a credit curve. *Credit Risk, A RISK Special report*, 1998, 40-44.

Li, D. X. On default correlation: A copula function approach. *Journal of Fixed Income* 9, 2000, 43-54.

Marshall, A.W., Olkin, I. A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 1967, vol. 62, 30-44.

Merton, R. C. On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 1974, vol. 29, 449-470.

Sarabia, J.M., Gómez-Déniz, E. Construction of Multivariate Distributions: a Review of Some Recent Results” (con discusión). *SORT, Statistics and Operations Research Transactions*, 2008, vol. 32, 3-36.

Sarhan, A.M., Balakrishnan, N. A new class of bivariate distributions and its mixture. *Journal of Multivariate Analysis*, 2007, vol. 98, 1508-1527.

Sklar, A. *Random Variables, Joint Distribution Functions and Copulas*. *Kybernetika*, 1973, vol. 9, 449-460.

## Ponencia 23

### APPLICATIONS OF SURVIVAL ANALYSIS TO CREDIT RISK MODELING

Ricardo Cao Abad, Juan M. Vilar Fernández and Andrés Devia Rivera

#### ABSTRACT

In this paper survival analysis methods have applied to the credit risk modeling. The work deals with the measurement of the banking credit risk via the construction of statistical models to estimate the probability of default (*PD*) in credit portfolios. Three methods to estimate the *PD* for each individual credit have been proposed in terms of a conditional distribution setting, a semi parametric model, a generalized linear model, and a nonparametric model with kernel type smoothing. All the models have been studied assuming some random right censoring mechanism for the time to default. In order to present the main results that have been obtained, asymptotic results concerning to the nonparametric estimator are showed in the last part of the paper.

**Keywords:** Credit risk, probability of default, nonparametric regression, conditional survival function, generalized product-limit estimator

AMS Classification: 62G10, 62J02

#### 1. INTRODUCTION

Determining the probability of default, *PD*, in consumer credits, personal loans and credit cards is one of the main problems to be addressed by banks, savings banks, savings cooperatives and other credit companies. This is one of the fundamental factors in most of the

models that credit companies and credit risk researchers employ in the measurement as well as in the management of the risk of insolvency derived by defaulted (bad) credits, which is usually called credit risk. There is an extensive literature on a widely variety of quantitative approaches for modeling credit risk. For the reader interested in an extended discussion on the recent evolution of these techniques we mention the work by Altman and Saunders (1997), Saunders (1999), Crouhy et al. (2000), Hand (2001), Hamerle et al. (2003), and Hanson and Schuermann (2004).

The main aim of this paper is to introduce an alternative approach for modeling credit risk. More specifically, we will focus on estimating *PD* for consumer credits and personal credits using survival analysis techniques.

The idea of using survival analysis techniques for constructing credit risk models is not new. It started with the paper by Narain (1992) and, later one, was developed by Carling et al. (1998), Stepanova and Thomas (2002), Roszbach (2003), Glennon and Nigro (2005), Allen and Rose (2006), Malik and Thomas (2006) and Beran and Djaïdja (2007). A common feature of all these papers is that they use parametric or semi parametric regression techniques for modeling the time to default, including exponential models, Weibull models and Cox's proportional hazards models, which are very common in this literature. The model established for the time to default is then used for modeling *PD* or constructing the scoring discriminant function.

In this paper we propose a basic idea to estimate *PD*, which is performed by three different methods. The first one is based on the Cox's proportional hazards model, *PHM*, the second one is based on the generalized linear models, *GLM*, and the third one consists in using a random design nonparametric regression model, *NPM*. In all cases, some random right censoring mechanism appears in the model, so survival analysis techniques are natural tools to be used.

The conditional survival function is used for modeling credit risk centering the attention on "when clients default", rather than "if clients

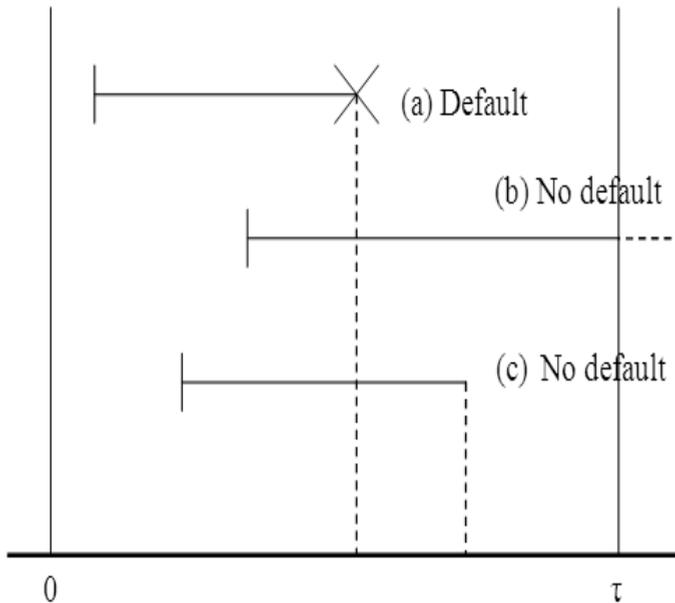
default”, given some additional information provided by observable endogenous and exogenous covariates. Thus, the default risk is measured via the conditional distribution of random variable time to default,  $T$ , given a vector of covariates,  $X$ . The variable  $T$  is not fully observable due to the censoring mechanism.

In order to estimate empirically that conditional distribution function we have used the generalized product limit estimator by Beran (1981). This estimator has been extensively studied by Dabrowska (1987), Dabrowska (1989), González-Manteiga and Cadarso-Suárez (1994), Van Keilegom and Veraverbeke (1996), Iglesias-Pérez and González-Manteiga (1999), Li and Datta (2001) and Li and Van Keilegom (2002), among other authors.

The rest of the paper proceeds as follows. Section 2 explains how the survival analysis can be applied to credit risk analysis. The estimation methods proposed for the probability of default is considered in Section 3, under the three mentioned models. Special attention is given to the asymptotic results obtained by Cao et al. (2008) for the nonparametric estimator of the  $PD$ , denoted by  $PD^{NPM}$ . The theorems that rising up as product of the mentioned study on the asymptotic bias and variance, uniform consistency and asymptotic normality are introduced in Section 4.

## **2. SURVIVAL ANALYSIS AND THE CREDIT RISK**

The use of survival analysis techniques to study credit risk, and more particularly to model  $PD$  can be motivated via Figure 1. It presents three common situations that may occur in practice when a credit company observes the “lifetime” of a credit.



**Figure 1**

Time to default in consumer credit risk.

Let us consider the interval  $(0, t ]$  as the horizon of the study. Case (a) shows a credit with default before the endpoint of the time under study ( $\tau$ ). In this case, the lifetime of the credit,  $T$ , which is the time to default of the credit, is an observable variable. Cases (b) and (c) show two different situations. In both of them is not possible to observe the time instant when a credit enters into default, which causes a lack of information coming from right censoring. In case (b) it is only the time from starting of the credit to the end of the study, while (c) accounts for a situation where anticipated cancellations occur before default.

The available information to model the  $PD$  is a sample of  $n$  i.i.d. copies of the random vector  $(Y, X, \delta)$ , where  $Y = \min(T, C)$  is the observed maturity,  $T$  is the time to default,  $C$  is the time to the end of the study or anticipated cancellation of the credit,  $\delta = I(T \leq C)$  is the indicator of noncensoring (nondefault) and  $X$  is a vector of explanatory covariates. In this survival analysis setting we will assume that there exists an unknown relationship between  $Y$  and  $X$ . We will also assume that the random variables  $T$  and  $C$  are conditionally independent given  $X$ .

### 3. MODELING PROBABILITY OF DEFAULT IN CREDIT PORTFOLIOS

In the literature devoted to credit risk analysis, most of the works deal with measuring credit risk by  $PD$  modeling in portfolios with large exposures (companies, banks, etc). There exist, however, some exceptions as the works by Carlin et al. (1998), Stepanova and Thomas (2002) and Malik and Thomas (2006), where the analysis has mainly been focused on consumer credit risk in a survival analysis context by using Cox regression models.

In the following we present three different approaches to model the probability of default,  $PD$ , using the conditional survival analysis. All the models are based on writing  $PD$  in terms of the conditional distribution function of the time to default. Thus  $PD$  can be estimated, using the same formula, either by the Cox's proportional hazard model, which gives  $PD^{PHM}$ , or by a generalized linear model, which gives  $PD^{GLM}$ , or finally, by using the nonparametric conditional distribution function estimator by Beran, which gives the nonparametric estimator of the default probability,  $PD^{NPM}$ .

#### 3.1 Probability of default via the conditional distribution function

Following the Basel II recommendations (Basel Committee on Banking Supervision, 2004), the credit scoring models are used to measure the probability of default in a time horizon  $b$  from a maturity time,  $t$ . A typical value is  $b=12$  (in months). Thus, the following probability has to be computed by:

$$\begin{aligned} PD(t|x) &= P(t < T \leq t+b | T > t, X = x) \\ &= \frac{P(T \leq t+b | T > t, X = x) - P(T < t | X = x)}{1 - P(T < t | X = x)} \\ &= 1 - \frac{S(t+b|x)}{S(t|x)}, \end{aligned} \tag{1}$$

where  $t$  is the observed maturity for the credit and  $x$  is the value of the quality profile vector (covariate),  $X$ , for that credit.

### 3.2 Proportional hazards model

In this section, a semi parametric approach to perform the study of  $PD$  is given. Here the Cox's proportional hazards approach is applied to model the conditional survival function  $S(t|x)$ . Thus, the objective is to build a conditional model for the individual default probability,  $PD(t|x)$ , defined in terms of the Cox's conditional survivor estimator  $\hat{S}_b(\cdot|x)$  as follows:

$$PD^{\hat{D}^{PHM}}(t|x) = \frac{\hat{F}_\beta(t+b|x) - \hat{F}_\beta(t|x)}{1 - \hat{F}_\beta(t|x)} = 1 - \frac{\hat{S}_\beta(t+b|x)}{\hat{S}_\beta(t|x)}, \quad (2)$$

where  $1 - \hat{F}_\beta(t|x) = \hat{S}_\beta(t|x) = \exp(-\hat{E}(t|x))$ .

The estimation of the model (2) consists of two steps. First, the cumulative baseline hazard function,  $\Lambda_0(t)$ , is estimated by

$$\hat{\Lambda}_0(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1\{Y_i \leq t, \delta_i = 1\}}{\sum_{j=1}^n 1\{Y_j > Y_i\}},$$

and then, parameter  $\beta$  is estimated by  $\hat{\beta} = \arg \max_{\beta \in \mathbb{R}} L(\beta)$ , where  $L(\beta)$  is the Cox partial likelihood function.

Thus, the conditional cumulative hazard function estimator is given by

$$\hat{E}(t|x) = \hat{E}_0(t) \exp(x^t \hat{\beta}).$$

The asymptotic properties of the estimator  $\hat{S}_\beta(\cdot|x)$  can be found, for instance, in the book by Fleming and Harrington (1991). As a consequence of these, similar properties can be obtained for the estimator defined in (2).

### 3.3 Generalized linear model

A generalized linear model can be assumed for the lifetime distribution:

$$P(T \leq t | X = x) = F_{\theta}(t | x) = g(\theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 x)$$

where  $\theta = (\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{p-1})^t$  is a  $p$ -dimensional vector and  $g$  is a known parametric link function. Thus, this model characterizes the conditional distribution of the lifetime of a credit,  $T$ , in terms of the unknown parameters. Once these parameters are estimated, an estimator of the conditional distribution of the function is obtained,  $F_{\hat{\theta}}$ , and, finally, an estimator of the  $PD$  is obtained by plugging this estimator in equation (1), i.e.

$$PD^{\hat{GLM}}(t | x) = \frac{\hat{F}_{\hat{\theta}}(t + b | x) - \hat{F}_{\hat{\theta}}(t \setminus x)}{1 - \hat{F}_{\hat{\theta}}(t | x)} = 1 - \frac{\hat{S}_{\hat{\theta}}(t + b | x)}{\hat{S}_{\hat{\theta}}(t | x)}, \quad (3)$$

where  $\hat{\theta}$  is the maximum likelihood estimator of the parameter vector  $\theta$ .

Let us consider the one-dimensional covariate case. Then  $\theta = \theta_2$  and the conditional distribution given by the model is  $F_{\theta}(t | x) = g(\theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 x)$ , with density function  $f_{\theta}(t | x) = \theta_1 g'(\theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 x)$ . Since we are under a classical random right censoring setting, the conditional likelihood function is defined as follows:

$$L(y, x, \theta) = \prod_{i=1}^n (f_{\theta}(y_i | x_i))^{\delta_i} (1 - F_{\theta}(y_i | x_i))^{1 - \delta_i},$$

where  $y_i$  is the maturity of the  $i$ -th credit and  $\delta_i$  is the indicator of default for the  $i$ -th credit. Thus, the log-likelihood function is

$$\begin{aligned} \log lik(\theta) &= \sum_{i=1}^n \delta_i [\ln(\theta_1) + \ln(g'(\theta_0 + \theta_1 y_i + \theta_2 x_i))] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \ln(1 - g(\theta_0 + \theta_1 y_i + \theta_2 x_i)) \end{aligned}$$

Finally, the estimator is found as the maximizer of the log-likelihood function, i.e.,  $\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \mathbb{R}} (\log lik(\theta))$ .

The works by Jorgensen (1983) and McCullagh and Nelder (1989) deal with generalized linear models in a regression context. These models and the asymptotic theory therein can be adapted to derive similar results for this conditional distribution function setup.

### 3.4 Nonparametric conditional distribution estimator

First of all, a nonparametric estimator of the conditional distribution function is obtained. This estimator, say  $\hat{S}_h(t|x)$ , is used to derive an estimator of the probability of default, say  $P\hat{D}_h(t|x)$ , for the desired values of  $t$  and  $x$ .

Since we have a sample of right censored data for the lifetime distribution of a credit, we use the estimator proposed by Beran (1981) for conditional survival function of  $T$  given  $X=x$ :

$$\hat{S}_h(t|x) = \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{1\{Y_i \leq t, \delta_i = 1\} B_{ni}(x)}{\sum_{j=1}^n 1\{Y_j \leq Y_j\} B_{nj}(x)} \right),$$

where  $Y_i$  is the observed lifetime of the  $i$ -th credit,  $\delta_i$  is the indicator of observing default of the  $i$ -th credit (uncensoring) and  $X_i$  is the vector of explanatory covariates for the  $i$ -th credit. The terms  $B_{ni}(x)$  are Nadaraya-Watson nonparametric weights which are defined by:

$$B_{ni}(x) = \frac{K((x - X_i)/h)}{\sum_{j=1}^n K((x - X_j)/h)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

and  $h \equiv h_n$  is the smoothing parameter that tends to zero as the sample size tends to infinity.

To estimate the probability of default at time  $t$  given a covariate vector  $x$ , we replace, in (1), the theoretical value of the conditional survival function by its nonparametric estimator  $\hat{S}_h$  to obtain:

$$P\hat{D}^{NPM}(t|x) = \frac{\hat{F}_h(t+b|x) - \hat{F}_h(t|x)}{1 - \hat{F}_h(t|x)} = 1 - \frac{\hat{S}_h(t+b|x)}{\hat{S}_h(t|x)}, \quad (4)$$

Two asymptotic properties of this estimator will be showed in the next section. The detailed study and the proofs of these theoretical results are given in Cao et al. (2008).

#### 4. MAIN RESULTS FOR THE NONPARAMETRIC ESTIMATOR

As part of the main results of this paper, two theorems involving the asymptotic properties for the nonparametric estimator defined in equation (4) have been obtained from the analogous properties for the conditional distribution function estimator under censoring, already obtained by Iglesias-Pérez and González-Manteiga (1999), Van Keilegom and Veraverbeke (1996) and Van Keilegom et al. (2001).

Using equation (4) the asymptotic bias, variance and the mean squared error of the estimator  $PD^{NPM}$  can be obtained via the delta method. Consistency and asymptotic normality can also be derived.

To simplify the notation about the nonparametric estimator, let us define  $\varphi(t|x) = PD(t|x)$  and  $\hat{\varphi}_n(t|x) = \hat{PD}^{NPM}(t|x)$ . Then, the nonparametric estimator of the default probability function is

$$\hat{\varphi}_h(t|x) = 1 - \frac{\hat{S}_h(t+b|x)}{\hat{S}_h(t|x)}.$$

Because the discussion about the asymptotic theory obtained for the estimator  $\hat{\varphi}_h$  is out of the scope of this paper, we will only introduce the theorems concerning  $\hat{\varphi}_h$  and the conditions needed for deriving their proofs. Most of these assumptions were already required by Iglesias-Pérez and González-Manteiga (1999) and by Dabrowska (1989) to obtain their own results. The reader interested in a deeper study of the properties of  $\hat{\varphi}_h$  can check the details of the proofs of the following theorems in section 6 of the paper by Cao et al. (2008).

The function  $G(t|x) = P(C \leq t | X = x)$  is the conditional distribution of the censoring random variable given the covariate  $X$  and  $H(t|x) = P(Y \leq t | X = x)$  is the conditional distribution of the observed

lifetime of the credit given the covariate  $X$ . The random lifetime,  $T$ , and the censoring time,  $C$ , are conditionally independent given the covariate  $X$ . As a consequence,  $1 - H(t | x) = (1 - G(t | x))(1 - F(t | x))$ . The conditional sub-distribution function of the observed lifetime for defaulted credits is denoted by  $H_1(t | x) = P(Y \leq t, \delta = 1 | X = x) = \int (1 - G(u | x)) dF(u | x)$ . The distribution function and the density function of the covariate  $X$  are denoted by  $M(x)$  and  $m(x)$ . The set  $\Omega(x) = \{x \in \mathbb{R}^+ : m(x) > 0\}$  will denote the support of  $m$ . The lower and upper endpoints of the support of any distribution function  $L$  will be denoted by  $\tau_{\inf} = \inf \{t : L(t) > 0\}$  and  $\tau_{\sup} = \sup \{t : L(t) < 1\}$ .

The following assumptions and definitions are needed for the asymptotic results:

A.1 The kernel  $K$  is a symmetric density function with support  $[-1, 1]$  and bounded variation.

A.2 Let us consider  $\Omega(x)$ , the support of the density  $m$ , and let  $I = [x_1, x_2]$  be an interval contained in  $\Omega(x)$ , such that there exist  $\alpha, \beta, \delta > 0$  with  $\alpha\delta \leq \beta\delta < 1$ , such that  $\alpha \leq \inf \{m(x) : x \in I_\delta\} \leq \sup \{m(x) : x \in I_\delta\} \leq \beta$ , where  $I_\delta = [x_1 - \delta, x_2 + \delta]$ . Then the functions  $m'(x)$  and  $m''(x)$  are continuous and bounded in the set  $I_\delta$ .

A.3 There exist positive real numbers  $\theta$  and  $\tau_H^*$ , such that  $0 < \theta \leq \inf \{1 - H(t | x) : x \in I_\delta\}$ .

A.4 The functions  $H'(t | x) = \frac{\partial H(t | x)}{\partial x}$ ,  $H_1'(t | x) = \frac{\partial H_1(t | x)}{\partial x}$ ,  $H''(t | x) = \frac{\partial^2 H(t | x)}{\partial x^2}$ ,  $H_1''(t | x) = \frac{\partial^2 H_1(t | x)}{\partial x^2}$  exist, are continuous and bounded in  $(t, x) \in (0, \tau_H^*) \times I_\delta$ .

A.5 The functions  $\dot{H}(t | x) = \frac{\partial H(t | x)}{\partial t}$ ,  $\ddot{H}(t | x) = \frac{\partial^2 H(t | x)}{\partial t^2}$ ,  $\dot{H}_1(t | x) = \frac{\partial H_1(t | x)}{\partial t}$ ,  $\ddot{H}_1(t | x) = \frac{\partial^2 H_1(t | x)}{\partial t^2}$  exist, are continuous and bounded in  $(t, x) \in (0, \tau_H^*) \times I_\delta$ .

A.6 The functions  $\dot{H}'(t|x) = \frac{\partial^2 H(t|x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 H(t|x)}{\partial x \partial t}$  and

$\dot{H}'_1(t|x) = \frac{\partial^2 H_1(t|x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 H_1(t|x)}{\partial x \partial t}$  exist, are continuous and bounded in  $(t, x) \in (0, \tau_H^*) \times I_\delta$ .

A.7 The smoothing parameter  $h$  satisfies  $h \rightarrow 0$ ,  $(\ln(n))^3/nh \rightarrow 0$  and  $nh^5/\ln(n) = O(1)$ , when  $n \rightarrow \infty$ .

*Theorem 1.* Fix some  $t$  and  $x$  for which  $0 < \hat{\varphi}_h(t|x) < 1$ . Under assumptions A.1 – A.7,  $\hat{\varphi}_h(t|x)$  is a strongly consistent estimator of the default probability function,  $\varphi(t|x)$ . Moreover, if  $b < \tau_H^*$ , and if  $\inf \{S(\tau_H^*|x)\} > 0$ , the

consistence is uniform in  $(t, x) \in [0, \tau_H^* - b] \times I$ , i.e.,

$$\sup_{t \in [0, \tau_H^* - b]} \sup_{x \in I} |\hat{\varphi}_h(t|x) - \varphi(t|x)| \rightarrow 0 \text{ a.s.}$$

*Theorem 2.* Assume conditions A.1-A.7, then the mean square error of the nonparametric estimator  $\hat{\varphi}_h(t|x)$  is

$$MSE(\hat{\varphi}_h(t|x)) = b(t|x)^2 h^4 + (nh)^{-1} v(t|x) + o((nh)^{-1} + h^4) \quad (5)$$

where

$$b(t|x) = \frac{1}{2} c_k (1 - \varphi(t|x)) B_H(t, t+b)$$

$$v(t|x) = \frac{d_k}{m(x)} (1 - \varphi(t|x))^2 D_H(t, t+b)$$

with  $c_k = \int K^2(u) du$ ,  $d_k = \int u^2 K(u) du$ , and

$$B_H(t, t+b) = \int_t^{t+b} \left[ \ddot{H}(u|x) + 2 \frac{m'(x)}{m(x)} \dot{H}(u|x) \right] dH_1(u|x) + \left( 1 + 2 \frac{m'(x)}{m(x)} \right) \int_t^{t+b} \frac{d \dot{H}_1(u|x)}{1 - H(u|x)},$$

$$D_H(t, t+b) = \int_0^t \frac{dH_1(u|x)}{(1 - H(u|x))^2}.$$

Furthermore if  $nh^5 \rightarrow c \in (0, \infty)$ , the limit distribution of  $\hat{\varphi}_h(t|x)$  is given by

$$\sqrt{nh} (\hat{\varphi}_h(t|x) - \varphi(t|x)) \xrightarrow{D} N(c^{1/2}b(t|x), v(t|x))$$

*Remark.* As a consequence, the bandwidth that minimizes the dominant terms of the asymptotic MSE in (5) is

$$h_0 = \left( \frac{v(t|x)}{4b(t|x)^2} \right)^{1/5} n^{-1/5}.$$

## REFERENCES

Allen, L. N. and Rose, L. C. (2006). Financial survival analysis of defaulted debtors, *J. Operational Research Society*, 57, 630 -- 636.

Altman, E. I. and Saunders, A. (1997). Credit risk measurement: developments over the last 20 years, *J. Banking and Finance*, 25, 1721 - 42.

Basel Comitee on Banking Supervision (2004). International convergence of capital measurement and capital standards: a revised framework, Bank for International Settlements.

Beran, R. (1981). Nonparametric regression with randomly censored survival data, Unpublished technical report, University of California, Berkeley.

Beran, J. and Djaïdja, A. K. (2007). Credit risk modeling based on survival analysis with inmunes, *Statistical Methodology*, 4, 251-276.

Cao, R., Vilar, J.M., and Devia, A. (2008). Modelling consumer credit risk via survival analysis, Invited article with discussion, to appear in *SORT Journal*.

Carling, K., Jacobson, T., Roszbach, K. (1998). Duration of consumer loans and bank lending policy: dormancy versus default risk, Working Paper Series in Economics and Finance No. 280, Stockholm School of Economics.

Crouhy, M., Galai, D. and Mark, R. (2000). A Comparative analysis of current credit risk models, *J. Banking and Finance*, 24, 59-117.

Dabrowska, D. (1987). Non-parametric regression with censored survival time data, *Sacnd. J. Statist.*, 14, 181-197.

Dabrowska, D. (1989). Uniform consistency of the kernel conditional Kaplan-Meier estimate, *Ann. Statist.*, 17, 1157-1167.

Fleming, T. R. and Harrington, D. P. (1991). *Counting processes and survival analysis*, John Wiley & Sons, New York.

Glennon, D. and Nigro, P. (2005). Measuring the default risk of small business loans: a survival analysis approach, *J. Money, Credit, and Banking*, 37, 923-947.

González-Manteiga, W. and Cadarso-Suárez, C. (1994). Asymptotic properties of a generalized Kaplan-Meier estimator with some applications, *J. Nonpar. Statist.*, 4, 65-78.

Hamerle, A., Liebig, T. and Rösch, D. (2003). Credit risk factor modeling and the Basel II IRB Approach, Deutsche Bundesbank Discussion paper series 2, Banking and Financial Supervision, document No. 02/2003.

Hand, D.J. (2001). Modeling consumer credit risk, *IMA Journal of Management Mathematics*, 12, 139-155.

Hanson, S. and Schuermann, T. (2004). Estimating probabilities of default, Federal Reserve Bank of New York, Staff Report No. 190.

Iglesias Pérez, M. C., and González-Manteiga, W. (1999). Strong representation of a generalized product-limit estimator for truncated

and censored data with some applications, *J. Nonpar. Statist.*, 10, 213 -- 244.

Jorgensen, B. (1983). Maximum likelihood estimation and large-sample inference for generalized linear and nonlinear regression models, *Biometrika*, 70, 19-28.

Li, G. and Datta, S. (2001). A bootstrap approach to nonparametric regression for right censored data, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 53, 708-729.

Li, G. and Van Keilegom, I. (2002). Likelihood ratio confidence bands in non-parametric regression with censored data, *Scand. J. Statist.*, 29, 547-562.

Malik, M. and Thomas L. (2006). Modeling credit risk of portfolio of consumer loans, University of Southampton, School of Management Working Paper Series No. CORMSIS-07-12.

McCullagh, P. and Nelder, J.A. (1989). Generalized linear models, 2nd. Ed., Chapman and Hall, London.

Narain, B. (1992). Survival analysis and the credit granting decision. In: Thomas L., Crook, J.N. and Edelman, D.B. (eds.). *Credit Scoring and Credit Control*. OUP: Oxford, 109-121.

Roszbach, K. (2003). Bank lending policy, credit scoring and the survival of loans, *Sverriges Riksbank Working Paper Series No. 154*.

Stepanova, M. and Thomas, L. (2002). Survival Analysis methods for personal loan data, *Operations Research*, 50, 277-289.

Saunders, A. (1999). *Credit risk measurement: New approaches to value at risk and other paradigms*, John Wiley & Sons, New York.

Van Keilegom, I. and Veraverbeke, N. (1996). Uniform strong results for the conditional Kaplan-Meier estimators and its quantiles, *Comm. Statist. Theory and Methods*, 25, 2251-2265.

## Ponencia 24

### **EQUITY RISK AND LIABILITY DURATION: A SOLVENCY POINT OF VIEW**

Devolder Pierre y Dominguez Fabian Inmaculada

#### ABSTRACT

Time diversification and horizon-based strategies have been deeply analyzed as well from a theoretical point of view as for practical considerations. Based on the feeling that investment in equity is less risky on a long term horizon than on short term, different asset allocations have been developed based on so called life style strategies (you invest more in equity when you are young and you slowly decrease this proportion when ageing).

Various academic papers have tried to analyze the financial rationality of such strategies and the conclusions are very controversial between the pros and the cons!!!

Life insurance and pension schemes are off course perfect examples of products with (very) long liabilities and recent Solvency 2 rules have been proposed in order to take into account this effect on capital requirements related to the market risk (dampener technique).

The purpose of this paper is to analyze this issue from a solvency point of view and to check the opportunity of time horizon based capital requirements for long term liabilities.

**Keywords:** Equity risk, liability horizon, solvency, risk measure, life style strategy

## 1. INTRODUCTION:

Solvency requirements for insurance companies are more than ever of first importance in the context of the recent financial crisis and the achievement of Solvency 2 rules. One of the most important aspects of Solvency 2 is to recognize that risks affecting insurance companies are of different natures and that in particular, financial risks are at the heart of the question, especially for life insurance companies. Amongst the various financial drivers of risk, equity risk plays a very special role. In deed, even if traditionally insurance companies invest the biggest part in risk free instruments (bonds, cash,...), a significant proportion of premiums are invested in equity in order to boost the returns. Pension funds have also important positions in equity. At the same time, investing in equity is riskier and will require more capital. A good equilibrium has to be found between the safety of the liability proposed to the clients and the performance of the investment strategy. In this context, the standard procedures proposed by Solvency 2 tend to apply a shock of 32% on the equity index whatever is the duration of the liability; the solvency capital must be enough to support the effects of such a shock on one year. Some objections have emerged against this general rule, based on the empirical feeling that risk in equity should be less dramatic for long term liabilities (life insurance products and pension funds especially) and should therefore require less solvency capital. A less important shock should be applied in these cases. A dampener approach has been developed and tested in this context (QIS4 (2008)). The alternative formula is based on a decreasing level of the shock to apply in relation with the duration of the liabilities:

Duration of the Liabilities	Shock %
Less than 3 years	32%
3-5 years	29%
5-10 years	26%
10-15 years	23%
More than 15 years	22%

This dampener technique is in line with the time diversification theory for equity investment. The assumption to check is the following: equity risk is less dangerous on a long term horizon; therefore, long term investments could be more focused on equity. We can remark that from a practical point of view this belief is intensively used in pension funds with big proportion in equity or in personal pension planning with the so called “life style strategies” (you invest more in equity when you are young and you slowly decrease this proportion when ageing).

From an academic point of view, things are much more controversial! The classical result of Samuelson (1963, 1994) shows that for an investor following a utility function with constant relative risk aversion and assuming independent returns, the proportion of the optimal portfolio to invest in equity is constant and does not depend at all on the time horizon. Since then, different models have been developed trying to generalize different aspects such as non constant relative risk aversion, mean reversion effect on equity price or influence of the human capital [see for instance Bodie (1995), Rittman (1994,1998), Thorley (1995), Lee (1990) Campbell /Vieira (2002) ]. Conclusions are absolutely not unanimous!

We could conclude as Carlson (2006): “...Academics can prove or disprove time diversification ...The time diversification controversy is an empirical issue...”

The purpose of this paper is to use specific instruments of solvency calculation in order to test this time diversification controversy for equity risk and to see if there is any theoretical background for the dampener option as proposed in solvency 2. More precisely, instead of using as in the classical financial literature a utility framework (absolutely not in line with Basel 2 or Solvency 2 philosophy), we propose to work with risk measure instruments such as value at risk or tail value at risk. Our problem is to compare the application of such measures for short term or long term liabilities.

The paper is organized as follows. In section 2 we describe the general framework of the model in terms of asset and liability. Section 3 ana-

lyzes the influence of the time horizon on the probability of default at maturity (without introducing any extra capital). Section 4 and 5 compare the level of the needed solvency capital respectively for a one year horizon and a long term horizon using a value at risk approach. Section 6 makes the same for tail value at risk. In section 7, we propose an alternative way to take into account the time horizon: the risk is still computed on one year (as required by solvency2) but the risk is based on a fair valuation of the liability taking into account its own duration. Section 8 adapts then this approach by considering eventual liquidity concerns on short term. Numerical illustrations of the various models are presented in section 9. Section 10 concludes the paper.

## 2. GENERAL FRAMEWORK:

In order to capture the equity risk on a life insurance contract with guarantee, we consider a unit amount of money paid at time  $t=0$  (single premium) assumed to be invested (*asset side*) in an equity fund driven by a classical Brownian motion (“Black & Scholes world”). In practice, only a part of the premium is invested in equity but we are just looking here at the equity risk and at the part of the premium invested in risky assets.

On this amount paid initially by the policyholder we assume the insurer will guarantee a minimum return at a fixed maturity  $t = N$  (*liability side*). For  $N=1$ , we have a yearly guarantee (horizon of one year as in Solvency 2). The guarantee can be only nominal (0% guarantee corresponding to a pure financial equity risk) or based on a positive minimum return denoted by  $r_G$ . In general we assume:  $r_G \geq 0$

If we denote by  $A(t)$  the value of the equity asset, one has for a geometric Brownian motion:

$$A(t) = \exp((\delta - \sigma^2 / 2)t + \sigma w(t)) \quad (0 \leq t \leq N) \quad (1)$$

where:  $\delta$  = mean return of the equity fund  
 $\sigma$  = volatility of the equity fund

$w$  = standard Brownian motion.

The liability at maturity is given by:

$$L(N) = e^{r_G N} \quad (2)$$

### 3. PROBABILITY OF DEFAULT:

A first interesting computation is to look at the probability of ruin without any extra capital (the risk to have not enough assets at maturity comparing with the liability to be paid).

In particular we can consider this probability as a function of the time horizon  $N$ .

For  $t=1$  we have the probability of ruin on one year (cf. Solvency 2 approach).

For  $t=N$  greater than one, we can take into account the real duration of the liability.

In general one has the following value for this probability:

$$\begin{aligned} P(A(N) < L(N)) &= P(\exp((\delta - \sigma^2 / 2)N + \sigma w(N)) < e^{r_G N}) \\ &= P(\delta - \sigma^2 / 2)N + \sigma w(N) < N r_G \\ &= P(w(N) < \frac{N(r_G - (\delta - \sigma^2 / 2))}{\sigma}) \\ &= \Phi\left(\frac{N(r_G - (\delta - \sigma^2 / 2))}{\sigma \sqrt{N}}\right) \\ &= \Phi(a\sqrt{N}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{with } a = \frac{r_G - (\delta - \sigma^2 / 2)}{\sigma}$$

representing the spread between the guaranteed rate and the mean return normalized by the volatility.

For a coherent level of guarantee (compared to the mean return of the asset), this spread is negative:

$$r_G < \delta - \sigma^2 / 2$$

Then the probability of ruin decreases with the time horizon. Section 9.1. shows this uniform evolution of the probability of default in relation with the horizon.

We can conclude here that investing in equity for the long run gives better chance to achieve a fixed guaranteed return. This could lead to more aggressive strategies for long duration. But we can wonder if same conclusions can be drawn using other risk measures more coherent with Solvency 2 like value at risk or tail value at risk.

#### 4. VALUE AT RISK ON ONE YEAR:

The Solvency 2 framework is based on a quantile measurement. So we will use in this section the value at risk methodology. We introduce the following notations:

CV = initial solvency capital using a value at risk methodology

VaR = value at risk

r = risk free rate

$\alpha$  = safety level (99.5% on one year in Solvency 2)

Then we have on a horizon of one year and assuming first that the solvency capital is invested in riskless assets:

$$P\{A(1) + CV \cdot e^r < L(1)\} = 1 - \alpha \quad (4)$$

This probability is given by:

$$\begin{aligned} P\{e^{\delta - \sigma^2 / 2 + \sigma w(1)} + CV \cdot e^r < e^{r_G}\} &= P\{w(1) < \frac{\ln\{-CV \cdot e^r\} + r_G - (\delta - \sigma^2 / 2)}{\sigma}\} \\ &= \Phi\left(\frac{\ln\{-CV \cdot e^r\} + r_G - (\delta - \sigma^2 / 2)}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

So we obtain in this case the following value for the solvency capital:

$$CV = \frac{e^{r_G} - e^{\delta - \sigma^2/2 + \sigma z_{1-\alpha}}}{e^r} \quad (5)$$

where  $z_b = b$  quantile of the normal distribution

We could also assume that the initial capital is invested in the risky asset (cf. Briys /De Varenne (1997)). Then the condition (4) becomes:

$$P\{A(1) + CV.A(1) < L(1)\} = 1 - \alpha \quad (6)$$

Similar direct computations lead to the following alternative value of the solvency capital CV\*:

$$CV^* = e^{(r_G - (\delta - \sigma^2/2)) - \sigma z_{1-\alpha}} - 1 \quad (7)$$

## 5. VALUE AT RISK AT MATURITY:

We can extend the computation of the value at risk on a longer horizon of N years based on the final maturity of the liability. We must also adapt then the safety level.

Equation (4) becomes then for a capital invested in the riskless asset :

$$P\{A(N) + CV.e^{rN} < L(N)\} = 1 - \alpha_N \quad (8)$$

For the safety level we can for instance choice the following value based on yearly independent default probabilities ( probability of default of  $1 - \alpha$  each year):

$$\alpha_N = (\alpha)^N$$

Direct computation shows then that the solvency capital becomes:

$$CV = \frac{e^{r_G N} - e^{(\delta - \sigma^2/2)N + \sigma\sqrt{N} z_{1-\alpha_N}}}{e^{rN}} \quad (9)$$

Section 9.2. presents different simulations of this value at risk seen as a function of the duration of the liability N. Depending on the parameters, this function is no more strictly decreasing and can present various shapes.

We can no more conclude here in absolute terms that the risk measure is systematically a decreasing function of the time horizon even if a decreasing form appears on long term.

We can also compute the capital on a horizon of N years assuming an investment of this capital in the risky asset instead of the riskless asset; then it can be easily shown that the capital (9) becomes:

$$CV^* = e^{N(r_G - (\delta - \sigma^2/2)) - \sigma\sqrt{N}z_{1-\alpha_N}} - 1 \quad (10)$$

## 6. TAIL VALUE AT RISK:

Value at risk is a classical tool in risk management and is the reference for Basel 2 and Solvency 2. But from a theoretical point of view it is well known that value at risk presents some important problems (Artzner et al (1997)).

The methodology presented above can be extended for instance using tail value at risk instead of value at risk. Assuming that the solvency capital is invested in the riskless asset and denoting by:

CT = initial solvency capital using a tail value at risk methodology

then we obtain:

$$CT(N) = e^{-rN} (E\{L(N) - A(N) \mid L(N) - A(N) > V_{\alpha_N}\})$$

with

$$V_{\alpha_N} = e^{r_G N} - e^{(\delta - \sigma^2/2)N + \sigma\sqrt{N} \cdot z_{1-\alpha_N}}$$

Then using the properties of the log normal distribution we get:

$$\begin{aligned} CT(N) &= e^{-rN} (e^{r_G N} - E\{A(N) \mid A(N) < e^{(\delta - \sigma^2/2)N + \sigma\sqrt{N}z_{1-\alpha_N}}\}) \\ &= e^{-rN} (e^{r_G N} - e^{\delta N} \frac{1}{1 - \alpha_N} \Phi(z_{1-\alpha_N} - \sigma\sqrt{N})) \end{aligned}$$

Finally:

$$CT(N) = e^{(r_G - r)N} - e^{(\delta - r)N} \frac{1}{1 - \alpha_N} \Phi(z_{1-\alpha_N} - \sigma\sqrt{N}) \quad (11)$$

Section 9.3. presents different simulations of this tail value at risk seen as a function of the duration of the liability N. Conclusions are quite similar to those obtained using a value at risk approach.

## 7. VALUE AT RISK USING A FAIR VALUATION OF THE LIABILITY ON ONE YEAR

The different approaches presented in the preceding sections show undoubtedly that a “horizon effect” exists in terms of measurement of the equity risk based on solvency tools.

Nevertheless the “Solvency 2” horizon is defined on one year and it could seem difficult to reconcile this one year constraint with risk measures on a longer horizon as presented above.

An alternative way developed here is to work on a one year horizon even for liability with longer duration but to introduce a fair value of the liability after one year. This fair value will then depend on the remaining time to maturity. We will assume in this section no liquidity for this liability: the liability can only be paid at maturity (for instance retirement age for pension fund). Assuming that the solvency capital is invested in the riskless asset, formula (4) becomes now:

$$P\{A(1) + CV \cdot e^r < FVL(1)\} = 1 - \alpha \quad (12)$$

where : FVL(1) = fair value of the liability at time t=1

This fair value at time t=1 of a fixed amount to be paid at time t=N is simply given by ( zero coupon bond classical formula) :

$$\text{FVL}(1) = L(N) / e^{r(N-1)} = \frac{e^{r_G N}}{e^{r(N-1)}} \quad (13)$$

Using the same calculations as in section 4 we get the capital given by :

$$\text{CV} = \frac{\text{FVL}(1) - e^{\delta - \sigma^2/2 + \sigma z_{1-\alpha}}}{e^r} = \frac{e^{r_G N - r(N-1)} - e^{\delta - \sigma^2/2 + \sigma z_{1-\alpha}}}{e^r} \quad (14)$$

For a consistent value of the guarantee (  $r_G < r$  ) this capital is now clearly a decreasing function of the duration of the liability. Section 9.4. illustrates this effect.

## 8. LIQUIDITY EFFECT:

Section 7 is based on the assumption of an illiquid liability (only to be paid at maturity).

Formula (14) can then be applied for the computation of the capital. At the opposite, formula (5) can be seen as the needed capital for a completely liquid liability after one year.

We could develop an intermediate model assuming that a certain part of the long term liability is liquid (for instance surrender value of a life insurance contract) and could be paid after one year and the other part will remain till maturity.

If we denote by:

$\beta$  = liquid part of the liability

$\rho$  = eventual reduction factor applied in case of surrender at time t = 1

$$CT(N) = e^{(r_G - r)N} - e^{(\delta - r)N} \cdot \frac{1}{1 - \alpha_N} \Phi(z_{1 - \alpha_N} - \sigma\sqrt{N})$$

then the fair value at time t=1 becomes for N > 1:

$$FVL(1) = (1 - \beta) \frac{e^{r_G N}}{e^{r(N-1)}} + \beta \cdot \rho e^{r_G} \quad (15)$$

Substituting in formula (14) we get:

$$CV = \{(1 - \beta) e^{(r_G - r)N} + \beta \rho e^{r_G - r}\} - e^{\delta - r - \sigma^2/2 + \sigma z_{1 - \alpha}} \quad (16)$$

This capital is again normally a decreasing function of the time horizon N. Section 9.5. illustrates this situation.

## 9. NUMERICAL ILLUSTRATIONS:

We present in this section various numerical illustrations of the solvency formulas developed in the previous sections.

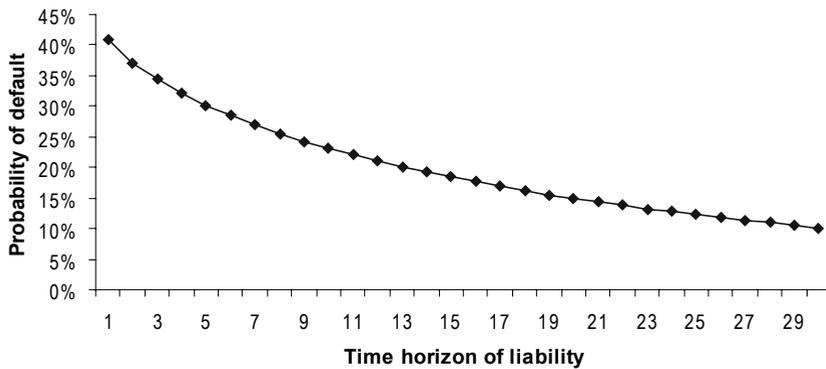
We will work with the central following scenario:

- guaranteed rate:  $r_G = 2\%$
- risk free rate :  $r = 4\%$
- mean return of the equity fund :  $\delta = 7\%$
- volatility of the equity fund :  $\sigma = 16\%$
- safety level on one year :  $\alpha = 99.5\%$
- safety level on N years :  $\alpha_N = (\alpha)^N$

$$CT(N) = e^{(r_G - r)N} - e^{(\delta - r)N} \cdot \frac{1}{1 - \alpha_N} \Phi(z_{1 - \alpha_N} - \sigma\sqrt{N})$$

### 9.1. Probability of default:

Graph 1 gives the evolution of the probability of default in relation with the time horizon of the liability (decreasing function):

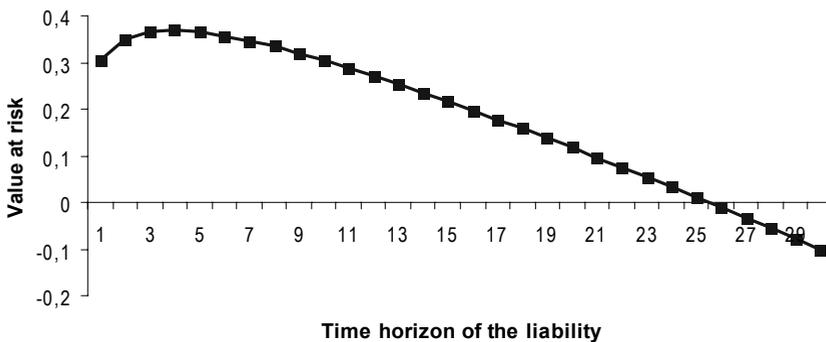


**Graph 1:** Probability of defau

For this scenario, the probability of default on one year is equal to 40.81% ; on 30 years this probability becomes only 10.14%.

**9.2. Value at risk:**

Graph 2 gives the evolution of the value at risk (safety of 99.5% on one year as in Solvency 2).

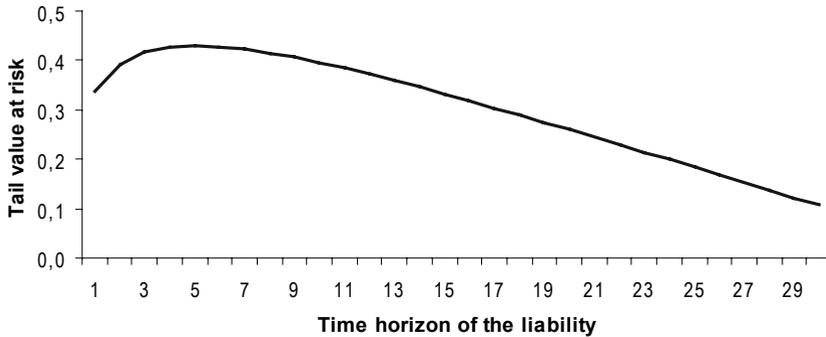


**Graph 2:** Value at risk

The value at risk on one year is equal to 30.65%, increasing to 36.85% on 4 years and then decreasing. Negative values of the capital correspond to situations where no capital is needed.

### 9.3. Tail Value at risk :

Graph 3 gives the evolution of the Tail value at risk (corresponding to a safety level of 99.5% on one year).

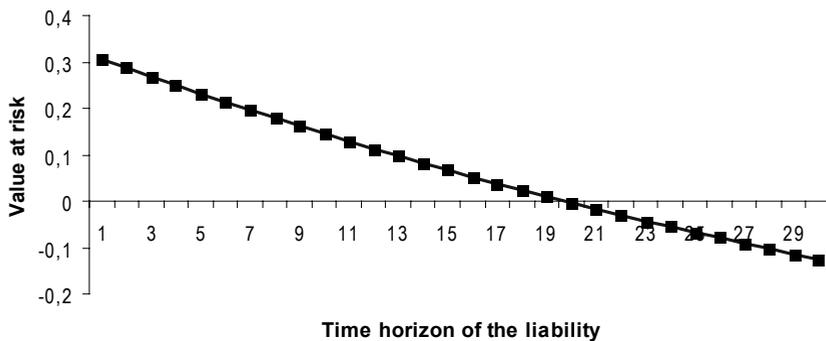


**Graph 3:** Tail Value at risk

The Tail value at risk on one year is equal to 33.90%, increasing to 43% on 5 years and then decreasing.

### 9.4. Value at risk with fair valuation:

Graph 4 gives the evolution of the value at risk on one year based on the fair valuation of an illiquid liability



**Graph 4:** Value at risk on one year with fair valuation

As expected the solvency capital in this case is a decreasing function of the time horizon.

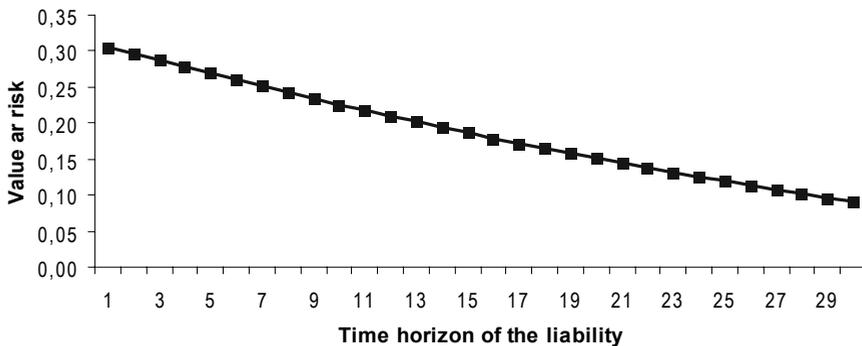
Value at risk on one year is of course, as in case 9.2., equal to 30.65%; this value decreases respectively after 10 years and 15 years, to 14.50% and 6.71%.

### 9.5. Value at risk with fair valuation and liquidity risk:

We introduce now a liquidity risk of 50% without any penalty on the surrender value.

( $\beta = 50\%$ ;  $\rho = 1$ )

Graph 5 gives then the evolution of the needed capital.



**Graph 5:** Value at risk on one year with fair valuation and liquidity

Value at risk on one year is still equal to 30.65%; this value decreases respectively after 10 years and 15 years, to 22.57 % and 18.68 %.

## 10. CONCLUSION

Using solvency tools instead of utility theory shows clearly significant “time horizon” effects on the needed capital for the equity risk. Two different approaches have been proposed. First risk measures have been computed on various horizons. “Value at risk” and “Tail value at risk” present similar shapes. In particular a decreasing trend on long term can be observed. A second approach is to maintain in all cases a measurement of the risk on one year but to take into account fair valuation of the liability and liquidity risk. Further researches will consider more general models for the underlying asset (jumps effect, Levy processes or mean reversion assumption).

## REFERENCES

Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., and Heath D. Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance* **9**, pp. 203-228, 1999

Bodie, Z. On the Risks of Stocks in the Long Run. *Financial Analysts Journal* **51(3)**, pp.68-76, 1995

Bodie, Z, Merton and Samuelson. Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Lifecycle Model , *Journal of Economic Dynamics and Control* **16(3)**, pp.427-449, 1992

Briys E., de Varenne F. On the Risk of Life Insurance Liabilities: Debunking Some Common Pitfalls, *Journal of Risk and Insurance* **64(4)**, pp. 673-694, 1997

Campbell J., Viceira L. *Strategic Asset Allocation – Portfolio Choice for Long term Investors*, Oxford University Press, 2002

Karlsson A. Time Diversification in Pension Savings, Working Paper, *SSRN series*, 2006

Kritzman, M. What practitioners need to know...about time diversification. *Financial Analysts Journal* **50(1)**, pp. 14-18, 1994

Kritzman, M. and Rich D. Beware of Dogma, *Journal of portfolio Management* **24**, pp.66-77, 1998

Lee,W. Diversification and Time, Do Investment Horizons matter?, *Journal of Portfolio Management* **4**, pp. 60-69, 1990

Merton R. *Continuous Time Finance*, Wiley, 1992

Pflug G., Romisch W.: *Modeling, Measuring and Managing Risk*, World Scientific, 2007

Samuelson, Paul. The Long Term Case for Equities. *Journal of Portfolio Management* **21(1)**, pp 15-24, 1994

Samuelson P. Risk and uncertainty : A fallacy of Large Numbers, *Scientia*, **98**, pp. 108-113, 1963

Thorley S. The Time Diversification Controversy, *Financial Analyst Journal* **51(3)**, pp. 18-22, 1995

QIS 4. Technical Specifications, 2008

[http://ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/docs/solvency/qis4/technical\\_specifications\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis4/technical_specifications_en.pdf)

QIS 4: Final Report, 2008

<http://www.ceiops.eu/media/files/consultations/QIS/CEIOPS-SEC-82-08%20QIS4%20Report.pdf>

## Ponencia 25

### **ANÁLISIS DEL RIESGO DE TIPOS DE INTERÉS EN SOLVENCIA II: MODELOS INTERNOS FRENTE AL MODELO ESTÁNDAR<sup>51</sup>**

Pablo Durán Santomil, Luís A. Otero González  
y Sara Fernández López

#### **RESUMEN**

Solvencia II transformará el sistema de determinación de las necesidades de capital del asegurador. En el nuevo marco regulatorio se propone un modelo estándar, pero al mismo tiempo, se fomenta la aplicación de modelos internos de autoevaluación y gestión del riesgo. Este trabajo se centra en la elaboración de un modelo interno para el riesgo de tipos de interés para una compañía aseguradora no vida. Para ello, se han utilizado datos mensuales de la serie de tipos de interés del periodo Enero de 2001 a Junio de 2008. Los modelos de equilibrio ajustados (modelo de Vasicek, CIR y Vasicek de dos factores) simulan de forma satisfactoria los comportamientos históricos de los tipos de corto plazo. Sin embargo, estos modelos fallan para describir los tipos a muy largo plazo lo cual es relevante para las compañías aseguradoras de vida. Posteriormente, hemos comparado la determinación de capital resultante de aplicar estos modelos estocásticos de tipos de interés frente a la propuesta del cuarto estudio de impacto cuantitativo (QIS4) para una hipotética compañía de seguros no vida. Los resultados obtenidos muestran que los capitales necesarios para soportar el riesgo de interés son dependientes de la especificación empleada.

**PALABRAS CLAVE:** QIS4, modelos internos, riesgo de tipos de interés, Solvencia II, aseguradoras no vida.

<sup>51</sup> Programa de investigación María Barbeito - Xunta de Galicia.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los cambios en tipos de interés pueden afectar a la solvencia de la compañía aseguradora porque sus activos y los pasivos están correlacionados con los movimientos de éstos. Los aseguradores de no vida están expuestos al riesgo de tipos de interés en el activo porque los valores de mercado de los títulos de renta fija se reducen cuando los tipos de interés aumentan. Por el lado de los pasivos, en la medida en que la inflación está correlacionada con los tipos de interés y los pagos futuros por siniestros recogidos en las provisiones están relacionados con la inflación, el valor nominal de los pasivos tenderá a incrementarse con los tipos de interés. De esta forma un incremento en los tipos de interés conduce a una caída en el valor de mercado de los activos y a un incremento del valor de los pasivos, reduciendo el excedente de la compañía.

En Solvencia II se realizará el cálculo del requisito de capital de solvencia (SCR) bien mediante modelos internos aprobados por el regulador bien empleando la fórmula que se establezca con carácter general. El SCR calculado por medio de la fórmula general o de un modelo interno, debe corresponderse con el capital económico que han de poseer las compañías aseguradoras para limitar la probabilidad de ruina al 0,5 % a un horizonte de un año, lo que se corresponde al valor en riesgo (VaR) con un nivel de confianza del 99,5 %. En el cálculo del SCR, dentro del módulo de riesgo de mercado, se incluye el riesgo de tipos de interés. Este riesgo mide la sensibilidad del valor de los activos, pasivos e instrumentos financieros frente a las variaciones en la estructura temporal de los tipos de interés o su volatilidad.

Este trabajo analiza distintos modelos estocásticos de equilibrio de tipos de interés para evaluar el riesgo resultante en Solvencia II. Los distintos modelos analizados han sido calibrados a la serie mensual de tipos entre Enero de 2001 a Junio de 2008 y su bondad de ajuste se valora tanto en los niveles de tipos a corto plazo generados. Para alcanzar estos objetivos, este trabajo se estructura en los siguientes seis apartados. En el apartado 2 se realiza una revisión teórica de las

distintas alternativas propuestas para modelizar los tipos de interés. Posteriormente, en el apartado 3 se proponen las principales características que debe incorporar un modelo de tipos de interés. En el apartado 4 se especifican las alternativas de modelos de equilibrio para la simulación de los tipos de interés que serán empleadas en este trabajo. El apartado 5 se dedica a evaluar el ajuste al comportamiento histórico de los tipos de interés generados por los modelos simulados. Finalmente, el apartado 6 muestra una aplicación práctica de las cifras de capital resultantes de los distintos modelos evaluados en contraposición al modelo estándar propuesto en QIS 4. El trabajo finaliza con las principales conclusiones obtenidas.

## 2. CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE TIPOS DE INTERÉS

Los modelos de tipos de interés intentan describir la dinámica de los tipos de interés en el futuro con el objetivo de realizar la valoración de los flujos de caja sensibles a éstos. En las compañías aseguradoras, tanto los valores de los activos como los de los pasivos están expuestos a variaciones en los tipos de interés. Los modelos generadores de tipos de interés que se pueden emplear en el contexto del desarrollo de un modelo interno pueden ser determinísticos o estocásticos.

Los *modelos determinísticos* establecen los valores de los tipos de interés de forma prefijada o a priori. Es decir, es el usuario del modelo o el regulador el que establece los tipos de interés que se desean probar en el modelo. Su principal interés reside en evaluar el comportamiento de una compañía de seguros ante un conjunto de escenarios predeterminados, siendo de gran utilidad en el análisis de escenarios de estrés. La generación de escenarios deterministas coherentes con otras variables financieras y aseguradoras también debe ser efectuada por el usuario. De esta forma, se suelen establecer los valores de las distintas variables en estos reducidos escenarios en base a las relaciones históricas o en nuestras expectativas futuras. En este sentido se puede probar de forma sencilla el efecto directo del cambio en el nivel de una variable sobre nuestra variable *output* y también el cambio de la relación entre las distintas variables.

Los *modelos estocásticos* generan los tipos de interés aleatoriamente sobre la base de una fórmula matemática. Estos modelos son de gran utilidad para evaluar el comportamiento de una compañía de seguros ante un conjunto muy amplio de escenarios futuros. Presentan como principal ventaja que gracias a la simulación estocástica de escenarios correlacionados (método de Cholesky, cópulas, etc.) es fácil generar escenarios coherentes para las distintas variables y se puede obtener fácilmente la distribución de probabilidades de éstas. Su principal desventaja es la mayor complejidad de su implementación. Las fundamentales fases para emplear un modelo de tipos estocástico son: el análisis de los datos históricos, la elección del modelo, la estimación de los parámetros, el análisis de las correlaciones con otro/s modelo/s, la simulación del modelo y el análisis de los resultados obtenidos para asegurarnos que los escenarios simulados son realistas tanto en niveles como en la congruencia de éstos entre las distintas variables del modelo (estructura de dependencia).

Los modelos estocásticos de tipos de interés a emplear en un modelo interno provienen fundamentalmente de los desarrollos logrados en el ámbito de las finanzas. En este campo se han propuesto múltiples modelos estocásticos de tipos de interés, si bien debe mencionarse que no existe un modelo adecuado para todos los usos posibles. Dentro del marco teórico los modelos estocásticos de tipos de interés se pueden clasificar en modelos de equilibrio y modelos sin arbitraje o libres de arbitraje. Cada tipo de modelo tiene ventajas dependiendo del ámbito de empleo. Para las proyecciones a largo plazo, las trayectorias de simulación de los modelos sin arbitraje pueden llegar a ser extremas por lo que a priori no se recomienda su empleo para la simulación de escenarios económicos como en el análisis financiero dinámico (DFA)<sup>52</sup>. Sin embargo si el objetivo del modelo de tipos fuese la valoración de distintos instrumentos financieros este tipo de modelos serían los más adecuados.

---

<sup>52</sup> El análisis financiero dinámico (DFA) es una técnica adecuada para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II. Los modelos DFA emplean técnicas de simulación de tipo Monte Carlo para predecir los resultados de la compañía ante un conjunto de escenarios futuros, mostrando cómo dichos resultados pueden estar afectados por cambios distintas variables.

Los *modelos de equilibrio* o endógenos se clasifican generalmente según el número de variables de estado entre modelos unifactoriales y modelos multifactoriales. Los modelos factoriales asumen que el mercado está en equilibrio y se basan en hipótesis para los tipos de interés a corto plazo<sup>53</sup>, que se derivan generalmente de una serie de supuestos más generales sobre la economía, los factores que mueven la estructura temporal de tipos de interés y sobre el proceso estocástico que sigue dicha variable. A partir de los supuestos realizados, se intenta explicar la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI)<sup>54</sup>, que está totalmente determinada por el valor del/los parámetro/s del modelo, por lo que la ETTI es una variable endógena. Una ventaja es que los modelos de equilibrio resultan comparativamente más fáciles de utilizar que los modelos sin arbitraje. Sin embargo, en el lado negativo, generan curvas de interés que no son consistentes con las del mercado, ya no se logra un ajuste perfecto a los tipos de interés observados en cada instante del tiempo.

Los *modelos libres de arbitraje* o *exógenos* comienzan con la hipótesis de que no hay oportunidades de arbitraje en el mercado, es decir, no hay una estrategia financiera que sin asumir riesgo nos reporte una ganancia. En estos modelos se toma como dada la estructura temporal observada y, a partir de ella, se derivan los movimientos futuros de los tipos de interés de modo que no existan oportunidades de arbitraje. Trabajos representativos de este enfoque son Ho y Lee (1986), Hull y White (1990), Black, Derman y Toy (1990), Black y Karasinski (1991) y Heath, Jarrow y Morton (1992). La ventaja de estos modelos es su ajuste a la estructura de tipos existente en el mercado. Por la contra, estos modelos son con frecuencia más difíciles de utilizar. Además, en muchos modelos de estos modelos el tipo a plazo o *forward* desempeña un papel central en la trayectoria prevista de los tipos de interés a corto, por lo que dependiendo de la pendiente existente de la curva de tipos de interés, los tipos a plazo pueden comportarse de manera extraña. De esta forma, para las curvas de tipos normales inclinadas el tipo a plazo puede llegar a ser

---

<sup>53</sup> Los modelos multifactoriales también establecen hipótesis para las otras variables de estado y sobre su proceso estocástico.

<sup>54</sup> La ETTI refleja la relación entre los tipos de interés y los diferentes plazos.

muy grande. Para las curvas invertidas, el tipo a plazo puede incluso llegar a ser negativo.

Para analizar el tipo de modelos a emplear en la generación de escenarios en un contexto DFA, Ahlgrim, D'Arcy, y Gorvett (1999) han probado modelos de tipos de interés de equilibrio y sin arbitraje para determinar su utilidad en emparejar los movimientos del tipo de interés. Estos autores muestran que los modelos libres de arbitraje pueden tender a niveles poco realistas (valores extraordinario altos o negativos) cuando se simulan sobre un periodo largo de tiempo. Aunque los modelos de arbitraje libre se prefieren para tasar los derivados sobre tipos de interés en los cuales el marco de tiempo es muy corto, no son muy útiles para generar escenarios de tipo de interés a largo plazo.

Dentro de los *modelos generales de equilibrio*, se debe determinar cuántos parámetros incluir. Los modelos se clasifican basados en el número de los factores que se permite variar de forma que se habla de modelos uni y multifactoriales. Usar más parámetros aumenta obviamente la complejidad de un modelo, así que uno debe considerar si la complejidad agregada aporta suficientes ventajas. Los modelos de un factor tienen solamente una variable, generalmente el tipo de interés a corto plazo. Mientras, los modelos de dos factores permiten variar el tipo de interés a corto plazo y otro factor, generalmente la volatilidad, la tasa de inflación o el tipo a medio o a largo plazo. Otros modelos permiten que tres o más factores varíen. Ahlgrim (2001) determinó que un modelo de un factor era suficiente para un modelo de DFA de una compañía aseguradora no vida. Por el contrario un modelo de más factores podría ser más apropiado para un asegurador de vida, debido a que sus productos y su estructura financiera son más sensibles a las fluctuaciones de los tipos de interés.

### **3. CARACTERÍSTICAS DE UN MODELO DE TIPOS DE INTERÉS**

Antes de describir los principales modelos de equilibrio discutimos algunas características generales de los movimientos del tipo de inte-

rés. Nuestra tentativa es proporcionar una cierta forma intuitiva para un modelo del tipo de interés (véase, por ejemplo, Rebonato 1998):

1. La volatilidad de tipos de diversa madurez varía. En particular, los tipos a largo plazo no varían tanto como los tipos a más corto plazo.
2. Los tipos de interés revierten a la media. Históricamente los aumentos del tipo de interés tienden a ser seguidos por disminuciones de tipos; inversamente, cuando los tipos caen, tienden a ser seguidos por aumentos.
3. Tipos de interés de diversa madurez se correlacionan imperfectamente. El grado de correlación decrece a medida que los vencimientos están más alejados. Esto quiere decir que están más correlacionados el tipo de interés a 6 meses con el tipo a un año que lo que están el tipo a 20 años con el tipo a 20 años y 6 meses
4. La dispersión de los tipos a corto plazo debe ser consistente con nuestras expectativas de valores probables, en particular los tipos nominales no deben ser negativos ni permitir valores extremadamente elevados.
5. Se ha observado que la volatilidad de los tipos a corto plazo carece de homocedasticidad. De acuerdo con los resultados divulgados en Chan *et al.* (1992) (de aquí en adelante CKLS, 1992), la volatilidad de los tipos de interés debe ser proporcional al nivel de los tipos (heterocedasticidad).

Ningún modelo elaborado hasta la fecha captura todas las características mencionadas arriba. Por lo tanto, al elegir un modelo de tipos de interés debe entenderse cuáles de estas características son importantes para su uso concreto. Para la simulación de escenarios realistas a largo plazo se considera fundamental la reversión a la media de los tipos de interés. Esta característica presume que cuando los niveles de tipos de interés sean muy altos o muy bajos tenderán a invertirse a niveles “normales”. Hull (1997) afirma que la reversión de los tipos de interés tiene sólidos argumentos económicos a favor: cuando los tipos

de interés son altos (bajos), hay menos (más) demanda por parte de los prestatarios lo cual induce un descenso (aumento) en el valor de dichos tipos de interés. Otra característica deseada por un modelo de tipos de interés es que proporcione una forma analítica para la curva de tipos de interés a plazo. De esta forma los modelos analizados posteriormente en este trabajo tendrán estas dos características: reversión a la media en los tipos de interés a corto plazo y forma analítica para la ETTI.

## 4. MODELOS DE EQUILIBRIO

Los modelos de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) surgieron inicialmente para comprender las dinámicas de los precios de los bonos. Muchos modelos de tipos de interés son modelos sencillos de la evolución estocástica de un tipo de interés, donde es habitual emplear el tipo a corto plazo. Este tipo de interés se define como markoviano, es decir, la evolución futura depende solo de su valor inicial y no de su historia (la trayectoria seguida hasta ese momento). La mayoría de los modelos de tipos de interés estocásticos están especificados en lo referido a la dimensión temporal en un marco continuo. El cálculo estocástico en tiempo continuo permite derivaciones y demostraciones más elegantes, y proporciona el marco adecuado para producir soluciones teóricas más precisas. Esto es debido a que las funciones de procesos en tiempo continuo tienen características deseables como la continuidad y la diferenciación, lo que permite a muchas de estas funciones tener formas analíticas que proporcionan soluciones sin tener que recurrir a procedimientos numéricos. Sin embargo, la principal desventaja de operar en tiempo continuo es que requiere de una mayor complejidad matemática.

### 4.1 Modelos de equilibrio unifactoriales

Los modelos de equilibrio unifactoriales en tiempo continuo suponen generalmente que la única variable de estado relevante es el tipo de interés instantáneo,  $r_t$ . Estos modelos de difusión parten generalmente de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t) dW_t$$

Donde  $dr_t$  indica el cambio en el tipo de interés instantáneo,  $\mu(r_t)$  y  $\sigma(r_t)\sigma(r_t)$  son las funciones de la deriva y la difusión del proceso estocástico y  $dW_t$  es un movimiento browniano. Bajo esta modelización, tanto la media condicional como la varianza condicional de los cambios en el tipo de interés instantáneo dependen del nivel de los tipos. La anterior ecuación puede reescribirse en función de los parámetros de los que dependen generalmente las funciones de la deriva y la difusión,

$$dr_t = \mu(r_t, \theta)dt + \sigma(r_t, \theta) dW_t$$

Esta ecuación diferencial estocástica (SDE) engloba un amplio abanico de modelos según las distintas especificaciones concretas que proponga cada autor para la ecuación de la deriva  $\mu(r_t, \theta)$  y la difusión  $\sigma(r_t, \theta)\sigma(r_t, \theta)$  del proceso<sup>55</sup>. De esta forma Longstaff (1989) propone un modelo al que comúnmente se refiere como el modelo de la doble raíz cuadrada ya que tanto la deriva como la difusión están en función de la raíz cuadrada del nivel de los tipos de interés. Chan *et al.* (1992) trabajan con un proceso cuya deriva es lineal y cuya difusión depende del nivel de los tipos de interés. Este proceso tiene como casos particulares varios de los modelos más empleados (Vasicek, 1977; Cox *et al.* 1985; etc.). Constantinides (1992) establece un proceso para los tipos de interés nominales en el que la deriva es una función no lineal del tipo de interés y en el que la volatilidad tiene reversión a la media. La versión unifactorial del modelo de Duffie y Kan (1996)<sup>56</sup> refleja que los tipos de interés presentan reversión a la media y que su volatilidad también tiende a largo plazo a un nivel constante. Por último, el modelo de Aït-Sahalia (1996)<sup>57</sup> supone un proceso con deriva y volatilidad no lineales. Las especificaciones de las funciones para la deriva y la difusión de los anteriores modelos se muestran en la Tabla 1.

<sup>55</sup> La deriva (*drift*) representa la parte de los cambios en los tipos de interés determinista o predecible, por lo que a veces se denomina cambio esperado. La difusión (*diffusion*) representa la volatilidad de los cambios en los tipos de interés.

<sup>56</sup> Duffie y Kan (1996) proponen un modelo multifactorial, conocido como exponencial-afín, en el que las rentabilidades asociadas a unos bonos cupón cero con determinados vencimientos siguen un proceso multivariante markoviano con volatilidad estocástica.

<sup>57</sup> El modelo de Aït-Sahalia (1996) englobaría al modelo de Chan *et al.* (1992) y por tanto a sus versiones. Los resultados de su investigación muestran una fuerte no-linealidad de la deriva del proceso y un incremento de la volatilidad cuando los tipos de interés toman valores extremos.

**Tabla 1**

Ecuación de la deriva y de la difusión

Modelo	$\mu(r_t, \theta)$	$\sigma(r_t, \theta)$
Longstaff (1989)	$\alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{r_t}$	$\beta_0 \sqrt{r_t}$
CKLS (1992)	$\alpha_0 + \alpha_1 r_t$	$\beta_0 r_t^\gamma$
Constantinides (1992)	$\alpha_0 + \alpha_1 r_t + \alpha_2 \sqrt{r_t - \alpha_3}$	$\beta_0 (r_t - \beta_1)$
Duffie y Kan (1996)	$\alpha_0 + \alpha_1 r_t$	$\sqrt{\beta_0 \beta_1 r_t}$
Aït-Sahalia (1996)	$\alpha_0 + \alpha_1 r_t + \alpha_2 r_t^2 + \alpha_3 / r_t$	$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 r_t^\gamma$

Los modelos de un factor explicativo asumen que toda la información de la estructura de la curva de tipos puede ser resumida por un factor, normalmente el tipo de interés a corto plazo. Son muchos los modelos de tipos de interés continuos que se han construido en la literatura financiera. Nosotros vamos a centrarnos en los principales modelos dinámicos de un factor explicativo que se englobarían en el trabajo de CKLS (1992). Con las oportunas restricciones a este modelo general obtenemos en particular los modelos de Merton (1973); Vasicek (1977); Cox *et al.* (1985) o CIR (1985); Dothan (1978), Brennan y Schwartz (1980), Cox *et al.* (1980) o CIR (1980) y los denominados modelos GBM y CEV.

Siguiendo a CKLS (1992) la *forma general* de estos modelos se describe en términos de cambio en los tipos a corto plazo en la forma:

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$$

Ecuación que podemos reescribir para darle un mayor sentido económico a sus parámetros como:

$$dr_t = -\beta \left( \frac{\alpha}{-\beta} - r_t \right) dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$$

Por lo que igualando  $\kappa = -\beta$  y  $\mu = \frac{\alpha}{-\beta}$  resulta:

$$dr_t = \kappa (\mu - r_t) dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$$

Donde:

$dr_t$  es el cambio continuo en el nivel actual de los tipos a corto plazo

$\kappa$  es la velocidad de reversión a la media de los tipos a corto plazo

$\mu$  es el tipo al cual reversion los tipos de interés a corto plazo

$\sigma$  es la volatilidad (desviación estándar) de los tipos a corto

$\gamma$  es el exponente condicional de la volatilidad de los cambios de tipos de interés

$W_t$  es un movimiento browniano estándar

La *forma general* de CKLS (1992) agrupa un conjunto de modelos de tipos a corto plazo continuos unifactoriales que se resume en la siguiente tabla. Los modelos concretos se obtienen simplemente imponiendo restricciones sobre los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  del modelo extendido de CKLS (1992).

**Tabla 2**  
Modelo general y versiones restringidas de CKLS (1992)

Modelo	Restricciones			Fórmula
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	
CKLS (1992)	Sin restricciones			$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$
Merton (1973)		0	0	$dr_t = \alpha dt + \sigma dW_t$
Vasicek (1977)			0	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma dW_t$
CIR (1985) CIR SR			1/2	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$
Dothan (1978)	0	0	1	$dr_t = \sigma r_t dW_t$
GBM	0		1	$dr_t = \beta r_t dt + \sigma r_t dW_t$
Brennan y Schwartz (1980)			1	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t dW_t$
CIR (1980) CIR VR	0	0	3/2	$dr_t = \sigma r_t^{3/2} dW_t$
CEV	0			$dr_t = \beta r_t dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$

De estos modelos analizados los dos únicos modelos que contienen las dos características que le habíamos requerido, reversión a la media en los tipos de interés a corto plazo y forma analítica para la ETTI,

son el modelo de Vasicek y el modelo CIR-SR. El modelo de Vasicek (1977) supone un proceso Ornstein-Uhlenbeck para el tipo a corto plazo. La restricción que este modelo impone a la fórmula de CKLS (1992) es que el exponente condicional de la volatilidad es igual a cero ( $\gamma = 0$ ) obteniéndose:

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma dW_t$$

En el modelo reescrito en términos económicos:

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t$$

El modelo de Vasicek (1977) asume que los cambios absolutos en los tipos de interés están distribuidos normalmente, debido a la inclusión del proceso Wiener. Una debilidad del modelo de Vasicek es que se proporciona una probabilidad positiva de que los tipos de interés sean negativos. Otro defecto del modelo de Vasicek es que implica, al igual que el modelo de Merton, que la volatilidad condicional de los cambios en el tipo de interés es constante. CKLS (1992) ilustran que la hipótesis de la volatilidad constante es cuestionable, de hecho los autores estiman que el parámetro  $\gamma$  es próximo a 1,5. La relación entre la volatilidad del tipo de interés y el nivel de éste implica que el modelo de Vasicek puede proporcionar pronósticos poco realistas de los tipos de interés a corto plazo. Cuando los tipos de interés son bajos exagera la volatilidad, y cuando los tipos son altos minimiza la volatilidad.

Como principal ventaja del modelo de Vasicek radica su simplicidad y que proporciona formas cerradas para valorar instrumentos dependientes de los tipos de interés. Para emplear en un modelo DFA se utiliza la versión discreta del modelo en tiempo continuo que se aproxima mediante:

$$\Delta r_t = a(b - r_{t-1}) + s\varepsilon_t$$

La fórmula anterior nos determina el tipo de interés a corto plazo para cada período de simulación, pero para poder valorar los títulos de renta fija necesitamos descontar sus flujos a través de la ETTI. El tipo a T años en el momento t será  $R_{t,T}$ :

$$R_{t,T} = \frac{r_t B_t - \ln A_t}{T}$$

donde:

$$A_t = e^{\left( \frac{1}{2a^2} \left( (2a^2b - s^2)(B(t) - t) - \frac{s^2 a}{2} B^2(t) \right) \right)}$$

$$B_t = \frac{1 - e^{-at}}{a}$$

Las formas de la curva de tipos resultante de un modelo del modelo de Vasicek pueden ser invertidas, normales o con joroba en función de los valores que tome  $r_t$ .

El modelo de Cox *et al.* (1985), CIR (1985), CIR-SR o “proceso de la raíz cuadrada” relaciona la volatilidad de los tipos de interés con la raíz cuadrada de su nivel actual. Es decir la restricción que se impone en la fórmula general de CKLS (1992) es que  $\gamma = 1/2$  por lo que se obtiene:

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

El modelo reescrito en términos económicos es ( $\gamma = 1/2$ ):

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$$

El valor de  $r_t$  determina el valor de la ETTI pero no su forma, ya que, como en Vasicek se permiten curvas normales, invertidas y con joroba. Sin embargo, la primera ventaja respecto al modelo de Vasicek, es que en el modelo CIR (1985) los tipos de interés a corto plazo no pueden ser la negativos. Una segunda mejora es que relaciona la volatilidad condicional con el nivel de los tipos. Como desventaja de este modelo cabe mencionar el hallazgo de CKLS (1992) que la volatilidad del tipo de interés es más sensible al nivel de los tipos de interés que propuesta por la especificación del CIR-SR. Para su empleo en el marco de DFA se utiliza la versión discreta del modelo en tiempo continuo que se aproxima como sigue:

$$\Delta r_t = a(b - r_{t-1}) + s \sqrt{r_{t-1}} \varepsilon_t$$

donde:

$\Delta r_t$  = cambio discreto en el tipo de interés a corto plazo

$\varepsilon_t$  = una muestra de la distribución normal estándar

La fórmula anterior nos determina el tipo de interés a corto plazo para cada período de simulación, pero para poder valorar los títulos de renta fija necesitamos descontar sus flujos a través de la ETTI. El tipo a T años en el momento t será  $R_{t,T}$ :

$$R_{t,T} = \frac{r_t B_t - \log A_t}{T} R_{t,T} = \frac{r_t B_t - \log A_t}{T}$$

donde:

$$A_t = \left( \frac{2Ge^{(a+G)t/2}}{(a+G)(e^{Gt} - 1) + 2G} \right)^{2ab/s^2}$$

$$B_t = \frac{2(e^{Gt} - 1)}{(a+G)(e^{Gt} - 1) + 2G}$$

$$G = \sqrt{a^2 + 2s^2}$$

## 4.2 Modelos de equilibrio multifactoriales

Los modelos de un factor de asumen que toda la información de la ETTI en cualquier momento temporal pueden ser resumidas por un solo factor que normalmente viene especificado como el tipo de interés a corto plazo  $r_t$ . Estos modelos se caracterizan por su facilidad de uso, sin embargo han criticados porque el tipo de interés a largo plazo es una función determinista del tipo a corto plazo. Los modelos multifactoriales suponen la existencia de más de una variable de estado en la estructura temporal de los tipos de interés y surge con el objetivo de evitar las características poco realistas relacionadas con los modelos unifactoriales explicando una mayor variedad de movimientos en la

evolución temporal de los tipos de interés. La mayoría de los modelos multifactoriales tienen dos factores. En la siguiente tabla pueden verse los modelos propuestos por distintos autores y las variables de estado que emplean.

**Tabla 3**  
Modelos bifactoriales de equilibrio.

Richard (1978) y Cox <i>et al.</i> (1985)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- tipo de interés a corto plazo real esperado</li> <li>- tasa de inflación anticipada a corto plazo</li> </ul>
Brennan y Schwartz (1979)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- tipo de interés a corto plazo</li> <li>- tipo de interés a largo plazo</li> </ul>
Schaefer y Schwartz (1984)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- tipo de interés a largo plazo</li> <li>- diferencial de tipos de interés entre el largo y corto plazo</li> </ul>
Longstaff y Schwartz (1992)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- tipo de interés a corto plazo</li> <li>- volatilidad condicional del tipo a corto</li> </ul>
Fong y Vasicek (1991)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- tipo de interés a corto plazo</li> <li>- volatilidad condicional del tipo a corto</li> </ul>

Aunque los modelos bifactoriales son predominantes, cabe mencionar a la propuesta de un modelo con tres factores de Chen (1996). Los tres factores de este modelo son el tipo de interés a corto plazo, la media estocástica del tipo de interés a corto plazo y la volatilidad estocástica del tipo de interés a corto plazo. Mediante este modelo, es posible explicar los movimientos presentes en el nivel, pendiente y curvatura de la estructura temporal de los tipos de interés.

Al igual que realizamos con anterioridad, en este apartado seleccionamos el denominado modelo de dos factores de Vasicek ya que presenta reversión a la media en los tipos de interés y forma analítica para la ETTI. Este modelo es similar al modelo de un factor de Vasicek en el que el proceso de reversión a la media de los tipos de interés a corto plazo es una variable estocástica. Aquí, sin embargo, hay un segundo factor aleatorio: la media duradera a la cual los tipos a corto tienden a revertir<sup>58</sup>. Por lo tanto, bajo este modelo el tipo a corto pla-

<sup>58</sup> Por tanto son el equivalente en tiempo continuo a dos procesos autorregresivos de primer orden.

zo ( $r_{1t}$ ) revierte a un tipo a largo plazo estocástico ( $r_{2t}$ ), que a su vez revierte a un nivel medio determinista ( $\theta$ ). Este modelo es empleado para la generación estocástica de escenarios para las compañías aseguradoras en Hibbert *et al.* (2001), y Ahlgrim *et al.* (2004)<sup>59</sup>. El modelo de Vasicek de dos factores viene especificado por las siguientes dos ecuaciones:

$$dr_{1t} = \kappa_{r_1}(r_{2t} - r_{1t})dt + \sigma_{r_1}Z_{1t}$$

$$dr_{2t} = \kappa_{r_2}(\theta - r_{2t})dt + \sigma_{r_2}Z_{2t}$$

En tiempo discreto el modelo toma la forma siguiente<sup>60</sup>:

$$\Delta r_{1t} = r_{1t+1} - r_{1t} = a(r_{2t} - r_{1t-1}) + s_{r_1}\varepsilon_{1t}$$

$$\Delta r_{2t} = r_{2t+1} - r_{2t} = b(c - r_{2t-1}) + s_{r_2}\varepsilon_{2t}$$

donde:

$r_{1t}$  es el tipo de interés a corto plazo

$r_{2t}$  es la media a la que revierte el tipo a corto plazo

$a$  es la velocidad de reversión a la media del proceso  $r_{1t}$

$b$  es la velocidad de reversión a la media del proceso  $r_{2t}$

<sup>59</sup> Este modelo al igual que el modelo de Vasicek permite la posibilidad de tipos de interés negativos, por lo que Hibbert *et al.* (2001), y Ahlgrim *et al.* (2004) optan por emplearlo para modelizar los tipos de interés reales y no nominales.

<sup>60</sup> Podemos transformar la ecuación del modelo en tiempo discreto para mostrar que este proceso es autorregresivo:

$$r_{1t+1} = r_{1t} + (ar_{2t} - ar_{1t}) + s_{r_1}\varepsilon_{1t}$$

$$r_{2t+1} = r_{2t} + (bc - br_{2t}) + s_{r_2}\varepsilon_{2t}$$

Y reordenando:

$$r_{1t+1} = ar_{2t} + (1 - ar_{1t}) + s_{r_1}\varepsilon_{1t}$$

$$r_{2t+1} = bc + (1 - br_{2t}) + s_{r_2}\varepsilon_{2t}$$

Lo que muestra que el tipo de interés a corto plazo  $r_{1t+1}$  es una media ponderada entre su nivel actual  $r_{1t}$  y el tipo a largo plazo  $r_{2t}$ . El tipo a largo plazo  $r_{2t+1}$  es una media ponderada entre el mismo y su media a largo plazo  $c$ .

$s_{r_1}$  es la volatilidad (desviación estándar) del tipo a corto plazo  $r_{1t}$

$s_{r_2}$  es la volatilidad del tipo  $r_{2t}$

$c$  es el nivel de reversión del tipo a largo plazo  $r_{2t}$

$\varepsilon_{1t}$  distribución normal estándar para el proceso del tipo  $r_{1t}$

$\varepsilon_{2t}$  distribución normal estándar para el proceso del tipo  $r_{2t}$

Este modelo dispone de una forma cerrada para la valoración de los títulos de renta fija, a partir de la cual se puede derivar la ETTI. El precio de un bono cero cupón en el tiempo  $t$  que paga una unidad en términos reales en el tiempo  $T$  viene dado por la siguiente ecuación:

$$P(t, T) = e^{[A(T-t) - B_1(T-t)r_{1t} - B_2(T-t)r_{2t}]}$$

donde:

$$B_2(t) = \frac{a}{a-b} \left( \frac{1-e^{-bt}}{b} - \frac{1-e^{-at}}{a} \right)$$

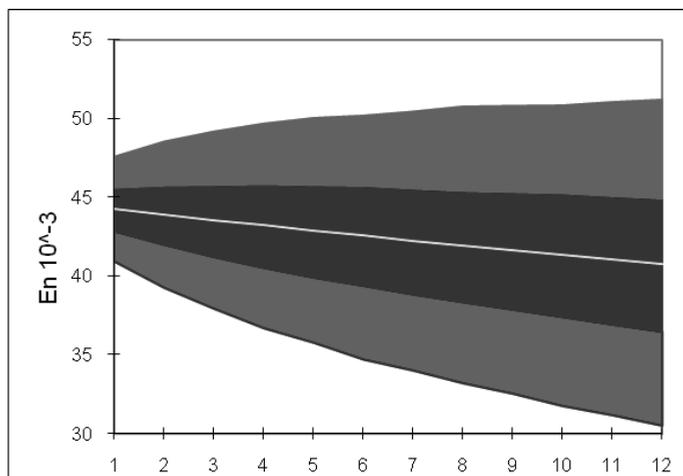
$$A(s) = (B_1(t) - t) \left( c - \frac{s_{r_1}^2}{2a^2} \right) + B_2(t)c - \frac{s_{r_1}^2 B_1(t)^2}{4a} + \frac{s_{r_2}^2}{2} \left[ \frac{t}{b^2} - 2 \frac{(B_1(t) + B_2(t))}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \frac{(1-e^{-2at})}{2a} - \frac{2a}{b(a-b)^2} \frac{(1-e^{-(a+b)t})}{(a+b)} + \frac{a^2}{b^2(a-b)^2} \frac{(1-e^{-2at})}{2b} \right]$$

## 5. ANÁLISIS DE LOS MODELOS EMPLEADOS

En este apartado analizaremos el comportamiento empírico de los modelos analizados: modelo de Vasicek, CIR-SR y Vasicek de dos factores. Para ello, se estimaremos los modelos utilizando datos mensuales del Euribor del periodo Enero de 2001 a Junio de 2008. Los modelos Vasicek y CIR-SR han sido estimados por máximo verosimilitud al tipo

de interés a un mes, mientras que el modelo de Vasicek de dos factores ha sido estimado empleando mínimos cuadrados ordinarios en dos etapas. En una primera etapa se ajusta el proceso autorregresivo de los tipos de interés a largo plazo, para lo que se ha empleado el Euribor a 30 años. Posteriormente se ajusta el proceso a corto plazo empleando la serie anterior y la de tipos a un mes. Los modelos estimados son simulados a lo largo de 12 meses. En los siguientes gráficos se muestran la evolución temporal<sup>61</sup> de los tipos a corto plazo generados por los tres modelos evaluados. Para ello se ha empleado 10.000 simulaciones de tipo Latino-Hipercúbico<sup>62</sup> para cada uno de los 12 meses simulados mediante el programa @risk. Como se aprecia en el gráfico 1, el modelo de Vasicek proporciona unos tipos medios a corto plazo decreciente. Esto es debido a que los parámetros del ajuste efectuado provocan que el tipo al cual los tipos de interés a corto reversionen sea el 2,93% y su velocidad de reversión el 2,39%.

**Gráfico 1.** Evolución temporal del modelo Vasicek

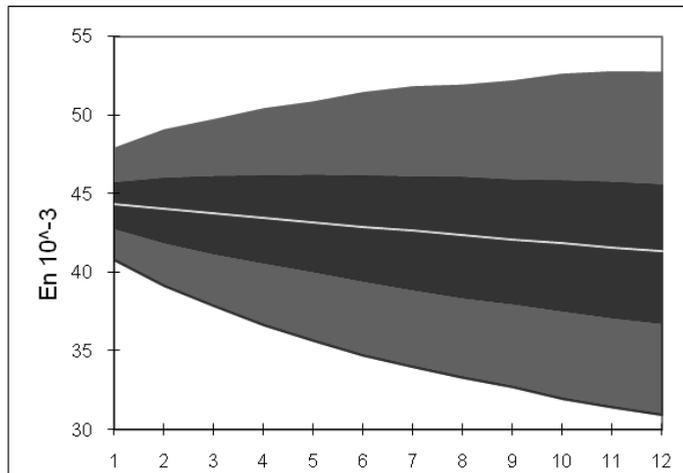


<sup>61</sup> En el gráfico de evolución temporal se representa para cada uno de los 12 meses de simulación la media (línea central amarilla), los valores del percentil 75 y del percentil 25 (parte superior e inferior respectivamente de la zona de color oscuro), y los valores del percentil al 95% y al 5% de confianza (parte superior e inferior de la zona de color claro).

<sup>62</sup> El método de simulación Latino Hiperúbico (LHS) es un método de recogida de muestras por estratificación. Permite recrear una distribución con una mayor precisión para un mismo número de iteraciones que el método de Monte Carlo común, en el que las muestras son seleccionadas de forma completamente aleatoria.

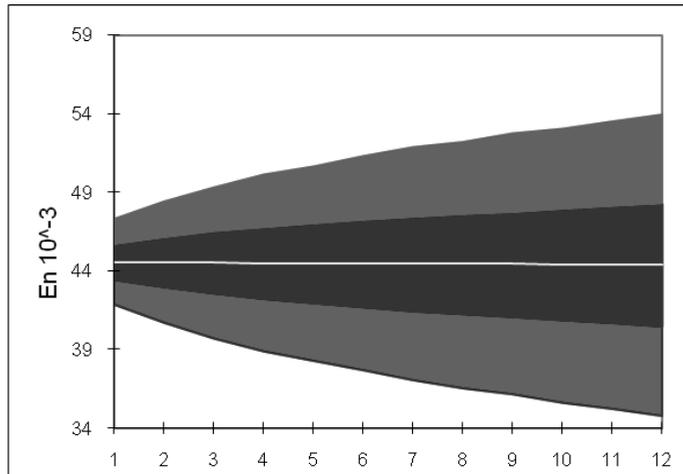
En el gráfico 2 se muestra el resultado de aplicar el modelo CIR que proporciona unos tipos medios a corto también decrecientes y una evolución temporal muy semejante a la del modelo de Vasicek. El tipo al cual los tipos de interés a corto plazo están revirtiendo en este modelo es el 2,88% y su velocidad de reversión es del 3,00%.

**Gráfico 2.** Evolución temporal del modelo CIR (1985)



En el gráfico 3 se muestra la evolución de los tipos a corto plazo del modelo Vasicek de dos factores. El tipo a largo plazo al cual los tipos a largo plazo están revirtiendo en este modelo es el 4,73% y su velocidad de reversión es del 4,68%. Sin embargo, en el ajuste del modelo no se ha observado reversión de los tipos a corto plazo a los tipos a largo plazo, lo que puede ser debido al corto periodo muestral considerado. Debido a la ausencia de reversión a la media del tipo a corto, su evolución temporal no muestra ninguna tendencia media, por lo que sólo se observa el aumento de la incertidumbre a medida que la simulación se efectúa a plazos más lejanos.

**Gráfico 3.** Evolución temporal del modelo de Vasicek de dos factores



A continuación se realiza un análisis estadístico sobre el total de escenarios simulados para cada modelo en el mes 12. En el cuadro inferior se muestran las principales medidas estadísticas históricas de los tipos de interés a corto, medio y largo plazo y las resultantes de la simulación de los tres modelos. El tipo a corto plazo considerado es el tipo mensual histórico, como tipo a medio plazo hemos considerado el tipo a 10 años del Euribor y como tipo a largo plazo el tipo a 30 años histórico. Estos tipos son comparados por sus tipos equivalentes generado por los modelos.

**Tabla 4**  
Resumen estadístico de los modelos simulados en los 12 meses

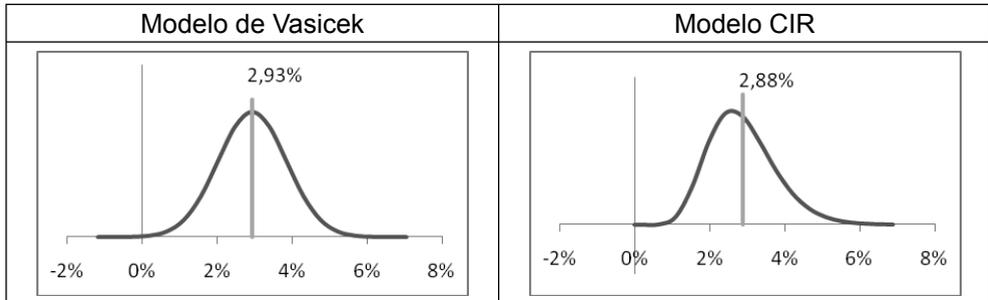
Estad-	Histórico			Vasicek			CIR-SR			Vasicek 2 Factores		
	Tipo C/P	Tipo M/P	Tipo L/P	Tipo C/P	Tipo M/P	Tipo L/P	Tipo C/P	Tipo M/P	Tipo L/P	Tipo C/P	Tipo M/P	Tipo L/P
<b>Mínimo</b>	2,02%	3,26%	3,84%	1,52%	1,67%	1,89%	1,99%	2,06%	2,18%	2,26%	2,18%	2,00%
<b>Media</b>	3,13%	4,47%	4,94%	4,07%	3,94%	3,71%	4,14%	4,02%	3,80%	4,44%	4,42%	4,36%
<b>Máximo</b>	4,85%	5,68%	6,26%	6,48%	6,08%	5,43%	6,81%	6,45%	5,82%	6,62%	6,66%	6,74%
<b>Desv Est.</b>	0,93%	0,60%	0,61%	0,62%	0,55%	0,44%	0,66%	0,60%	0,50%	0,58%	0,60%	0,63%
<b>Rango</b>	2,83%	2,42%	2,42%	4,96%	4,41%	3,54%	4,82%	4,39%	3,64%	4,36%	4,48%	4,74%
<b>Moda</b>	2,10%	-	-	4,14%	4,00%	3,76%	3,99%	3,89%	3,69%	4,52%	4,44%	4,26%
<b>Percentil 5</b>	2,06%	3,41%	3,95%	3,05%	3,03%	2,98%	3,09%	3,07%	3,01%	3,48%	3,43%	3,32%
<b>Percentil 10</b>	2,08%	3,61%	4,05%	3,28%	3,24%	3,15%	3,31%	3,27%	3,17%	3,69%	3,65%	3,56%
<b>Percentil 25</b>	2,11%	4,04%	4,44%	3,65%	3,56%	3,41%	3,68%	3,60%	3,46%	4,05%	4,03%	3,94%
<b>Percentil 75</b>	3,86%	4,82%	5,29%	4,49%	4,31%	4,01%	4,56%	4,41%	4,12%	4,83%	4,83%	4,79%
<b>Percentil 90</b>	4,46%	5,37%	5,74%	4,87%	4,65%	4,28%	4,99%	4,80%	4,45%	5,18%	5,19%	5,17%
<b>Percentil 95</b>	4,72%	5,44%	5,96%	5,12%	4,87%	4,45%	5,27%	5,05%	4,66%	5,39%	5,41%	5,41%
<b>Percentil 99</b>	4,85%	5,64%	6,25%	5,53%	5,24%	4,75%	5,84%	5,57%	5,09%	5,78%	5,80%	5,82%
<b>Percentil 99,5</b>	4,85%	5,64%	6,25%	5,67%	5,36%	4,85%	6,00%	5,72%	5,21%	5,93%	5,95%	5,97%

En general, los tipos obtenidos por el modelo de Vasicek y CIR parecen ser semejantes en cuanto a los niveles generados. La distribución teórica a largo plazo de los tipos de interés a corto plazo por estos modelos vienen dados por el siguiente gráfico. Como se aprecia el modelo de Vasicek proporciona una probabilidad<sup>63</sup> de que los tipos de interés sean negativos, debido a que estos se distribuyen normalmente. Por el contrario el modelo CIR (1985) establece que el tipo de interés a corto plazo está distribuido como una Chi-cuadrado no centrada por lo que evita a largo plazo tipos de interés negativos.

<sup>63</sup> Aunque con los parámetros estimados en este trabajo a un horizonte temporal corto (12 meses) dicha probabilidad es muy pequeña. Obsérvese que en los 10.000 escenarios simulados el tipo mínimo fue del 1,52%.

**Tabla 5**

Distribución a largo plazo del tipo de interés a corto del modelo de Vasicek y CIR.



Además, se observa que para estos dos modelos el tipo de interés a corto plazo es generalmente superior a los tipos a medio y largo plazo generados dando lugar a ETTIs con pendiente negativa. Esto es una debilidad particular de estos modelos, ya que en base a nuestra calibración el tipo a corto plazo revierte a una media menor que el nivel de tipos actual, lo que provoca que el tipo a corto plazo esperado sea decreciente. Si a este hecho le añadimos que al ser modelos unifactoriales toda la ETTI viene dada por los parámetros que operan en el proceso del tipo a corto, observamos dicho comportamiento. El hecho de que las pendientes de las curvas de tipos a plazo sean en general negativas, conlleva que los tipos a plazos simulados sean menores que los históricos lo cual puede llevar a una subestimación del riesgo.

El modelo de Vasicek de 2 factores proporciona en general unos tipos a corto plazo más elevados que los dos modelos unifactoriales, esto es una debilidad de dicho modelo ya que los tipos mínimos simulados son superiores a los históricos. Este hecho subestimaría el riesgo de caída de tipos de interés. Por la contra este modelo proporciona unas curvas a plazo más realistas. Sin embargo, este modelo todavía no es capaz de recoger el hecho de que la mayor parte de las curvas históricas tengan pendiente positiva.

Los resultados obtenidos en este apartado muestran que los modelos evaluados recogen, en general, de forma satisfactoria los movimientos del tipo a corto históricos. Sin embargo fallan para describir los tipos a muy largo plazo y las pendientes de las curvas ETTI. Los mo-

delos unifactoriales porque restringen toda la estructura de la ETTI al proceso a corto plazo, mientras que el modelo de 2 factores es debido a las características particulares del período analizado<sup>64</sup>. Esto puede ser una debilidad de este tipo de modelos en el caso de que la compañía tenga unos flujos esperados de entrada o salida a un horizonte temporal muy lejano. Este sería el caso general de las compañías de seguros de vida. Esta es la razón de que en el siguiente apartado evaluemos el riesgo de tipos de interés resultante de estos modelos para una hipotética compañía de seguros no vida.

## 6 RIESGO ASOCIADO AL TIPO DE INTERÉS ( $MKT_{INT}$ ): APLICACIÓN PRÁCTICA

En este apartado proponemos calcular el riesgo de tipos de interés de una compañía aseguradora en Solvencia II empleando el modelo estándar y los modelos estocásticos de tipos de interés analizados en el apartado anterior. El riesgo de tipo de interés afecta a todos los activos y pasivos cuyo valor neto sea sensible a las variaciones en la estructura temporal y que no estén relacionados con pólizas en las que el tomador asuma el riesgo de inversión. En QIS4 el capital requerido se mide a través del impacto que tienen unas variaciones predeterminadas en la curva de tipos sobre la posición neta de los flujos de efectivo de entrada (renta fija) y salida (provisiones técnicas y préstamos)<sup>65</sup>. La estructura de tipos alterada se deriva de la multiplicación de la curva de tipos actuales por el factor de estrés superior  $s^{up}(t)$  y por el factor de estrés inferior  $s^{down}(t)$  para cada vencimiento. Por tanto, la carga de capital para el riesgo de tipos de interés es el resultado del mayor valor entre los dos escenarios de estrés siguientes<sup>66</sup>:

<sup>64</sup> En el periodo analizado existe un 82,22% de ETTIs con pendiente positiva o curvas normales, no existe ninguna curva invertida o con pendiente negativa, un 11,11% de curvas con joroba y un 6,675% de otras formas. Dicha afirmación se desprende del análisis de la pendiente de las ETTIs históricas evaluando las pendientes en los siguiente plazos: tipo a corto, tipo a 5 años, tipo a 10 años, tipo a 15 años y tipo a 30 años.

<sup>65</sup> Por lo tanto, cuanto mejor casados estén los flujos de efectivo menor será la necesidad de capital.

<sup>66</sup> Los factores de estrés fueron calibrados en QIS3 a partir de dos fuentes de datos: los tipos cupón cero alemanes con vencimiento desde un año a 10 años desde 1972 con frecuencia mensuales. La fuente fue el Bundesbank.

$$Mkt_{int}^{subida} = \Delta VAN|_{shocksubida}$$

$$Mkt_{int}^{bajada} = \Delta VAN|_{shockbajada}$$

Siendo:

$\Delta VAN$ , es el cambio en el valor neto de los activos y pasivos derivados de las modificaciones en los tipos de la ETTI.

En la tabla 6 podemos ver el desglose de flujos de activo y pasivo de una hipotética compañía, necesario para poder estimar el efecto de las variaciones en la curva de tipos

**Tabla 6**  
Flujos de la cartera de activo y pasivo y VAN

Año (Final)	Flujos de Activo	Flujos de Pasivo	
1	300	100	
2	300	150	
3		175	
4		200	<b>VAN Excedente</b>
<b>VAN</b>	561,09	553,62	7,47

En la tabla siguiente recogemos las curvas y los factores de descuento aplicables según QIS4.

**Tabla 7**  
ETTI y factores de descuento aplicables

Año (Final)	ETTI			Factores de descuento		
	Estándar	Bajada	Subida	Estándar	Bajada	Subida
1	4,70%	2,30%	9,11%	0,955	0,978	0,917
2	4,53%	2,40%	8,01%	0,915	0,954	0,857
3	4,51%	2,53%	7,62%	0,876	0,928	0,802
4	4,53%	2,63%	7,34%	0,838	0,901	0,753

Como podemos comprobar en la tabla 8, el escenario que le perjudica a la compañía es el de bajada de tipos de interés, ya que la variación de capital es positiva, lo que significa que el valor actual de los activos

respecto al de los pasivos disminuye ante ese escenario. La compañía analizada precisará de un capital de 11,56€.

**Tabla 8**

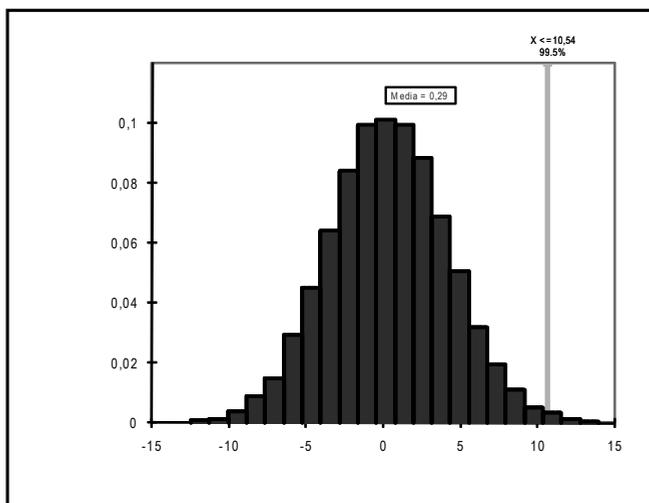
Variación ante caída y subida de tipos en el activo y pasivo.

Caída	VAN Activo	VAN Pasivo	VAN Activo-Pasivo	Variación VAN
	579,36	583,44	-4,08	11,56
Subida	VAN Activo	VAN Pasivo	VAN Activo-Pasivo	Variación VAN
	532,11	511,28	20,83	-13,35

Para calcular la carga de capital resultante de aplicar un modelo interno se han realizado 10.000 simulaciones de los tipos de interés a través de los distintos modelos. Mediante la simulación estocástica de curvas de tipos de interés se puede hacer un análisis más pormenorizado de los escenarios que afectan en mayor medida a la entidad. A continuación se presentan los resultados de analizar el efecto en el excedente de la compañía analizada. Como se puede observar en el gráfico 4, la variación que se produce en el excedente de la compañía B al 99,5% de confianza empleando el modelo de Vasicek (1977), se eleva a 12,98 € frente a los 11,56 € del modelo estándar.

**Gráfico 4**

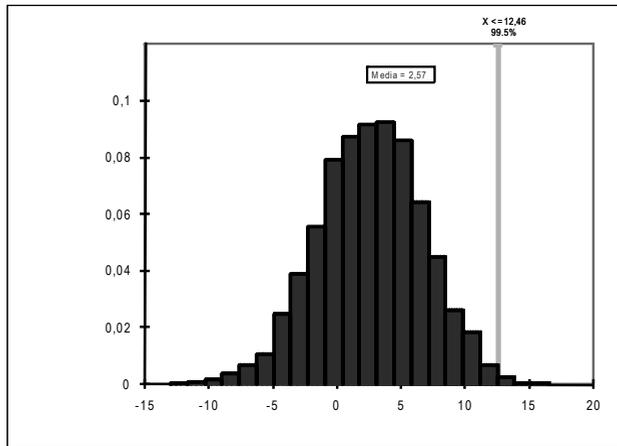
Distribución del VAN del excedente mediante modelo de Vasicek.



El gráfico 5 muestra la carga de capital resultante de emplear el modelo CIR (1985) que toma un valor de 12,46 €, cifra muy similar a la proporcionada por el anterior modelo.

### Gráfico 5

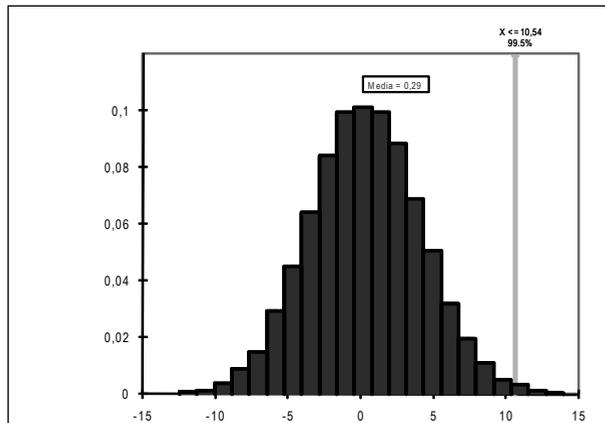
Distribución del VAN del excedente mediante modelo CIR.



Finalmente, en el gráfico 6 se muestra el capital necesario resultante de emplear el modelo de Vasicek de dos factores, que proporciona una cifra de capital de 10,54 €.

### Gráfico 6

Distribución del VAN del excedente mediante modelo Vasicek de dos factores.



Los resultados muestran que las cargas de capital para soportar dicho riesgo son diferentes para los distintos modelos empleados. Los modelos unifactoriales empleados aumentan los requisitos de capital del modelo estándar propuesto en QIS4. De esta forma el modelo de Vasicek estima en 12,98 € el capital necesario para soportar el riesgo de tipos de interés, el modelo CIR estima dicha cifra en 12,46 € y la fórmula estándar en 11,56 €. Por otro lado el modelo multifactorial analizado, estima una cifra de capital necesario ligeramente inferior a la fórmula estándar al cifrar los fondos necesarios en 10,54 €. Los porcentajes de incremento/ decremento de los distintos modelos frente a la propuesta estándar se muestran en la tabla inferior. Estos resultados implican que aquellas compañías que deseen utilizar un modelo propio deben validar exhaustivamente su modelo para no subestimar o sobreestimar la cantidad de capital necesaria para cubrir el riesgo de tipos de interés.

**Tabla 9**

Diferencias porcentuales de las cargas de capital respecto a la fórmula estándar de QIS4

Modelo de Vasicek	Modelo CIR	Modelo de Vasicek de 2 factores
+12,28%	+7,79%	-8,82%

## CONCLUSIÓN

El proyecto Solvencia II lleva a cabo una revisión de las normas de valoración de la situación financiera con el objetivo de mejorar el control y la medición de los riesgos a los que se exponen las aseguradoras europeas. Bajo este nuevo marco, la determinación de las necesidades de capital se puede calcular mediante un modelo estándar o bien con modelos internos previamente aprobados por el regulador. El presente trabajo orienta sobre la forma de elaborar un modelo interno para medir el riesgo de tipos de interés. Dichas recomendaciones han sido realizadas desde un punto de vista teórico y mediante el análisis del comportamiento empírico de distintas alternativas propuestas en la literatura. Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que los niveles de los tipos de interés simulados mediante tres *modelos de equilibrio* recogen, en general, de forma satisfactoria los compor-

tamientos históricos. Sin embargo fallan para describir los tipos a muy largo plazo lo cual puede ser relevante para las compañías aseguradoras de vida. Estos modelos son comparados posteriormente con la fórmula estándar del QIS4 para evaluar el riesgo de tipos de interés. Los resultados obtenidos muestran que los capitales necesarios son dependientes de la especificación empleada. Este hecho supone un importante reto no sólo para las compañías aseguradoras que deseen desarrollar su modelo sino también a las autoridades de supervisión encargadas de aprobar su uso.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahlgrim, K.C. (2000): "Multifactor Interest Rate Models and Dynamic Financial Analysis", Working Paper.

Ahlgrim, K. C. (2001): *The Effects of Multifactor Term Structure Models on the Valuation of Insurance*, Tesis Doctoral, University of Illinois.

Ahlgrim, K.C.; D'Arcy, S.P. y Gorvett, R.W. (1999): "Parameterizing Interest Rate Models", CAS Forum, Summer, pp. 1-50.

Ahlgrim, K. C.; D'Arcy, S.P. y Gorvett, R.W. (2004): "Modeling of Economic Series Coordinated with Interest Rate Scenarios", Proyecto de investigación CAS y SOA. Disponible en <http://casact.org/research/econ/> [consultado el 1 de Marzo de 2009]

Ait-Sahalia, Y. (1996): "Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate", *Review of Financial Studies*, Vo. 9, No. 2, pp. 385-426.

Black, F., Dermand, E. y Toy, W. (1990): "A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, Vol. 46, No. 1, pp. 33-39.

Black, F. y Karasinski, P. (1991): "Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal", *Financial Analysts Journal*, Vol. 47, No. 4, pp. 52-59.

Brennan, M.J. y Schwartz, E.S. (1979): "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, Vol. 3, No. 2, pp. 133-155.

Brennan, M.J. y Schwartz, E.S. (1980): "Analyzing Convertible Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 15, No. 4, pp. 907-929.

Chan, K. C.; Karolyi, G. A.; Longstaff, F. y Sanders, A. (1992): "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", *Journal of Finance* Vol. 47, No 3, pp. 1209-1227.

Chen, L. (1996): *Interest Rate Dynamics, Derivatives Pricing, and Risk Management*. Springer-Verlag, Berlin.

Constantinides, G.M. (1992): "A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates", *Review of Financial Studies*, Vol. 5, No. 4, pp. 531-552.

Cox, J.; Ingersoll, J. y Ross, S. (1980): "An analysis of variable rate loan contracts", *Journal of Finance*, Vol. 35, No 2, pp. 389-403.

Cox, J.; Ingersoll, J. y Ross, S. (1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, Vol. 53, No 2, pp. 385-407.

Dothan, L. U. (1978): "On the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, Vol. 6, No 1, pp. 59-69.

Duffie, D. y Kan, R. (1996): "A Yield-Factor Model of Interest Rates", *Mathematical Finance*, Vol. 6, No. 4, pp. 379-406.

Fong, G.H. y Vasicek, O. A. (1991): "Fixed-Income Volatility Management," *Journal of Portfolio Management*, Summer, pp. 41-46.

Heath, D.; Jarrow, R. y Morton, A. (1992): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology", *Econometrica*, Vol. 60, No 1, pp. 77-105.

Hibbert, J.; Mowbray, P. y Turnbull, C. (2001): "A Stochastic Asset Model & Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes", Technical Report, Barrie & Hibbert Limited.

Ho T.S. y Lee. S - B. (1986): "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *The Journal of Finance*, Vol. 41, No 5, pp. 1011-1030.

Hull, J. (1997): *Options, Futures and other Derivative Securities*, 3rd Edition, Prentice-Hall, New Jersey.

Hull, J. y White, A. (1990): "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", *Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.

Longstaff, F. A. (1989): "A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, Vol. 23, No. 2, pp. 195-224.

Longstaff, F. A. y Schwartz, E. S. (1992): "Interest Rate Volatility and the Term Structure: a Two-Factor General Equilibrium Model," *Journal of Finance*, Vol. 47, No. 4, pp. 1259-1282.

Merton, R.C. (1973): "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

Richard, S.F. (1978): "An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial Economics*, Vol. 6, No. 1, pp. 33-57.

Rebonato, R. (1998): *Interest Rate Option Models*, 2nd Edition, Wiley.

Schaefer, S. y Schwartz, E.S. (1984): "A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 19, No. 4, pp. 413-424.

Vasicek, O. (1977): "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No 2, pp. 177-188.

## Ponencia 26

### **ANÁLISIS COMPARATIVO DEL RIESGO DE SPREAD: MODELOS INTERNOS FRENTE AL MODELO ESTÁNDAR QIS4**

Pablo Durán Santomil · Luís A. Otero González  
y Alfonso Rodríguez Sandiás

#### **RESUMEN**

Solvencia II transformará el sistema de determinación de las necesidades de capital del asegurador. En el nuevo marco regulatorio se propone un modelo estándar, pero al mismo tiempo, se fomenta la aplicación de modelos internos de autoevaluación y gestión del riesgo. Este trabajo se centra en la elaboración de un modelo interno del riesgo del diferencial de crédito o spread. Hemos comparado la determinación de capital resultante de aplicar diferentes especificaciones frente a la propuesta del cuarto estudio de impacto cuantitativo (QIS4). Para ello, se han utilizado datos mensuales de la serie de spreads del período Diciembre de 2001 a Junio de 2008. Los resultados obtenidos muestran que los niveles de los spreads simulados y los capitales necesarios son dependientes de la especificación empleada.

**PALABRAS CLAVE:** QIS4, modelos internos, riesgo de spread, Solvencia II.

#### **1. INTRODUCCIÓN**

Recientemente se ha prestado una atención especial a la modelización de los spreads de crédito desde el ámbito financiero, principalmente dado su interés en la valoración de deuda con riesgo y los derivados

de crédito<sup>67</sup>. Los dos principales enfoques o metodologías empleadas para la valoración del riesgo de crédito son los modelos estructurales y los modelos en forma reducida. Los modelos estructurales (*structural models*<sup>68</sup>) comienzan con el trabajo de Merton (1974) y continúan con Black y Cox (1976), y Longstaff y Schwartz (1995a) entre otros. Asumen que el valor de una empresa sigue un proceso estocástico, y el incumplimiento o *default* ocurre cuando dicho valor es menor que el valor de la deuda emitida o cuando cae por debajo de un límite especificado. Los modelos en forma reducida (*reduced-form models*<sup>69</sup>) como los propuestos en Jarrow y Turnbull (1995), Jarrow *et al.* (1997), Duffie y Kan (1996) y Duffie y Singleton (1999) describen el evento de crédito de forma separada al valor de la compañía (exógenamente). Los modelos estructurales tienen la ventaja de que explican el incumplimiento de una compañía en términos de variables específicas a esta (valor de los activos, valor de la deuda, etc.). Sin embargo, han sido criticados porque de ellos se derivan spreads de crédito menores que los observados en el mercado. Por otro lado, los spreads resultantes de los modelos en forma reducida se ajustan mejor a los spreads observados en el mercado. Estos trabajos representan un punto de partida en un intento de modelizar el diferencial de crédito dentro de un modelo interno para una compañía aseguradora.

En el nuevo marco de Solvencia II se realizará el cálculo del Requisito de Capital de Solvencia o nivel de recursos óptimo (SCR) mediante modelos internos aprobados por el regulador o empleando la fórmula que se establezca con carácter general. El modelo estándar propone la determinación de las necesidades de capital de solvencia (SCR) a partir de los riesgos asegurador, financiero y operativo en los que incurrir una compañía aseguradora. El cálculo en el modelo estándar será el resultado de la adición de las necesidades de capital derivadas de los diferentes riesgos, para lo cual se proponen fórmulas analíticas que tratan de reflejar el VaR calibrado a un nivel de confianza del 99,5%

<sup>67</sup> Los derivados de crédito se pueden definir como contratos en los que los pagos dependen de la solvencia de una o más compañías. Los derivados de crédito están diseñados para transferir el riesgo de crédito procedente de un activo subyacente a cambio de una prima (opciones) o de un flujo de caja (swaps) durante un período de tiempo determinado.

<sup>68</sup> También conocidos como *diffusion-based models*, *asset-pricing models*, *firm-value based models* o *option pricing models*.

<sup>69</sup> Estos modelos también son conocidos como *intensity models*.

al horizonte temporal de un año. El módulo de riesgo de mercado reflejará el riesgo derivado del nivel o de la volatilidad de los precios de mercado de los instrumentos financieros que influyan en el valor de los activos y pasivos de la empresa. Dentro de esta categoría se incluye el riesgo de diferencial de crédito o *spread*, que mide la sensibilidad del valor de los activos, pasivos e instrumentos financieros frente a las variaciones en el nivel o la volatilidad de los diferenciales de crédito en relación con la estructura temporal de tipos de interés sin riesgo.

Este trabajo tiene como objetivo la generación de escenarios de *spreads* para analizar el riesgo del diferencial de crédito en el contexto del desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II. Una adecuada modelización de los *spreads* de crédito debe constar de tres etapas: el análisis de la serie histórica de *spreads*, la especificación del modelo y su estimación, y finalmente la evaluación del modelo. Por ello, en el apartado 2 se muestran las características de los *spreads* de crédito analizados y se analiza la hipótesis de reversión a la media. Posteriormente, en el apartado 3 se proponen distintas especificaciones empleadas para simular los *spreads* y, en el apartado 4 se evalúan los modelos propuestos en función de su ajuste al comportamiento histórico. En el apartado 5 se muestra una aplicación práctica de los modelos propuestos en contraposición al modelo estándar propuesto en QIS 4. El trabajo finaliza con las principales conclusiones obtenidas.

## 2. ANÁLISIS EMPÍRICO DE LOS SPREADS DE CRÉDITO

Los bonos con riesgo de crédito deben proporcionar un rendimiento superior a los bonos sin riesgo para compensar las posibles pérdidas del capital invertido. Por esta razón, un bono con riesgo crediticio con idéntico cupón y vencimiento al de un bono sin riesgo debe tener un precio inferior. La diferencia entre la rentabilidad que proporciona el bono con riesgo y el bono sin riesgo comparable es el diferencial o *spread* de crédito<sup>70</sup>. Además en la medida en que los bonos sin riesgo

<sup>70</sup> De esta forma el diferencial o *spread* de crédito  $s(t, T)$  observado en un momento temporal  $t$  para una categoría de rating específica (*index credit spread*) y para un vencimiento  $T$  se calcula como la diferencia entre el tipo de interés libre de riesgo y el tipo de interés proporcionado por esa categoría de rating. Al mismo tiempo, se puede calcular la estructura temporal de los *spreads* o curva de diferenciales de crédito como la diferencia entre la estructura temporal de la clase de rating y la ETTI libre de riesgo.

no sean exactamente comparables a los con riesgo el spread recoger estas distintas características, en especial debidas a diferencias de liquidez.

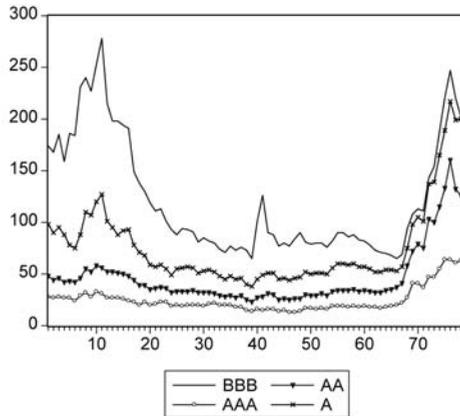
Dado que nuestro trabajo propone alternativas para la modelización de los spreads es obligatorio partir de un análisis de la serie histórica de los mismos. En la tabla 1 se muestran las estadísticas resumen de las series de spreads para las categorías de rating AAA, AA, A y BBB durante el periodo temporal 31/12/2001 a 30/06/2008 (79 observaciones mensuales para cada serie). El gráfico 1 muestra la evolución temporal de las cuatro series analizadas en puntos básicos.

**Tabla 1**  
Estadísticas resumen de las series de spreads

Serie	Estadística	AAA	AA	A	BBB
<b>Niveles de spreads</b> (puntos básicos)	Media	25,18	46,73	77,03	123,48
	Desv. típica	12,62	29,38	42,07	57,81
	Mediana	20,00	34,00	57,00	93,00
	Máximo	64,00	160,00	217,00	278,00
	Mínimo	13,00	23,00	38,00	65,00
	Asimetría	1,91	2,22	1,88	0,97
	Curtosis	5,89	7,20	5,97	2,58
	Jarque-Bera	75,66	123,13	75,50	12,84
	Prob.	0,000000	0,000000	0,000000	0,001630
	p(1)	0,809	0,814	0,787	0,911
<b>Cambios en los spreads</b> ( $\Delta S_{t+1} = S_{t+1} - S_t$ )	Media	0,42	1,09	1,45	0,49
	Desv. típica	3,06	7,07	9,71	17,02
	Máximo	14,00	28,00	36,00	47,00
	Mínimo	-4,00	-28,00	-26,00	-63,00
	Asimetría	1,88	0,92	1,04	-0,24
	Curtosis	8,23	10,11	5,79	5,47
	Jarque-Bera	134,71	175,24	39,44	20,57
	Prob.	0,000000	0,000000	0,000000	0,000034
	p(1)	0,035	0,048	0,225	0,104
	Media	0,0100	0,0131	0,0098	0,0025
<b>Cambios en el logaritmo</b> ( $\Delta s_{t+1} = \ln(S_{t+1}/S_t) * 100$ )	Desv. típica	0,105	0,097	0,099	0,119
	Asimetría	0,86	0,91	0,66	0,64
	Curtosis	4,80	4,77	3,94	5,31
	Máximo	0,42	0,35	0,30	0,44
	Mínimo	-0,19	-0,19	-0,23	-0,34
	Jarque-Bera	20,11	20,94	8,58	22,72
	Prob.	0,000043	0,000028	0,013729	0,000012
	p(1)	-0,040	0,106	0,253	0,114

## Gráfico 1

Evolución temporal de las series de spreads



Al analizar los niveles de los spreads de crédito entre categorías de ratings apreciamos que tanto la media como la desviación típica aumenta a medida que empeora la calificación crediticia. El spread de crédito de un bono compensa a su poseedor por la pérdida esperada, de forma que a peor categoría de rating (indicador del riesgo de crédito) mayor será el spread requerido. Además se observa como la desviación típica (volatilidad de los spreads) aumenta para bonos peor calificados, lo que indica una mayor heterogeneidad dentro de dicha categoría, es decir, no todos los bonos dentro de una misma categoría tienen el mismo riesgo de crédito. Esta característica también es encontrada en la serie analizada en Longstaff y Schwartz (1995a)<sup>71</sup>. La no normalidad de los spreads se verifica a través del test de Jarque Bera. Para cada una de las series de la muestra la hipótesis nula de normalidad se rechaza al 1%. Las series en niveles poseen una asimetría distinta de cero y una curtosis mayor a tres. Finalmente, se observa que el primer coeficiente de autocorrelación de las series de spreads es relativamente elevado.

Al analizar los cambios en los niveles de los spreads entre las distintas categorías apreciamos que la media es ligeramente positiva para

<sup>71</sup> Los autores calculan los spreads mensuales para el periodo Abril 1977 a Diciembre 1992 (190 observaciones) para distintas calificaciones crediticias de tres industrias distintas (sector industrial, sector ferrocarril y sector servicios) empleando la fuente Moody's.

todos los ratings analizado. Esto indica una leve tendencia al alza en los niveles de spreads, lo cual se aprecia de forma clara a partir de marzo de 2007. Además, también se observa que la desviación típica aumenta a medida que empeora la calificación crediticia. Este resultado es consistente con la evidencia empírica mostrada en Duffee (1998). Encontramos autocorrelaciones positivas pero pequeñas<sup>72</sup>. Observando los coeficientes de curtosis y asimetría, y el test de Jarque-Bera podemos concluir que los cambios en los spreads no están normalmente distribuidos.

Finalmente se analizan los cambios en los logaritmos de los spreads entre las distintas categorías de rating. Los coeficientes de asimetría y curtosis difieren de los de una distribución normal y por tanto se rechaza la hipótesis de que los spreads estén distribuidos lognormalmente. El modelo empleado en QIS3 y QIS 4 para el cálculo del capital asociado al riesgo de spreads ( $MKT_{sp}$ ) se basa en una aproximación lineal que parte de la suposición de que los spreads de crédito están distribuidos de forma lognormal<sup>73</sup>. La distribución lognormal tiene la virtud de generar spreads positivos, sin embargo una crítica frecuente es que asigna una baja probabilidad a grandes movimientos que se dan con una relativa frecuencia en la realidad de los mercados de crédito. Los grandes cambios en los spreads son más comunes en los títulos individuales que en los índices, pero a nivel agregado todavía ocurren con una mayor frecuencia que la que predice la distribución lognormal. Por ello consideramos conveniente emplear otras especificaciones distintas que las proporcionadas por el modelo lognormal.

## 2.1 La reversión a la media de los spreads de crédito

Desde un punto de vista teórico, existe un fuerte argumento económico que presupone la reversión a la media a largo plazo de los ín-

<sup>72</sup> Duffee (1998) encuentra autocorrelaciones positivas y negativas dentro de las distintas categorías de rating e industrias analizadas (sector financiero, sector industrial y sector servicios), sin embargo en la mayor parte son positivas. Para ello emplea series mensuales para el período Enero 1985 a Febrero 1995 y con fuente Lehman Brothers.

<sup>73</sup> La calibración del modelo lognormal se realizó en QIS3 empleando los spreads de Moody's para el período 1991-2006. Este modelo fue elegido al observarse que los mayores diferenciales estaban asociados con los mayores cambios absolutos.

dices de los spreads de crédito, al fluctuar éstos con la situación de la economía. Durante los periodos de desaceleración económica los spreads de crédito tienden a aumentar, mientras que en los periodos de crecimiento se reducen<sup>74</sup>. Para comprender dicho razonamiento es útil separar los spreads de crédito en tres componentes. El primer componente refleja la probabilidad de incumplimiento y la pérdida de capital asociado. El segundo componente está relacionado con la prima de riesgo que se debe proporcionar a un inversor como compensación por la potencial pérdida. Y el tercer componente, está principalmente relacionado con la liquidez, en la medida en que las emisiones con riesgo tengan menor liquidez que las del Estado. De esta forma podemos afirmar que las principales razones económicas por las que los spreads de crédito agregados fluctúan con la situación de la economía son: el efecto directo de las condiciones económicas sobre el riesgo de incumplimiento (*default risk*) que eleva la prima necesaria para asumir el riesgo de crédito, la aversión al riesgo por parte de los inversores que demandan mayor rendimiento en las situaciones en las que la actividad económica es desfavorable, y finalmente, los efectos de liquidez en la medida en que los inversores deseen mantener instrumentos más líquidos en periodos de recesión.

Desde un punto empírico las series temporales de los spreads pueden tardar años en revertir a su media a largo plazo. A continuación vamos a investigar si nuestros spreads de crédito muestran reversión a la media en nuestro período temporal analizado<sup>75</sup>. Para ello

---

<sup>74</sup> Arak y Corcoran (1996) encuentran evidencia empírica de que los spreads de crédito están negativamente correlacionados con la actividad económica y con su tendencia. De esta forma los spreads tienden a reducirse en las situaciones en las que la actividad económica es elevada o está expandiéndose.

<sup>75</sup> Los spreads de crédito recogen el riesgo de crédito y la prima por liquidez. Los cambios en el riesgo de crédito fluctúan con los cambios en las variables económicas reales como los ciclos económicos y son duraderos a largo plazo, mientras que los cambios en la prima por liquidez dependen de los sentimientos del mercado siendo más volátiles y su duración se mide en meses. Por eso es razonable pensar que la velocidad de reversión a la media del componente de liquidez es mayor que el de crédito. De esta forma si analizamos una serie temporal larga, dado que los bonos con mejor calidad crediticia tienen un mayor componente de liquidez en sus spreads, es de esperar intuitivamente que reviertan a su media a largo plazo antes que aquellos con peor calificación (Prigent *et al.* 2001). Este hecho no es encontrado en nuestra serie.

realizamos la siguiente regresión de los cambios en los spreads ante su nivel<sup>76</sup>:

$$\Delta S_{t+1} = S_{t+1} - S_t = a + bS_t + \varepsilon_{t+1}$$

Donde  $a$  es la constante o término de intercepción,  $b$  es el coeficiente de pendiente, y  $\varepsilon_{t+1}$  es el error de la regresión. Para que exista regresión a la media el coeficiente  $b$  debe ser negativo, además el valor de  $-b$  indica la tasa o velocidad a la que el spread de crédito revierte a su media a largo plazo, cuyo valor es  $-a/b$ . Los resultados de la estimación de la regresión para cada una de las categorías de rating se muestran en la tabla 2.

**Tabla 2**

Regresión de los cambios en los spreads ante su nivel

Rating	$a$	$t$	Prob.	$b$	$t$	Prob.	Velocidad ( $-b$ )( $-b$ )	Media ( $-a/b$ )
AAA	-2,0E-05	-0,250	0,803	0,026	0,889	0,377		
AA	-2,6E-05	-0,167	0,868	0,031	1,070	0,288		
A	-1,9E-04	-0,787	0,434	0,046	1,642	0,105		
BBB	4,5E-04	0,985	0,328	-0,033	-0,951	0,345	3,36%	1,37%

Los resultados obtenidos al estudiar este breve período histórico en el que además existe un importante incremento de los spreads desde Marzo de 2007 provoca dos importantes hechos. Primero, los coeficientes de las regresiones no son muy significativos y segundo que los coeficientes de pendiente de las regresiones sean positivos excepto en el caso de la categoría BBB. Por eso nos vamos a centrar en dicha categoría ya que es la única serie en la que parece que existe reversión a la media.

La velocidad de reversión mensual de los spreads BBB a su media a largo plazo (1,37%) es del 3,36% en términos mensuales. Nótese que la media a la largo a la cual es spread revierte es similar al resultado

<sup>76</sup> Longstaff and Schwartz (1995b) encuentran reversión a la media en el cambio del logaritmo de los spreads de crédito analizados, por lo que proponen un proceso Ornstein-Uhlenbeck para su modelización. Nosotros también hemos encontrado esta característica en nuestra serie para las cuatro categorías de rating, sin embargo hemos optado por emplear la serie en niveles.

obtenido en la tabla 1 (123,48 p.b.). Sin embargo dicha regresión tiene problemas. Primero, la regresión no se ajusta bien a las observaciones en la medida de que la varianza explicada es del 1,19% (Coeficiente de determinación  $R^2$ ). Esto significa que domina el término de error o ruido sobre el efecto de reversión, lo que una puede ser debido al reducido período de análisis lo que dificulta reconocer el efecto de lenta reversión a la media y al incremento de los spreads a partir de Marzo de 2007. Segundo, dado nuestro periodo corto, la media estimada a largo plazo al cual el tipo revierte puede no ser representativa en periodos futuros si nuestro intento es la simulación a lo largo de un amplio horizonte temporal.

### 3. MODELIZACIÓN DE LOS SPREADS DE CRÉDITO

Una gran parte de la literatura financiera se ha centrado en analizar los determinantes históricos de los spreads de crédito (clases de rating, tiempo al vencimiento, la estructura temporal de los tipos de interés, etc.). Sin embargo son menores las contribuciones a la modelización dinámica de los spreads. Pedrosa y Roll (1998) emplean los índices de spreads diarios con datos procedentes de Bloomberg para el grado de inversión entre Octubre de 1995 y Marzo de 1997. Modelan el comportamiento leptocúrtico de los cambios logarítmicos en los spreads a través de una mixtura de distribuciones normales. Bierens *et al.* (2005) emplean un modelo autorregresivo con variables dependientes, heterocedasticidad condicional y saltos (*ARX(1)-ARCH(1)-Jump model*) para modelizar el logaritmo de los cambios de los spreads diarios entre diciembre de 1996 y Agosto de 2002 con fuente Merrill Lynch<sup>77</sup>. Prigent *et al.* (2001) emplean los datos de los niveles de spreads agregados de crédito de Moody's con observaciones diarias entre enero de 1986 a Marzo de 2000 (3561 observaciones) para estimar los parámetros de modelos del tipo Chan *et al.*

<sup>77</sup> La modelización de los rendimientos de los spreads, es decir de las diferencias logarítmicas, convierten la serie temporal en estacionaria. Esto permite realizar el análisis tradicional de las series financieras temporales de forma que se analizaría los modelos ARMA para la media y la presencia de posibles efectos tipo GARCH. Sin embargo, nosotros en esta propuesta hemos optado por modelizar los niveles.

(1992) y un modelo de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con saltos simétricos<sup>78</sup>.

### 3.1 Especificación de modelos

Los modelos que vamos a analizar para simular y evaluar el comportamiento de los spreads son el modelo lognormal propuesto por el QIS4 y distintas especificaciones de procesos en tiempo continuo homogéneos recogidos en Chan *et al.* (1992) (de aquí en adelante CKLS, 1992). El trabajo de CKLS (1992) engloba los principales modelos dinámicos de los tipos de interés de un factor explicativo<sup>79</sup>. Con las oportunas restricciones a este modelo general se obtiene en particular los modelos de Merton (1973); Vasicek (1977); Cox *et al.* (1985) o CIR (1985); Dothan (1978), Brennan y Schwartz (1980), Cox *et al.* (1980) o CIR (1980) y los denominados modelos GBM y CEV. Aunque dichos modelos de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) surgieron inicialmente para comprender las dinámicas de los precios de los bonos al modelizar la evolución estocástica de un tipo de interés instantáneo o a corto plazo,  $r_t$  este tipo de modelos han sido empleados para la modelización de los spreads en Prigent *et al.* (2001). Además, en el ámbito de generación de escenarios económicos para las compañías aseguradoras, Pauling (2002)<sup>80</sup> propone en

<sup>78</sup> Encuentran que para el spread Aaa el modelo de tipo CKLS que mejor se ajusta es el de Vasicek (1977), mientras que para el spread Baa es Brennan y Schwartz (1980). También encuentran evidencia empírica para el modelo con saltos.

<sup>79</sup> Los modelos de difusión de los tipos de interés de la siguiente ecuación diferencial estocástica (SDE):

$dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t) dW_t$ . Donde  $dr_t$  indica el cambio en el tipo de interés instantáneo,  $\mu(r_t)$  y  $\sigma(r_t)$  son las funciones de la deriva y la difusión del proceso estocástico y  $dW_t$  es un movimiento browniano. Bajo esta modelización, tanto la media condicional como la varianza condicional de los cambios en el tipo de interés instantáneo dependen del nivel de los tipos. La anterior ecuación puede reescribirse en función de los parámetros de los que dependen generalmente las funciones de la deriva y la difusión,

$dr_t = \mu(r_t, \theta)dt + \sigma(r_t, \theta) dW_t$ . La anterior ecuación diferencial estocástica engloba un amplio abanico de modelos según las distintas especificaciones concretas que proponga cada autor para la ecuación de la deriva  $\mu(r_t, \theta)$  y la difusión  $\sigma(r_t, \theta)$  del proceso. CKLS (1992) trabajan con un proceso cuya deriva es lineal y cuya difusión depende del nivel de los tipos de interés.

<sup>80</sup> Emplea los datos mensuales de Moody's de Febrero de 1977 a Septiembre de 2002 para calibrar el modelo CIR (1985) y generar los spreads en 100 escenarios para un horizonte temporal de 10 años (simulación mes a mes).

base al análisis de los datos históricos emplear un modelo CIR (1985) o proceso de la raíz cuadrada para simular los futuros caminos de los spreads. Por tanto, aunque este tipo de modelos han sido originalmente creados para modelizar las dinámicas de los tipos a corto, también pueden ser empleados en la generación de escenarios de spreads. Siguiendo a CKLS (1992) la *forma general* de estos modelos se describe en términos de cambio en los spreads a corto plazo ( $s_t$ ) en la forma:

$$ds_t = (\alpha + \beta s_t)dt + \sigma s_t^\gamma dW_t$$

Ecuación que podemos transformar como:

$$ds_t = -\beta \left( \frac{\alpha}{-\beta} - s_t \right) dt + \sigma s_t^\gamma dW_t$$

E igualando  $\kappa = -\beta$  y  $\mu = \frac{\alpha}{-\beta}$  resulta la siguiente expresión:

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$$

Donde:

$ds_t$  es el cambio continuo en el nivel actual de los spreads

$\kappa$  es la velocidad de reversión a la media de los spreads a corto plazo

$\mu$  es el tipo al cual revierten los spreads a corto plazo

$\sigma$  es la volatilidad (desviación estándar) de los spreads a corto

$\gamma$  es el exponente condicional de la volatilidad de los cambios de los spreads

$W_t$  es un movimiento browniano estándar

La primera característica importante de este tipo de modelos es la reversión a la media. Esta característica presume que cuando los niveles de spreads sean muy altos o muy bajos tenderán a invertirse a niveles “normales”. La velocidad de la reversión es determinada por el parámetro  $\kappa$  del modelo. Si su valor es alto, los spreads tienden rápidamente hacia tipo a largo  $\mu$ . Si  $\kappa$  toma un valor bajo, los spreads tenderán lentamente hacia ese nivel. La *forma general* de CKLS (1992) agrupa como hemos mencionado un conjunto de que se resume en la siguien-

te tabla. Los modelos concretos se obtienen simplemente imponiendo restricciones sobre los parámetros  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  del modelo extendido de CKLS (1992). A continuación describimos las hipótesis subyacentes a cada modelo en su empleo para la modelización de los spreads.

El modelo de Merton no presenta reversión a la media y supone que la volatilidad condicional de los cambios en los spreads es constante lo que impone sobre la fórmula general de CKLS que  $\mu=0$  y  $\gamma = 0$ , es decir:

$$ds_t = \kappa s_t dt + \sigma dW_t$$

**Tabla 3**

Modelo general y versiones restringidas de CKLS (1992)

Modelo	Restricciones			Fórmula
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	
CKLS (1992)	Sin restricciones			$ds_t = (\alpha + \beta s_t)dt + \sigma s_t^\gamma dW_t$
Merton (1973)		0	0	$ds_t = \alpha dt + \sigma dW_t$
Vasicek (1977)			0	$ds_t = (\alpha + \beta s_t)dt + \sigma dW_t$
CIR (1985) CIR SR			1/2	$ds_t = (\alpha + \beta s_t)dt + \sigma \sqrt{s_t} dW_t$
Dothan (1978)	0	0	1	$ds_t = \sigma r_t dW_t$
Black y Scholes (1973)	0		1	$ds_t = \beta s_t dt + \sigma s_t dW_t$
Brennan y Schwartz (1980)			1	$ds_t = (\alpha + \beta s_t)dt + \sigma s_t dW_t$
CIR (1980) CIR VR	0	0	3/2	$ds_t = \sigma s_t^{3/2} dW_t$
CEV	0			$ds_t = \beta s_t dt + \sigma s_t^\gamma dW_t$

El modelo de Vasicek (1977) supone un modelo Ornstein-Uhlenbeck, por lo que agrega al modelo de Merton otra variable explicativa (la media a la cual el tipo revierte). Por lo tanto la restricción que este modelo impone es que el exponente condicional de la volatilidad es igual a cero ( $\gamma = 0$ ) obteniéndose:

$$ds_t = \kappa(\mu - s_t)dt + \sigma dW_t$$

El modelo de Vasicek (1977) asume que los cambios absolutos en los spreads están distribuidos normalmente, debido a la inclusión del proceso Wiener. Por eso un punto débil del modelo de Vasicek es que se proporciona una probabilidad positiva de que los spreads sean negativos.

El modelo de Cox *et al.* (1985), CIR (1985), CIR-SR o “proceso de la raíz cuadrada” relaciona la volatilidad de los spreads con la raíz cuadrada de su nivel actual. Es decir la restricción que se impone en la fórmula general de CKLS (1992) es que  $\gamma = 1/2$  por lo que se obtiene:

$$ds_t = \kappa(\mu - s_t)dt + \sigma\sqrt{s_t}dW_t$$

Una ventaja del modelo CIR (1985) es que los spreads no pueden ser la negativos y que relaciona la volatilidad condicional con el nivel de los spreads.

El modelo Dothan (1978) supone que los spreads se comporta como un movimiento browniano geométrico sin deriva, por lo que están lognormalmente distribuidos y por tanto no puede ser negativo. Las restricciones del modelo de Dothan en relación al modelo general de CKLS (1992) son  $k = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $\gamma = 1$ , por lo que su expresión es:

$$ds_t = \sigma s_t dW_t$$

Debido a que el exponente de la volatilidad en este modelo es más alto que en los modelos anteriores, el modelo relaciona la volatilidad de los movimientos de los spreads de forma más fuerte a su nivel.

El modelo de Black y Scholes (1973) o modelo GBM presenta el cambio en el spread mediante un movimiento browniano geométrico con parámetros de deriva y difusión constantes. Este modelo es un caso particular de Brennan y Schwartz (1980) y englobaría el modelo de Dothan (1978) al que añade la deriva. Las restricciones de este modelo en relación al modelo general de CKLS (1992) son  $\theta = 0$ ,  $\gamma = 1$ :

$$ds_t = \kappa s_t dt + \sigma s_t dW_t$$

Brennan y Schwartz (1980) emplean un modelo para que refleja reversión a la media, y al igual que Black y Scholes (1973) y Dothan (1978) se establece que la desviación típica de los cambios en los spreads es proporcional a su nivel. Por tanto este modelo simplemente añade al modelo de Dothan (1978) un proceso de reversión a la media. En el modelo general  $\gamma = 1$  obteniéndose:

$$ds_t = \kappa(\theta - s_t)dt + \sigma s_t W_t$$

El modelo de Cox *et al.* (1980), CIR (1980) o modelo CIR-VR establece una varianza muy sensible al nivel de los spreads sin embargo éstos no presentan reversión a la media. En el modelo general  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 3/2$  por lo que se obtiene:

$$ds_t = \sigma s_t^{\frac{3}{2}} dW_t$$

Cox (1975) y Cox y Ross (1976) postulan un modelo de elasticidad de varianza constante al cual se le denomina generalmente como modelo CEV, el cual engloba como casos particulares a los modelos de Black and Scholes (1973), Dothan (1978) y CIR (1980). En el modelo general  $\alpha = 0$ , por lo que se obtiene:

$$dr_t = \kappa r_t dt + \sigma r_t^\gamma Z_t$$

### 3.2 Estimacion de los modelos

Para realizar la estimación de los modelos empleamos la siguiente a discretización aproximada<sup>81</sup> del modelo CKLS en tiempo continuo:

$$s_{t+1} - s_t = \alpha + \beta s_t + \varepsilon_{t+1}$$

$$\text{Con } E(\varepsilon_{t+1}) = 0, E(\varepsilon_{t+1}^2) = \sigma^2 s_t^{2\gamma} \text{ y } E(\varepsilon_{t+1}^3) = 0.$$

---

<sup>81</sup> El modelo discreto exacto es  $r_{t+1} = e^\beta r_t + \frac{\alpha}{\beta}(e^\beta - 1) + \varepsilon_{t+1}$  con  $E(\varepsilon_{t+1}\varepsilon_{s+1}) = 0$ ,  $s \neq t$  y  $E(\varepsilon_{t+1}^2) = \frac{\alpha^2}{2\beta}(e^\beta - 1)r_t^{2\gamma}$ . La expresión aproximada se obtiene dado que la función  $e^\beta$  toma el valor  $e^\beta = 1 + \beta$  en valores próximos de  $\beta = 0$ . De esta forma la diferencia entre la discretización exacta y la aproximada será mayor cuanto mayor sea el valor absoluto del parámetro  $\beta$ . En general, el error de dicha aproximación será menor cuando la discretización sea realizada sobre períodos cortos de tiempo.

A partir de las restricciones anteriormente expuestas se estiman los parámetros de siete de los modelos expuestos anteriormente mediante máximo verosimilitud, obteniendo los resultados expuestos en la tabla 4.

**Tabla 4**  
Estimación de los parámetros de los modelos

Modelo	$\alpha$	$\beta$	$\sigma^2$	$\gamma$
Merton	0,000049	0	0,000003	0
Vasicek	0,000459	-0,033563	0,000003	0
CIR SR	0,000378	-0,026891	0,000191	0,5
Dothan	0	0	0,016070	1
GBM	0	0,009823	0,016070	1
Brennan-Schwartz	0,000448	-0,033721	0,015823	1
CIR VR	0	0	1,658125	1,5

Estos parámetros son empleados para la simulación de las trayectorias mensuales de los spreads a lo largo del próximo año, junto con el modelo lognormal. que estima el valor del spread transcurrido un mes como:

$$CS_1 = CS_0 * e^X$$

Donde X sigue una distribución  $N(\mu; \sigma^2)$ <sup>82</sup>.

#### 4. EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LOS MODELOS

En este apartado realizaremos el análisis de los resultados de los spreads proyectados por cada uno de los modelos. Para ello nos ayudaremos del análisis gráfico y posteriormente un análisis estadístico de los spreads simulados.

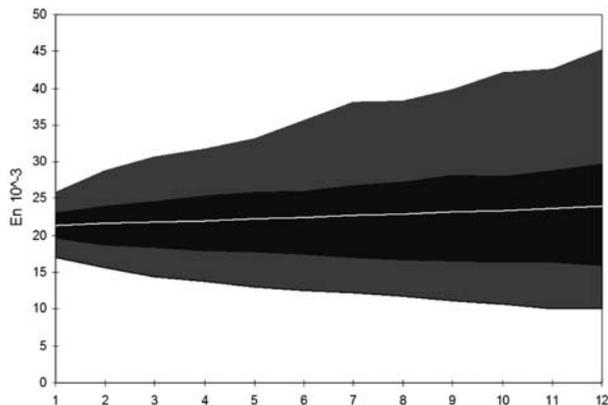
<sup>82</sup> En nuestro caso se toman como valores la media histórica (0,0025) y su desviación típica (0,119). Siguiendo el modelo lognormal el spread de crédito a 12 meses se puede escribir como:  $CS_{12}(t) = CS_{11}(t)e^X$  siendo  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Por lo que:  $X = \ln\left(\frac{CS_{12}(t)}{CS_{11}(t)}\right) \approx \frac{CS_{12}(t) - CS_{11}(t)}{CS_{11}(t)}$  cuando  $\frac{CS_{12}(t) - CS_{11}(t)}{CS_{11}(t)} \approx 0$ . Por lo que el modelo lognormal relaciona el cambio absoluto en los spreads de crédito,  $CS_{12}(t) - CS_{11}(t)$  de forma lineal con el nivel actual del spread de crédito  $CS_{11}(t)$ .

En los siguientes gráficos se muestran la evolución temporal<sup>83</sup> de los spreads generados por los ocho modelos evaluados. Para ello se ha empleado 10.000 simulaciones de tipo Latino-Hipercúbico<sup>84</sup> para cada uno de los 12 meses simulados mediante el programa @risk.

Como se aprecia en el gráfico 2, el modelo del movimiento browniano geométrico (GBM) para los cambios en los spreads, proporciona unos spreads medios crecientes y unos niveles para cada período de simulación en el percentil 95 demasiado altos en base al comportamiento histórico de estos. La razón de este comportamiento es que dicho modelo no exhibe reversión a la media en los spreads generados.

**Gráfico 2**

Evolución temporal del modelo GBM



En el gráfico 3 se muestra el resultado de aplicar el modelo de Brennan-Schwartz que proporciona unos spreads medios decrecientes y unas bandas de niveles de los spreads más consistentes con la realidad que el modelo anterior. El tipo a largo plazo al cual los spreads de

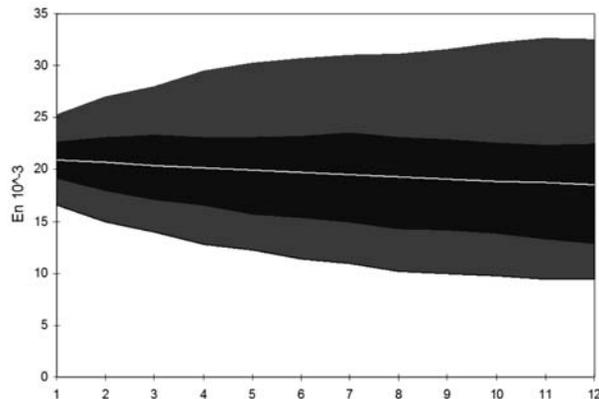
83 En el gráfico de evolución temporal se representa para cada uno de los 12 meses de simulación la representa la media (línea central amarilla), los valores del percentil 75 y del percentil 25 (parte superior e inferior respectivamente de la zona de color oscuro), y los valores del percentil al 95% y al 5% de confianza (parte superior e inferior de la zona de color claro).

84 El método de simulación Latino Hibercúbico (LHS) es un método de recogida de muestras por estratificación. Permite recrear una distribución con una mayor precisión para un mismo número de iteraciones que el método de Monte Carlo común, en el que las muestras son seleccionadas de forma completamente aleatoria.

crédito están revirtiendo en este modelo es el 1,33% y su velocidad de reversión es del 3,4%.

### Gráfico 3

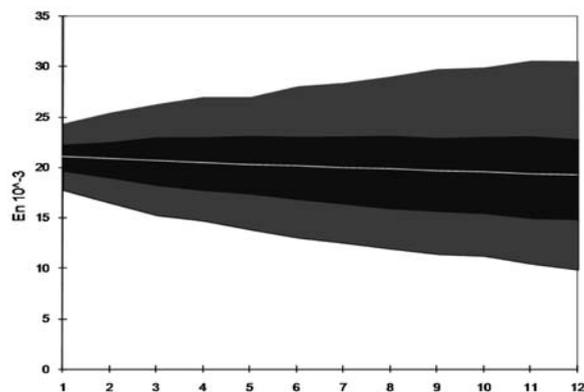
Evolución temporal del modelo de Brennan-Schwartz



En el gráfico 4 se muestra el modelo CIR (1985) que proporciona unos spreads medios decrecientes y unas bandas de niveles de los spreads más reducidas que el modelo anterior. El tipo a largo plazo al cual los spreads de crédito están revirtiendo en este modelo es el 1,40% y su velocidad de reversión es del 2,69%.

### Gráfico 4

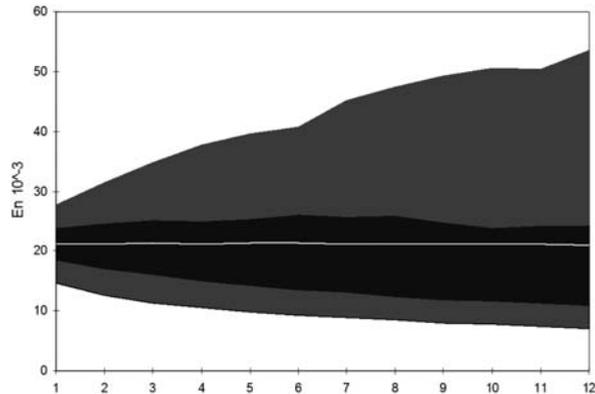
Evolución temporal del modelo de CIR (1985)



El gráfico 5 muestra el comportamiento del modelo CIR (1980) que proporciona unos spreads medios iguales al del último período

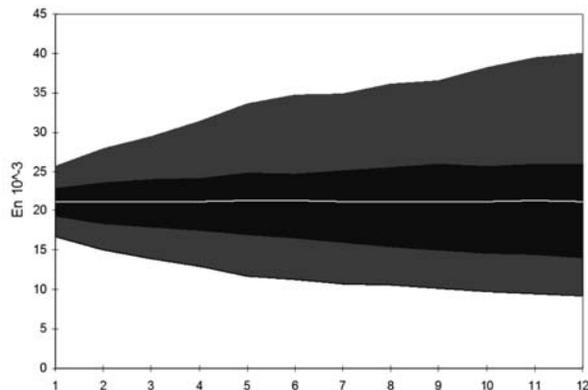
histórico previo a la simulación<sup>85</sup>, pero genera escenarios con los spreads demasiado elevados.

**Gráfico 5.** Evolución temporal del modelo de CIR (1980)



El gráfico 6 muestra el comportamiento del modelo de Dothan que proporciona unos spreads medios iguales al del último período histórico previo a la simulación, y genera escenarios con los spreads demasiado elevados aunque inferiores al del modelo anterior.

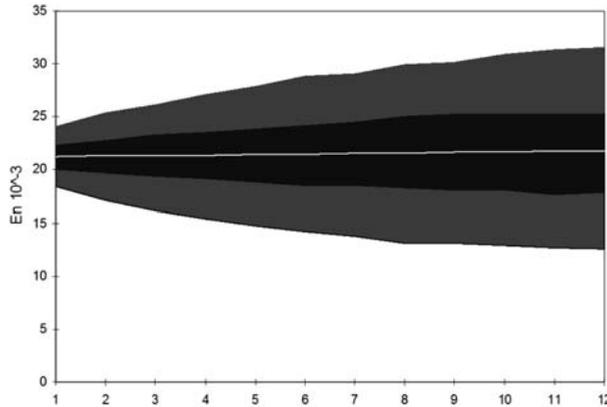
**Gráfico 6.** Evolución temporal del modelo de Dothan



<sup>85</sup> Este modelo, al igual que otros que no tienen deriva proporcionan spreads medios idénticos al del último período histórico a partir del cual se efectúa la simulación. Sin embargo, en la práctica los resultados pueden variar ligeramente debido a los errores que en esta se comete en la simulación. Una simple solución a este problema consiste en aumentar el número de simulaciones efectuadas.

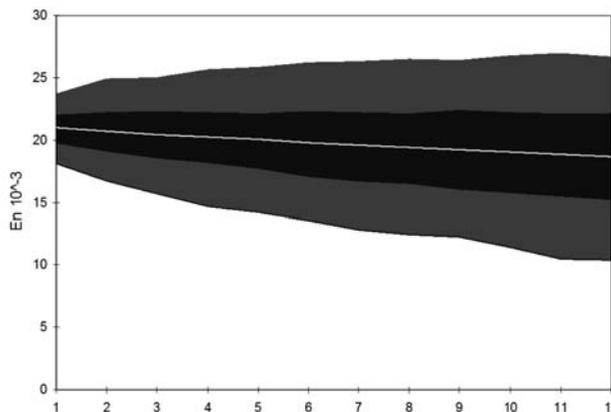
El gráfico 7 muestra el comportamiento del modelo de Merton que proporciona unos spreads medios iguales al del último período histórico previo a la simulación y genera escenarios de spreads con una banda de valores realistas.

**Gráfico 7.** Evolución temporal del modelo de Merton



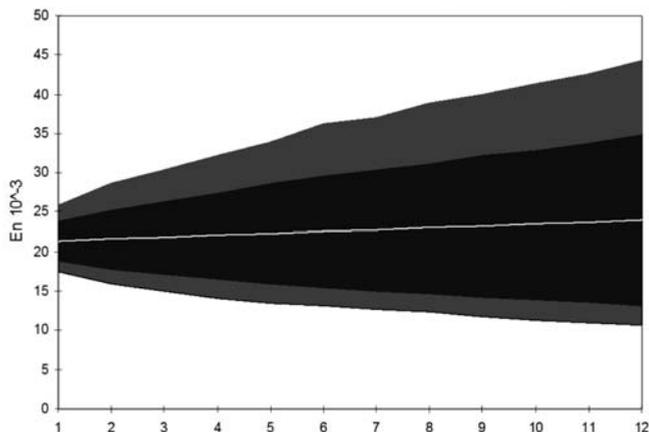
En el gráfico 8 se muestra el comportamiento del modelo de Vasicek que proporciona unos spreads medios decrecientes a lo largo del período de simulación generando unos escenarios de spreads con una banda de valores realistas. El tipo a largo plazo al cual los spreads de crédito están revirtiendo en este modelo es el 1,37% y su velocidad de reversión es del 3,36%.

**Gráfico 8.** Evolución temporal del modelo de Vasicek



Finalmente, en el gráfico 9 se muestra el comportamiento del modelo Lognormal que proporciona unos spreads medios crecientes a lo largo del periodo de simulación generando unos escenarios de spreads con valores que consideramos demasiado elevados. Esto es debido a que los cambios de un periodo a otro se distribuyen como una normal que tiene una media positiva.

**Gráfico 9.** Evolución temporal del modelo Lognormal



Las anteriores apreciaciones basadas en los gráficos se corroboran al realizar un análisis estadístico sobre el total de los 12.000 escenarios simulados para cada modelo. En el cuadro inferior se muestran las principales medidas estadísticas históricas de los spreads BBB y los ocho modelos empleados para la simulación de los spreads futuros. Los modelos del tipo CKLS que semejan simular unos spreads más realistas con el comportamiento histórico analizado son los modelos que suponen que la volatilidad condicional de los cambios en los spreads es constante (Merton y Vasicek) o proporcional a la raíz cuadrada de su nivel (CIR-SR). El resto de los modelos suponen heterocedasticidad y al ser simulados generan unos escenarios con spreads demasiado elevados, a pesar de que los valores medios y mismo los percentiles 75 y 90 generan unos niveles asumibles. Por otra parte, el modelo lognormal en el que se basa la fórmula estándar de QIS4, también presenta el mismo comportamiento que los modelos heterocedasticos del tipo CKLS.

**Tabla 5**

Resumen estadístico de los modelos simulados en los 12 meses

	Histórico	Vasicek	CIR-SR	Merton	Brennan-Schwartz	Dothan	BGM	CIR-VR	Lognormal
Mínimo	0,65%	-0,14%	0,47%	0,03%	0,41%	0,36%	0,50%	0,34%	0,62%
Media	1,23%	1,97%	2,01%	2,15%	1,97%	2,12%	2,26%	2,12%	2,27%
Máximo	2,78%	3,41%	4,15%	3,93%	5,73%	7,46%	7,81%	25,47%	9,11%
Desv est.	0,58%	0,39%	0,46%	0,44%	0,60%	0,71%	0,78%	1,28%	0,76%
Rango	2,13%	3,55%	3,68%	3,90%	5,32%	7,10%	7,32%	25,13%	8,50%
Moda	0,80%	2,04%	2,35%	2,27%	2,14%	1,84%	1,82%	1,59%	1,85%
Percentil 5	0,68%	1,30%	1,26%	1,42%	1,10%	1,11%	1,23%	0,88%	1,28%
Percentil 10	0,71%	1,47%	1,43%	1,60%	1,25%	1,30%	1,42%	1,04%	1,46%
Percentil 25	0,80%	1,73%	1,71%	1,89%	1,55%	1,66%	1,77%	1,37%	1,79%
Percentil 75	1,68%	2,22%	2,28%	2,40%	2,31%	2,46%	2,60%	2,49%	2,59%
Percentil 90	2,15%	2,45%	2,58%	2,70%	2,71%	3,02%	3,23%	3,31%	3,20%
Percentil 95	2,31%	2,59%	2,79%	2,91%	3,02%	3,45%	3,72%	4,12%	3,67%
Percentil 99	2,53%	2,90%	3,20%	3,27%	3,74%	4,36%	4,90%	7,03%	4,86%
Percentil 99,5	2,53%	2,99%	3,33%	3,44%	4,01%	4,85%	5,42%	8,79%	5,36%

A continuación nos centramos en los resultados obtenidos en el mes 12 de nuestra simulación, que debe ser empleado para evaluar las cargas de capital de los activos expuestos a este riesgo. Los resultados obtenidos son mostrados en la tabla 6. Como se aprecia en dichos datos, una vez más son los modelos de spreads generados a partir de Merton, Vasicek y CIR-SR los que logran unos niveles más realistas.

**Tabla 6**

Resumen estadístico de los modelos simulados en el último mes

	Vasicek	CIR-SR	Merton	Brennan-Schwartz	Dothan	BGM	CIR-VR	Lognormal
Media	1,87%	1,92%	2,18%	1,86%	2,12%	2,40%	2,10%	2,40%
Percentil 95	2,67%	2,93%	3,15%	3,25%	3,99%	4,52%	5,35%	4,42%
Percentil 99	3,01%	3,39%	3,62%	4,24%	5,31%	5,55%	9,68%	5,70%
Percentil 99,5	3,14%	3,66%	3,71%	4,79%	5,60%	6,19%	13,75%	6,34%

## 5. RIESGO ASOCIADO AL SPREAD DE CRÉDITO ( $Mkt_{SP}$ ): APLICACIÓN PRÁCTICA

En este apartado proponemos calcular el riesgo de spread de una compañía aseguradora en Solvencia II empleando el modelo estándar y las especificaciones con mejor ajuste obtenido en el apartado anterior. El riesgo de spread refleja el cambio en el valor de los activos<sup>86</sup> debido al movimiento de la curva de tipos de interés en relación a la curva sin riesgo. La carga de capital por spread de una obligación o bono se calcula en QIS4 multiplicando el valor de mercado  $VM_i$  por una función de su duración modificada  $m(dur_i)$  y por un factor asociado a la clase de rating  $F(rating_i)$ <sup>87</sup>.

$$Mkt_{SP}^{RF} = \sum_i VM_i * m(dur_i) * F(rating_i) + \Delta Pasivo_{ul}$$

**Tabla 7**

Spreads de stress considerados en cada modalidad de Rating  $F(rating_i)$ .

Rating <sub>i</sub>	F(Rating <sub>i</sub> )
AAA	0.25%
AA	0.25%
A	1.03%
BBB	1.25%
BB	3.39%
B	5.60%
CCC o inferior	11.20%
Sin rating <sup>1</sup>	2%

Fuente: CEIOPS (2008)

En cuanto a la función de la duración, se establece un límite a la duración modificada en función del rating, de modo que se reduce la variación máxima, ya que al asumir una relación lineal se estaría

<sup>86</sup> En QIS4 se establecen tres clases de activos: renta fija, estructurados de crédito y derivados de crédito. Por lo tanto la carga de capital por spread de crédito ( $Mkt_{spread}$ ) es la suma de las cargas de capital para estas tres clases de activo. En el texto sólo se muestra la carga resultante a la renta fija.

<sup>87</sup> Además debe considerarse  $\Delta Liab_{ul}$  que es el impacto del escenario de estrés en el pasivo para aquellas pólizas en las cuales el beneficiario soporta el riesgo de inversión.

sobreestimado el riesgo y, consecuentemente, el nivel de capital necesario<sup>88</sup>.

A continuación se expone el cálculo del capital necesario para una obligación con valor de mercado de 100€ con calificación BBB y duración modificada de 4 años. Aplicando la fórmula indicada con anterioridad, la carga de capital sería:

$$Mkt_{SP}^{RF} = \sum_i VM_i * m(dur_i) * F(rating_i) + \Delta Pasivo_{ul} = 100 * 4 * 0,0125 = 5€$$

Para calcular la carga de capital resultante de las distintas especificaciones a considerar en un modelo interno se han realizado 1.000 simulaciones de los spreads a través de los distintos modelos. Mediante los spreads generados se puede analizar la repercusión sobre el precio del bono analizado con anterioridad. De este modo, el efecto del riesgo de spread al cabo de 12 meses se estima a través de los cambios en el precio del bono para lo que se emplea la siguiente

$$P_{12} = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1 + r + CS_{12})}$$

Donde:

$P_{12}$  es el precio del bono en el mes 12

$CF_t$  es el flujo de caja del bono

$r$  es la tir libre de riesgo

$CS_{12}$  es el spread simulado en el mes 12

<sup>88</sup> La función del rating equivale a un factor del 0,25% para los ratings AAA y AA, 1,03% para A, 1,25% para BBB, 3,39% para BB, 5,6% para B, un 11,2% para CCC o inferior y un 2% para los no calificados. Los límites para la duración modificada son los siguientes:

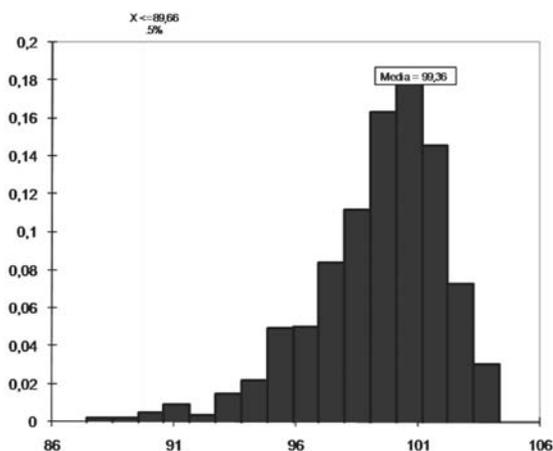
$$m(dur_i) = \left. \begin{array}{ll} \max(\min(dur_i; 8); 1) & \text{si rating}_i = \text{BB} \\ \max(\min(dur_i; 6); 1) & \text{si rating}_i = \text{B} \\ \max(\min(dur_i; 4); 1) & \text{si rating}_i = \text{CCC o inferior, sin rating} \\ \max(dur_i; 1) & \text{resto} \end{array} \right\}$$

En los gráficos 10, 11, 12 y 13 se muestra el precio del bono para un nivel de confianza del 99,5% para los escenarios generados empleando el modelo lognormal, CIR-SR, Merton y Vasicek. En línea con los resultados obtenidos en el apartado anterior el modelo lognormal es el que provoca una mayor pérdida en el valor del bono. El VaR (99,5%) empleando este modelo es de 10,34€. El siguiente modelo que asigna una mayor carga de capital es el modelo de Merton, que provoca una cantidad de capital asociada al riesgo de spread de 4,25€. El modelo CIR (1985) determina el capital necesario en niveles similares al anterior al asociar una carga de capital de 4,05€. Finalmente el modelo de Vasicek es el que proporciona una menor cifra de recursos necesarios al estimar éstos en 2,71€.

Los resultados muestran que los niveles de spreads simuladas y las cargas de capital para soportar dicho riesgo son muy dependientes del modelo empleado. Esto implica que aquellas compañías que deseen utilizar un modelo propio deben validar exhaustivamente su modelo para no subestimar o sobreestimar la cantidad de capital necesaria para cubrir el riesgo en el entorno actual de elevada volatilidad.

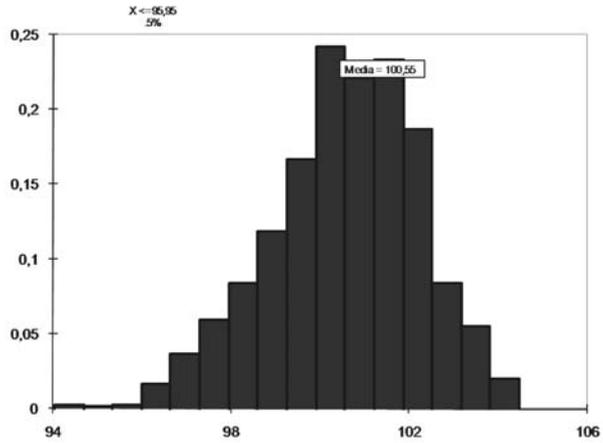
### Gráfico 10

Distribución del valor del bono ante los escenarios de spreads del modelo lognormal



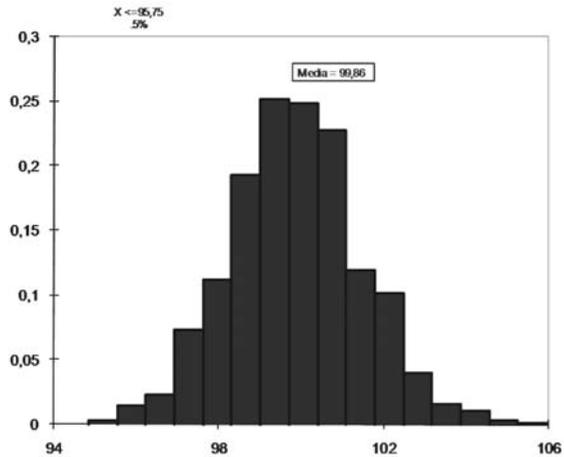
### Gráfico 11

Distribución del valor del bono ante los escenarios de spreads del modelo CIR (1985)



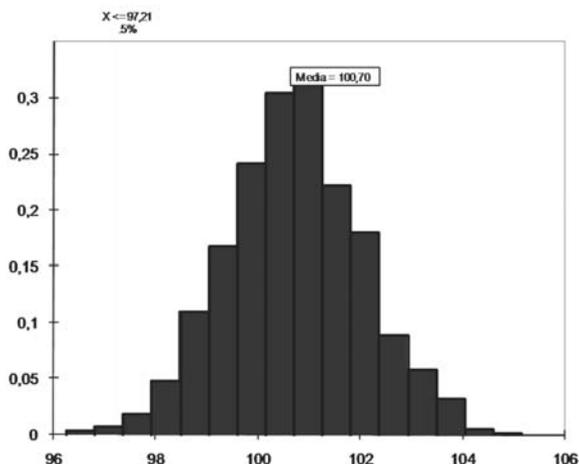
### Gráfico 12

Distribución del valor del bono ante los escenarios de spreads del modelo de Merton



### Gráfico 13

Distribución del valor del bono ante los escenarios de spreads del modelo de Vasicek



## CONCLUSIÓN

El proyecto Solvencia II lleva a cabo una revisión de las normas de valoración de la situación financiera con el objetivo de mejorar el control y la medición de los riesgos a los que se exponen las aseguradoras europeas. Bajo este nuevo marco, la determinación de las necesidades de capital se puede calcular mediante un modelo estándar o bien con modelos internos previamente aprobados por el regulador. El presente trabajo orienta sobre la forma de elaborar un modelo interno para medir el riesgo de spread desde un punto de vista teórico y mediante el análisis del comportamiento empírico de distintas alternativas propuestas en la literatura. Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que los niveles de los spreads simulados y los capitales necesarios son dependientes de la especificación empleada. Esto supone un importante reto no sólo para las compañías aseguradoras que deseen desarrollar su modelo sino también a las autoridades de supervisión encargadas de aprobar su uso.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arak, M. y Corcoran, P.J. (1996): "Yields on privately placed debt: examining the behavior", *Journal of Portfolio Management*, Spring, pp. 88-96.

Bierens, H.; Huang, J. y Kong, W. (2005): "Time-Series Estimation of Aggregate Corporate Bond Credit Spreads", Presentado a China International Conference in Finance, Kunming, 6 de Julio, Disponible en <http://www.ccf.org.cn/cicf2005/paper/20050126063455.PDF> [consultado 1 de marzo de 2009].

Black, F. y Cox, J. (1976): "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions", *Journal of Finance*, Vol. 35, No. 2, pp. 351-367.

Black, F. y Scholes, M. (1973): "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Brennan, M.J. y Schwartz, E.S. (1980): "Analyzing Convertible Bonds", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 15, No. 4, pp. 907-929.

Chan, K.C.; Karolyi, G.A.; Longstaff F.A. y Sanders, A.B. (1992): "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", *Journal of Finance*, Vol. 47, No. 3, pp. 1209-1228.

Cox, J.; Ingersoll, J. y Ross, S. (1980): "An analysis of variable rate loan contracts", *Journal of Finance*, Vol. 35, No 2, pp. 389-403.

Cox, J.; Ingersoll, J. y Ross, S. (1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, Vol. 53, No 2, pp. 385-407.

Dothan, L.U. (1978): "On the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, Vol. 6, No 1, pp. 59-69.

Duffee, G.R. (1998): "The relation between Treasury yields and corporate bond yield spreads", *Journal of Finance*, Vol. 53, No. 6, pp. 2225-2241.

Duffie, D. y Kan, R. (1996): “A Yield-Factor Model of Interest Rates”, *Mathematical Finance*, Vol. 6, No. 4, pp. 379–406.

Duffie, D y Singleton, K. J. (1999): “Modeling the term structure of defaultable bonds”, *Review of Financial Studies*, Vol. 12, No. 4, pp. 687-720.

Jarrow, R., Lando, D. y Turnbull, S. (1997). “A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads”, *The Review of Financial Studies*, Vol. 10, No. 2, pp. 481–523.

Jarrow, R. y Turnbull, S. (1995): “Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk”, *Journal of Finance*, Vol. 50, No. 1, pp. 53–85.

Longstaff, F.A. y Schwartz, E. (1995a): “A Simple Approach to Value Fixed and Floating Rate Debt”, *Journal of Finance*, Vol. 50, No. 3, pp. 789–819.

Longstaff, F.A. y Schwartz, E. S. (1995b): “Valuing credit derivatives”, *The Journal of Fixed Income*, Vol. 5, No. 1, pp. 6–12.

Merton, R.C. (1973): “Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

Merton, R.C. (1974): “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates”, *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, pp. 449–470.

Pauling, B. (2002): “Credit Spread Modeling Considerations”, Presentado a Valuation Actuary Symposium, Society of Actuaries, 19-20 Septiembre, Florida.

Pedrosa, M. y Roll, R. (1998): “Systematic risk in corporate bond credit spreads”, *Journal of Fixed Income*, December, pp. 7-26.

Prigent, J., Renault, O. y Scaillet, O. (2001): “An Empirical Investigation into Credit Spread Indices”, *The Journal of Risk*, Vol. 3, No. 3. pp. 27-56.

Vasicek, O. (1977): "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No 2, pp. 177-188.

**(Footnotes)**

1 De esta forma, y en base a la función de la duración una obligación sin rating con duración modificada de 5 años tendrá una carga de capital por riesgo de spread del 8% de su valor de mercado.



## Ponencia 27

# OUTLIERS AND THE ESTIMATION OF MINIMUM CAPITAL RISK REQUIREMENTS

Aurea Grané and Helena Veiga

### ABSTRACT

In this paper we focus on the impact of outliers on the calculation of risk measures such as minimum capital risk requirements (MCCRs), which are defined as the amount necessary to absorb a pre-specified percentage of the financial institutions' unforeseen losses. Our Monte Carlo study reveals that the presence of these outliers lead the GARCH model to forecast volatility inaccurately and consequently to generate biased MCRRs. This finding is quite relevant since it can be manifested in losses for those financial institutions that calculate model based MCRRs. This paper detects this problem and proposes a correction procedure based on wavelets that solves in an effective and easy way the effects of outliers on the MCRRs estimates.

### 1. INTRODUCTION

The increase in volatility over the recent years and the cataclysm involving financial markets across the world, specially from September 2008, has manifested the importance of the finance and banking system protection against large trading losses. With the Basel Accord of 1988 the first measure to tackle the problem was taken by demanding the financial institutions to reserve part of the capital to absorb a pre-specified percentage of these unforeseen losses (denoted minimum capital risk requirements). This accord created a need for new quantitative measures that are able to estimate accurately these possible

losses. In this context, the value-at-risk (VaR) has become a very popular tool. It provides an estimate of the probability of likely losses to occur over a given time horizon due to changes in market prices.

Following the 1995 amendment to the Basel Accord, banks were allowed to use internal models to calculate their VaR thresholds. This amendment tried to ratify the fact that the standard approach to the estimation of the minimum capital risk requirements (MCCR) and VaR led to very conservative estimates and consequently to a wasting of valuable resources in those financial institutions that used this standard approach. Nevertheless, the lately poor evolution of financial markets emphasizes the bad protection of financial institutions to extreme events and the importance of forecasting volatility accurately for providing good estimates of MCCR and VaR.

Several models have been proposed in the literature to capture the main features of financial time series: excess of kurtosis and volatility clustering, which consists of periods of high (low) volatility followed by periods of high (low) volatility. The ARCH model by Engle (1982) and the GARCH model by Bollerslev (1986) became seminal models in financial econometrics, specially due to their easy applicability and good ability in forecasting volatility that is a useful measure of uncertainty (see for instance Lunde and Hansen, 2005). Nevertheless, their parameter and underlying conditional variance estimates are highly affected by the presence of “abnormal” observations that are not predictable and are denoted outliers (see for example Fox, 1972; Van Dijk et al., 1999; Carnero et al., 2008).

The accurate estimation of minimal capital risk requirements depends crucially on the accuracy of the volatility forecasts that are often affected by the presence of outliers. Therefore, in this paper we focus on the study of the effects of additive outliers on the estimation of MCCR for short and long trading investment positions and different day horizons. We analyze the results of applying a correction method based on wavelets proposed by Grané and Veiga (2009) to the data, previous to the estimation of the equation of conditional variance, and we compared the results to the ones obtained with alternative correc-

tion methods. Finally, we compare the previous procedure to a robust estimation of MCRRs by fitting to the return series the  $t$ -distributed GARCH model proposed by Bollerslev (1987) that accommodates data with fat tail distributions (the degrees of freedom are estimated endogenously).

## 2. EMPIRICAL RESULTS

The most important findings in this paper are: first, outliers affect seriously the estimates of minimum capital risk requirements. The effects depend on the magnitude of the outlier and also on the trading investment horizon. The larger are their magnitude and trading investment horizons the higher are the biases. The correction procedure based on wavelets provides MCRR estimates for which the biases are almost eliminated (see Tables 1 and 2).

Moreover, when we compare these MCRRs with the ones computed using robust models to outliers, we observe that the former are smaller (see Tables 3 and 4). This certainly occurs because the volatility forecasts are more accurate when the data is cleaned of outliers for several steps ahead forecast than when we consider robust models, such as the  $t$ -distributed GARCH. Charles (2008) detected and corrected 17 French stock returns and the French Index CAC40 from additive outliers using the methods proposed by Frances and Ghijssels (1999) and observed that after cleaning the series the parameter estimates that govern the volatility dynamic were almost free of biases and that the volatility forecast were much more accurate than the ones obtained with the fat-tail models.

**Table 1**

Minimum capital risk requirements for 95% coverage probability as a percent of the initial value of the FTSE-100 Index Futures. The dimension of the additive level outliers introduced randomly are 5, 10 and 15 standard deviations of the original data.

Long Position							
No. Days	Original	1-Outlier 5 SD	1-outlier 10 SD	1-outlier 15 SD	2-outlier 5 SD	2-outlier 10 SD	2-outlier 15 SD
<b>1</b>	0.995	1.008	1.008	1.011	1.003	1.016	1.036
<b>5</b>	2.180	2.156	2.141	2.122	2.196	2.233	2.288
<b>10</b>	3.015	3.013	2.990	2.919	3.097	3.372	3.665
<b>30</b>	4.770	4.704	4.415	3.967	4.785	4.817	5.037
<b>90</b>	6.456	6.282	6.091	6.067	6.154	5.131	4.394
<b>180</b>	6.800	6.668	6.531	6.584	6.529	5.423	4.323
Short Position							
No. days	Original	1-Outlier 5 SD	1-outlier 10 SD	1-outlier 15 SD	2-outlier 5 SD	2-outlier 10 SD	2-outlier 15 SD
<b>1</b>	1.055	1.063	1.066	1.071	1.061	1.069	1.084
<b>5</b>	2.381	2.391	2.398	2.409	2.445	2.568	2.739
<b>10</b>	3.414	3.461	3.509	3.526	3.452	3.508	3.529
<b>30</b>	6.064	6.134	5.976	5.610	6.067	5.995	6.167
<b>90</b>	10.367	10.225	9.981	9.857	9.162	6.941	5.529
<b>180</b>	14.159	13.976	13.272	12.499	14.283	11.243	5.416

**Table 2**

Monte Carlo finite sample MCRRs for 95% coverage probability as a percent of the initial value of the simulated series (standard deviation) and  $e_r$  stands for the relative error. The size of the artificially introduced additive level outlier is denoted by  $\omega_{AO}$  and  $T$  is the sample size.

	$T$	Long Position		Short Position	
		MCRR	$e_r$	MCRR	$e_r$
<b>1 outlier of size</b> $\omega_{AO}=5$	500	1.337 (0.645)	-0.134	1.361 (0.677)	-0.134
	1000	1.140 (0.557)	-0.261	1.105 (0.553)	-0.298
	5000	1.056 (0.539)	-0.321	1.079 (0.551)	-0.319
<b>1 outlier of size</b> $\omega_{AO}=10$	500	1.283 (0.734)	-0.169	1.306 (0.779)	-0.169
	1000	1.135 (0.576)	-0.264	1.100 (0.573)	-0.301
	5000	1.060 (0.557)	-0.319	1.084 (0.572)	-0.316
<b>1 outlier of size</b> $\omega_{AO}=15$	500	1.197 (0.841)	-0.223	1.220 (0.909)	-0.223
	1000	1.114 (0.647)	-0.278	1.080 (0.645)	-0.313
	5000	1.066 (0.589)	-0.315	1.090 (0.611)	-0.312
<b>2 outliers of size</b> $\omega_{AO}=15$	500	1.751 (1.350)	0.134	1.713 (1.399)	0.090
	1000	1.172 (0.860)	-0.24	1.163 (0.909)	-0.261
	5000	1.114 (0.608)	-0.284	1.141 (0.627)	-0.280
<b>no outliers</b>	500	1.544 (0.585)		1.571 (0.628)	
	1000	1.543 (0.534)		1.573 (0.555)	
	5000	1.556 (0.508)		1.584 (0.526)	

**Table 3**

Monte Carlo finite sample MCRRs for 95% coverage probability as a percent of the initial value of the simulated series corrected for outliers (standard deviation) and  $e_r$  stands for the relative error. The size of the artificially corrected additive level outlier is denoted by  $\omega_{AO}$  and  $T$  is the sample size.

	$T$	Long Position		Short Position	
		MCRR	$e_r$	MCRR	$e_r$
1 outlier of size $\omega_{AO}=5$	500	1.560 (0.593)	0.01	1.588 (0.638)	0.011
	1000	1.555 (0.535)	0.008	1.585 (0.557)	0.008
	5000	1.559 (0.508)	0.002	1.587 (0.528)	0.002
1 outlier of size $\omega_{AO}=10$	500	1.555 (0.681)	0.007	1.584 (0.731)	0.008
	1000	1.556 (0.546)	0.008	1.597 (0.570)	0.015
	5000	1.562 (0.513)	0.004	1.591 (0.534)	0.004
1 outlier of size $\omega_{AO}=15$	500	1.536 (0.843)	-0.005	1.568 (0.914)	-0.002
	1000	1.581 (0.592)	0.025	1.612 (0.622)	0.025
	5000	1.570 (0.526)	0.008	1.598 (0.549)	0.009
2 outliers of size $\omega_{AO}=15$	500	1.559 (1.113)	0.01	1.593 (1.184)	0.014
	1000	1.587 (0.784)	0.029	1.624 (0.858)	0.032
	5000	1.600 (0.559)	0.028	1.630 (0.585)	0.029
no outliers	500	1.544 (0.585)		1.571 (0.628)	
	1000	1.543 (0.534)		1.573 (0.555)	
	5000	1.556 (0.508)		1.584 (0.526)	

**Table 4**

Monte Carlo finite sample MCRRs for 95% coverage probability as a percent of the initial value of the simulated series corrected for outliers (standard deviation) and  $e_r$  stands for the relative error. The size of the artificially corrected additive level outlier is denoted by  $\omega_{AO}$  and  $T$  is the sample size

	$T$	Long Position		Short Position	
		MCRR	$e_r$	MCRR	$e_r$
1 outlier of size $\omega_{AO}=5$	500	1.593 (0.611)	0.032	1.623 (0.661)	0.033
	1000	1.572 (0.537)	0.019	1.602 (0.560)	0.018
	5000	1.596 (0.516)	0.026	1.619 (0.534)	0.022
1 outlier of size $\omega_{AO}=10$	500	1.714 (0.834)	0.11	1.751 (0.919)	0.115
	1000	1.651 (0.599)	0.07	1.684 (0.628)	0.071
	5000	1.582 (0.539)	0.017	1.611 (0.565)	0.017
1 outlier of size $\omega_{AO}=15$	500	1.872 (1.224)	0.212	1.924 (1.419)	0.225
	1000	1.763 (0.739)	0.142	1.803 (0.784)	0.146
	5000	1.685 (0.645)	0.083	1.719 (0.682)	0.085
2 outliers of size $\omega_{AO}=15$	500	2.126 (1.359)	0.377	2.188 (1.536)	0.393
	1000	1.932 (1.068)	0.252	1.989 (1.217)	0.264
	5000		0.032		0.033
no outliers	500	1.544 (0.585)		1.571 (0.628)	
	1000	1.543 (0.534)		1.573 (0.555)	
	5000	1.556 (0.508)		1.584 (0.526)	

## REFERENCES

- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307-327.
- Bollerslev, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *Review of Economic and Statistics* 69, 542-547.
- Carnero, M., D.Peña, and E.Ruiz (2008). Estimating and forecasting GARCH volatility in the presence of outliers. *Working Paper AD2008-13*, Universidad de Alicante.
- Charles, A. (2008). Forecasting volatility with outliers in GARCH models. *Journal of Forecasting*, 27, 551-565.
- Engle, R. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica* 50, 987-1008.
- Frances, P. and H. Ghijssels (1999). Additive outliers, GARCH and forecasting volatility. *International Journal of Forecasting*, 15, 1-9.
- Fox, A. (1972). Outliers in time series. *Journal of Royal Statistical Society B* 34, 350-363.
- Grané, A. and H.Veiga (2009). Wavelet-based detection of outliers in volatility models. *Working Paper 09-04, Statistics and Econometric Series 03*, Universidad Carlos III de Madrid. (<http://hdl.handle.net/10016/3507>)
- Lunde, A. and P.Hansen (2005). A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1). *Journal of Applied Econometrics* 20 (7), 873-889.
- Van Dijk, D., P. Franses, and A. Lucas (1999). Testing for ARCH in the presence of additive outliers. *Journal of Applied Econometrics* 14, 539--562.

## Ponencia 28

### EL UMBRAL DE LA PÉRDIDA OPERACIONAL: UNA REVISIÓN CRÍTICA A LA PROPUESTA REGULATORIA<sup>89</sup>

Enrique José Jiménez Rodríguez, José Manuel Feria Domínguez  
y José Luis Martín Marín

#### RESUMEN

El Nuevo Acuerdo de Capital (Basilea II) propone, explícitamente, la cifra de 10.000 euros como umbral mínimo de la pérdida operacional, a efectos de cómputo de capital regulatorio. Sin embargo, el Banco de España, en su transposición del acuerdo –Circular de solvencia 3/2008–, señala de manera implícita una cuantía notablemente inferior, en concreto, 3.000 euros. En cualquier caso, ambas normas ofrecen la posibilidad de que la entidad de crédito, en última instancia, establezca discrecionalmente dicha cifra. En este contexto, realizamos una revisión crítica de la elección del umbral de la pérdida sobre la modelización y medición del riesgo operacional y, por consiguiente, su trascendencia en la determinación del cargo de capital para cubrirlo. Para ello, a partir de la base de datos interna de pérdidas operacionales (BDIPO) proporcionada por una Caja de Ahorros española, aplicamos un modelo de medición avanzado (Loss Distribution Approach, LDA), estableciendo distintos umbrales de modelización. Los resultados de la investigación ponen de manifiesto la importancia de la elección del umbral en la cuantificación del cargo de capital. De otro lado, advertimos que los umbrales propuestos en el nuevo marco regulatorio pudieran resultar inadecuados para algunas entidades o incluso inviables en determinadas categorías de riesgo operacional, dada la escasa profundidad y amplitud de las BDIPO actuales.

<sup>89</sup> Este trabajo ha sido financiado por la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía, mediante la convocatoria de Proyectos de Excelencia 2007. Referencia PO6-SEJ01537.

**KEY WORDS:** Regulación Bancaria, Riesgo Operacional, Umbral de Modelización, Capital en Riesgo.

**JEL classification codes:** G20, G21, G32, C15, C16

## 1. INTRODUCCIÓN

En junio de 2008, entró en vigor la nueva Circular del Banco de España sobre “Determinación y Control de los Recursos Propios Mínimos” en las entidades de crédito, transposición de las directivas comunitarias que incorporan el Acuerdo de Basilea II (2004). Este nuevo marco regulatorio incluye, explícitamente, requerimientos de capital por riesgo operacional. Entre los enfoques propuestos para su estimación, las metodologías avanzadas (Advanced Measurement Approach, AMA) constituyen el estadio evolutivo al que debería tender la industria bancaria, ya que proporcionan una asignación más eficiente del capital. Dentro de las AMA, el enfoque que goza de una mayor aceptación es el Modelo de Distribución de Pérdidas (Loss Distribution Approach, LDA). Metodológicamente, este modelo genera una distribución de pérdidas operacionales, a partir de la cual se infiere directamente el Capital en Riesgo (Capital at Risk, CaR) como el percentil 99,9% de la misma.

En este sentido, para asegurar la correcta implantación y validación del modelo LDA, el Comité de Basilea (2006: 167) plantea la necesidad de combinar cuatro elementos: (i) los datos internos de pérdidas operacionales; (ii) los datos externos de pérdidas relevantes; (iii) el análisis de escenarios; y (iv) la información del entorno de negocio y los controles internos implementados. De estos cuatro, el componente esencial del modelo es la base de datos interna de pérdidas operacionales (BDIPO), concibiéndose al resto de factores como complementarios a éste. Así, la ausencia de una BDIPO suficientemente amplia y representativa restará robustez al enfoque avanzado y conllevará, en última instancia, la no validación por parte del supervisor. Del mismo modo, el Comité (2006: 168) propone el establecimiento de un umbral mínimo, cifrado en 10.000 euros, para la recopilación de dichos eventos de pérdidas. Sin embargo, la reciente Circular del Banco de

España señala, de manera implícita, una cuantía notablemente inferior; esto es, 3.000 euros. En cualquier caso, ambas normas ofrecen la posibilidad de que la entidad de crédito, en última instancia, establezca dicha cifra.

Advertida esta divergencia, llevamos a cabo un análisis empírico, a partir de la BDIPO suministrada por una Caja de Ahorros española, para testar el impacto del umbral en la modelización y medición del riesgo operacional. De las siete categorías de riesgo operacional propuestas por el Comité (2006: anexo 9) hemos seleccionado discrecionalmente dos, por tratarse de riesgos muy dispares en su naturaleza: “ejecución, entrega y gestión de procesos” (en adelante, procesos), caracterizado por una alta frecuencia y una baja severidad; y “relaciones laborales y seguridad en el puesto de trabajo” (en adelante, recursos humanos), definido por una baja frecuencia y una alta severidad. Los resultados de la investigación ponen de manifiesto la trascendencia de la elección del umbral en la determinación del consumo de capital. Asimismo, señalamos que los umbrales propuestos en el nuevo marco regulatorio pudieran resultar inadecuados para algunas entidades o incluso inviables en determinadas categorías de riesgo operacional, dada la escasa profundidad y amplitud de las BDIPO actuales.

## **2. DATOS**

Como hemos apuntado con anterioridad, los datos empleados pertenecen a una Caja de Ahorros española que opera en el segmento de banca minorista. Con objeto de aproximar el perfil de riesgo de ésta, hemos seleccionado una serie de variables descriptivas referidas a los tres periodos de muestra utilizados, véase la tabla 1:

**Tabla 1**

Información relevante de la entidad de crédito objeto del estudio.

CONCEPTOS		2004	2005	2006
INFORMACIÓN CORPORATIVA	Activos (miles de euros)	10.324.407	12.667.914	14.570.011
	Fondos Propios (miles de euros)	421.371	599.867	688.452
INDICADORES DE VOLUMEN	Nº de Empleados	2.591	2.544	2.577
	Oficinas Operativas	395	399	404
	Cajeros Automáticos	539	541	564
	Tarjetas Emitidas	735.600	597.232	629.110

La BDIPO utilizada acopia eventos de siete periodos distintos, desde el año 2000 al 2006. Obsérvese en la tabla 2 el número de sucesos operacionales registrados para cada uno de ellos:

**Tabla 2**

Número de eventos anuales por riesgo operacional.

AÑO	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Nº EVENTOS	2	5	2	50	6.397	4.959	6.580

De la tabla 2 se desprende que la frecuencia de eventos desde el año 2000 al 2003 no es significativa. Por consiguiente, para no distorsionar la distribución de frecuencia, sólo consideramos a efectos de modelización los periodos 2004, 2005 y 2006. A este respecto, el Comité (2006: 168) indica que el historial de pérdidas operacionales debe comprender un periodo mínimo de cinco años. No obstante, permite a los bancos que utilicen por primera vez una metodología AMA valerse de un periodo de observación de, al menos, tres años, como en el caso que nos ocupa. Por otra parte, hemos convertido las pérdidas nominales en unidades monetarias equivalentes, ajustando a través del IPC (Índice de Precios al Consumo) los importes de las pérdidas, siendo 2006 el año base.

El estudio de la muestra seleccionada se ha comenzado con un Análisis Exploratorio de los Datos (EDA, Exploratory Data Analysis). Así, en total, el riesgo de procesos recoge 13.904 observaciones, mientras que sólo aparecen recopilados 37 eventos de pérdidas en la categoría de recursos humanos. En la tabla 3 se muestran los descriptivos estadísticos de ambas categorías de riesgos.

**Tabla 3**  
Descriptivos estadísticos.

Estadísticos	Procesos	Recursos Humanos
<b>N</b>	13.904	37
<b>Mínimo (€)</b>	0,03	28,00
<b>Máximo (€)</b>	170.073,46	375.252,75
<b>Media (€)</b>	147,84	15.240,42
<b>Mediana (€)</b>	50,00	1.156,74
<b>Moda (€)</b>	50,00	28,00
<b>Desviación Típica (€)</b>	1.606,45	62.118,27
<b>Asimetría</b>	88,26	5,72
<b>Curtosis</b>	9.077,73	33,77

A partir de la información contenida en la tabla 3, podemos subrayar una serie de rasgos, algunos comunes otros diferenciadores. En cuanto a las medidas de tendencia central, hay que remarcar que la media es, en ambos casos, mayor que la mediana; este hecho constituye un claro indicio de la asimetría positiva de las distribuciones. Además, constatamos que tanto el importe medio de la pérdida, como su dispersión, son muy superiores en recursos humanos en comparación con procesos, poniendo de manifiesto la mayor severidad de las pérdidas del primero. Por otra parte, los valores apreciados de los parámetros de forma nos describen distribuciones con asimetría positiva y leptocurtosis; si bien, cada riesgo presenta distinto grado de intensidad en ambas medidas.

En esta línea, en un sentido amplio, las distribuciones de riesgo operacional estudiadas se caracterizan por una agrupación, en el cuerpo central, de valores baja severidad y una cola ancha, marcada por sucesos poco comunes pero de alto importe. Estas características se aprecian con mayor claridad observando los percentiles de los distintos riesgos, ilustrados en la tabla 4.

**Tabla 4**  
Percentiles de las distribuciones de los riesgos operacionales.

RIESGO	PERCENTIL							
	5%	25%	50%	75%	90%	95%	99%	99,9%
<b>Recursos Humanos</b>	72,13	446,18	1.156,74	2.986,04	28.132,74	90.044,77	375.252,75	375.252,75
<b>Procesos</b>	5,13	18,63	50,00	102,70	213,00	452,00	1.426,01	9.431,14

Para ilustrar aún más si cabe la inconveniencia del importe mínimo fijado por los reguladores, basta comprobar cómo el 99% de las pérdidas, para el riesgo de procesos, se sitúan por debajo de los 1.500 euros; cifra notablemente inferior al umbral regulatorio.

### 3. LA MODELIZACIÓN DE LA PÉRDIDA OPERACIONAL.

#### 3.1 Metodología

A la hora de identificar la pérdida operacional, es preciso definir dos variables: por un lado, la severidad, o cuantía monetaria de la pérdida; y, de otra parte, la frecuencia con que se repite el suceso durante un período de tiempo establecido, generalmente un año. Así, en la práctica, la implementación del enfoque LDA requiere de un proceso secuencial que comienza con la modelización, por separado, de las distribuciones de severidad y frecuencia, para devenir en la obtención de una tercera que recibe el nombre de distribución de pérdidas agregadas.

- *La Distribución de Severidad*

Atendiendo a Böcker y Klüppelberg (2005), la severidad se define, desde un punto de vista estadístico, como: “una variable aleatoria continua,  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , que toma valores positivos<sup>90</sup>, independientes entre sí e idénticamente distribuidos”. En base a esta acepción, Panjer (2006: Capítulo 4) establece un compendio de las funciones que, potencialmente, podrían ser utilizadas para modelizarla. Sin embargo, en la práctica, la peculiar forma de la distribución de pérdidas operacionales<sup>91</sup> hace que se restrinja el número de funciones con ajustes significativos. En cualquier el caso, el Comité (2001), a modo de refe-

---

90 Las pérdidas operacionales como gasto contable representan partidas negativas en la cuenta de resultados de la entidad, sin embargo, en la modelización se toman como valores positivos.

91 Distribuciones identificadas por un cuerpo central que agrupa eventos de alta frecuencia y baja o media severidad, y una cola pesada caracterizada por sucesos poco frecuentes pero muy severos en sus pérdidas, que confieren un carácter leptocúrtico a la distribución.

rencia, propuso la distribución Lognormal como función paramétrica para modelizar la severidad, su función de densidad viene definida por la siguiente expresión:

$$X \sim LN(\mu, \sigma) \rightarrow f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad [1]$$

para  $x > 0$ , y donde, el parámetro de escala,  $\mu$ , y el de forma,  $\sigma$ , representan la media y la desviación típica del logaritmo de la variable aleatoria, respectivamente. De forma análoga, para el ajuste de la frecuencia se recomendó la distribución de Poisson. Así, en las primeras fases de desarrollo del modelo LDA, en la industria bancaria se generó un debate –no reflejado en la literatura científica con la misma intensidad– sobre la conveniencia de normalizar un modelo LDA Estándar, “Lognormal y Poisson”, que proporcionara una comparación más homogénea entre los capitales regulatorios de los diferentes bancos.

Para evaluar la idoneidad de la distribución Lognormal, hemos aplicado el contraste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) comparándola con otras funciones alternativas: la Weibull, recurrente para distribuciones de cola suave, y la Pareto, para aquéllas que presentan colas anchas.

#### ▪ *La Distribución de Frecuencia*

La frecuencia se establece a partir del número de eventos ocurridos en un espacio de tiempo determinado, conocido comúnmente como “horizonte de riesgo” (Alexander, 2007). A efectos regulatorios, dicho periodo se fija, para el riesgo operacional, en base anual (Basel, 2006: 166). En consecuencia, si el capital regulatorio debe dar cobertura a las posibles pérdidas que pudiera sufrir la entidad en el espacio temporal de un año, en el desarrollo del enfoque LDA es necesario modelizar la frecuencia anual. En nuestro caso, siguiendo la estructura del modelo LDA Estándar tomamos la distribución de Poisson como la candidata de referencia, Así, si la frecuencia de las pérdidas es una variable aleatoria discreta,  $N$ , que sigue una distribución de *Poisson* ( $Po$ ), entonces:

$$N \sim Po(\lambda) \rightarrow P(N = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad \text{donde } \lambda > 0 \quad [2]$$

Comoquiera que el debate sobre la elección de la distribución de frecuencia no tiene, en la literatura al respecto, la misma intensidad (véase Dutta y Perry, 2006; y Fontnouvelle et al. 2004) hemos fijado la función de Poisson como *ceteris paribus* en nuestro modelo.

### 3.2 Resultados

- *El Ajuste de la Distribución de Severidad*

A lo largo de este trabajo hemos aludido al término umbral de la pérdida, si bien, hay que distinguir entre el umbral de captura o recopilación y el de modelización. Lógicamente, el umbral de la captura condiciona este último. Dado que nuestra base de datos no emplea un umbral mínimo de recopilación, hemos tomado como modelo de referencia aquél que contemple el total de observaciones, es decir, un umbral de 0 euros. En las tablas 5 y 6, mostramos la bondad del ajuste y la estimación paramétrica, por máxima verosimilitud, de las tres funciones propuestas para la severidad en recursos humanos y procesos, respectivamente, empleando un umbral de 0 euros.

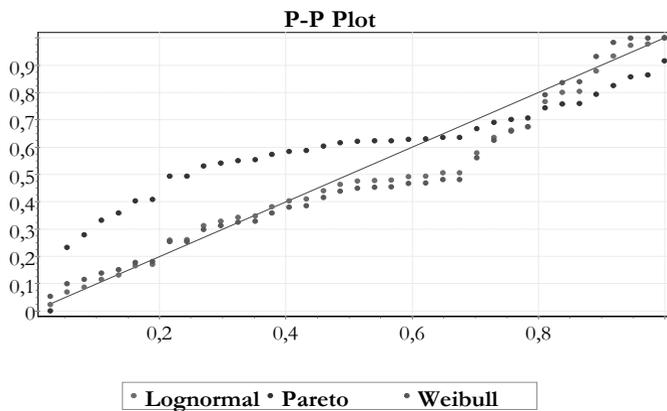
**Tabla 5**  
Recursos Humanos.

Función	Parámetros		Kolmogorov-Smirnov
			D (p-valor)
Weibull	α	0,642	0,196 (0,102)
	β	2.593,10	
Lognormal	μ	7,1747	0,171 (0,205)
	σ	1,908	
Pareto	α	0,260	0,303 (0,002)
	θ	28	

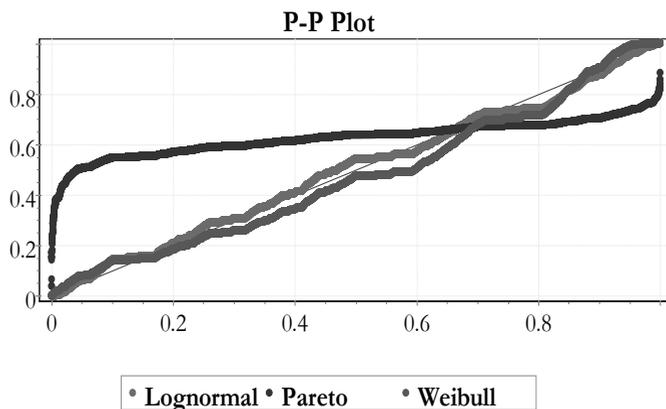
**Tabla 6**  
Procesos.

Función	Parámetros		Kolmogorov-Smirnov
			D (p-valor)
Weibull	$\alpha$	0,891	0,100 (<0,001)
	$\beta$	82,22	
Lognormal	$\mu$	3,763	0,065 (<0,001)
	$\sigma$	1,396	
Pareto	$\alpha$	0,138	0,461 (<0,001)
	$\theta$	0,03	

A tenor de los resultados presentados en las tablas 5 y 6, podemos subrayar que, en ambos casos, la distribución Lognormal logra aproximar mejor los datos observados, seguida de la Weibull y la Pareto, por este orden. No obstante, en términos de significación estadística, para el riesgo de recursos humanos, la función Lognormal presenta un p-valor notablemente superior al que arroja dicha distribución en el riesgo de procesos, el cual no supera el 1%. Justamente, en este riesgo, es donde hemos detectado una mayor distancia entre los estadísticos de prueba y los respectivos valores críticos, para las tres funciones probabilísticas analizadas. Para refrendar las conclusiones indicadas, sobre las pruebas estadísticas de K-S, hemos construido, para cada tipología de riesgo, un P-P Plot que muestra de manera gráfica el ajuste de las tres distribuciones teóricas respecto a la empírica.



**Figura 1**  
P-P Plot Recursos Humanos.



**Figura 2**  
P-P Plot Procesos.

Las figuras anteriores corroboran una mejor adecuación de la distribución Lognormal al trazado de la empírica con un umbral de 0 euros; de ahí que, a efectos de cálculo de capital, optemos por el modelo LDA estándar.

Para testar el efecto umbral en la modelización de la pérdida, hemos definido, discrecionalmente, los siguientes umbrales: 5, 25, 50, 100, 500, 1.000, 3.000 y 10.000 euros. Los resultados de este análisis se presentan en las tablas 7 y 8.

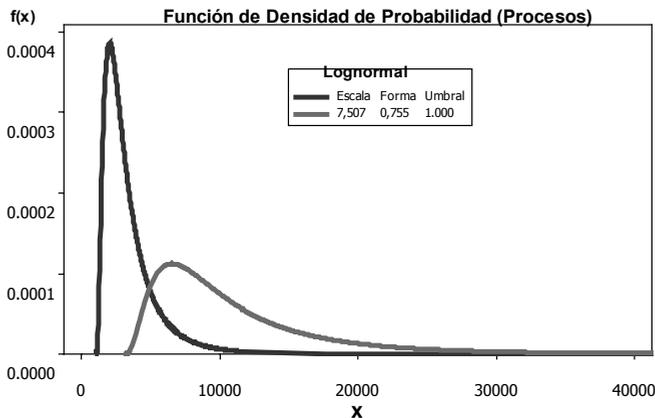
**Tabla 7.** Ajuste en función del umbral para Recursos Humanos.

U	Ob.	Distribución		K-S (p-valor)	U	Ob.	Distribución		K-S (p-valor)		
50	36	Lognormal	$\mu$	7,281	0,185 (0,150)	1.000	20	Lognormal	$\mu$	8,422	0,196 (0,377)
			$\sigma$	1,822					$\sigma$	1,594	
		Weibull	$\alpha$	0,667	0,209 (0,075)			Weibull	$\alpha$	0,710	0,225 (0,227)
			$\beta$	2,788					$\beta$	7,512,7	
		Pareto	$\alpha$	0,340	0,253 (0,016)			Pareto	$\alpha$	0,703	0,270 (0,089)
			$\theta$	77,035					$\theta$	1,095,6	
100	34	Lognormal	$\mu$	7,447	0,204 (0,102)	3.000	9	Pareto	$\alpha$	0,566	0,147 (0,975)
			$\sigma$	1,738					$\sigma$	3,086,1	
		Weibull	$\alpha$	0,693	0,224 (0,055)			Weibull	$\alpha$	0,846	0,198 (0,809)
			$\beta$	3,168,3					$\beta$	21,931	
		Pareto	$\alpha$	0,390	0,234 (0,041)			Lognormal	$\mu$	1,435	0,201 (0,791)
			$\theta$	132,01					$\sigma$	9,803	
500	28	Pareto	$\alpha$	0,607	0,129 (0,690)	10.000	5	Pareto	$\alpha$	0,706	0,233 (0,893)
			$\theta$	510,7					$\theta$	12,000	
		Weibull	$\alpha$	0,718	0,236 (0,075)			Lognormal	$\mu$	10,81	0,244 (0,864)
			$\beta$	4,641,6					$\sigma$	1,161	
		Lognormal	$\mu$	7,884	0,238 (0,071)			Weibull	$\alpha$	1,130	0,280 (0,741)
			$\sigma$	1,598					$\beta$	44,252	
			$\sigma$	1,787				$\beta$	9,530,2		

**Tabla 8.** Ajuste en función del umbral para Procesos.

U	Ob.	Distribución		K-S (p-valor)	U	Ob.	Distribución		K-S (p-valor)		
5	13.287	Lognormal	$\mu$	3,910	0,066 (<0,001)	500	653	Pareto	$\alpha$	1,427	0,129 (<0,001)
			$\sigma$	1,229					$\theta$	500	
		Weibull	$\alpha$	0,965	0,124 (<0,001)			Lognormal	$\mu$	6,915	0,186 (<0,001)
			$\beta$	90,717					$\sigma$	0,746	
		Pareto	$\alpha$	0,435	0,227 (<0,001)			Weibull	$\alpha$	1,397	0,255 (<0,001)
			$\theta$	5					$\beta$	1,506,8	
25	9.166	Lognormal	$\mu$	4,518	0,144 (0)	1.000	289	Lognormal	$\mu$	7,507	0,214 (<0,001)
			$\sigma$	0,955					$\sigma$	0,755	
		Pareto	$\alpha$	0,770	0,174 (<0,001)			Weibull	$\alpha$	1,361	0,226 (<0,001)
			$\theta$	25					$\beta$	2,722,9	
		Weibull	$\alpha$	1,143	0,219 (<0,001)			Pareto	$\alpha$	1,670	0,257 (<0,001)
			$\beta$	151,71					$\theta$	1,000	
50	6.965	Pareto	$\alpha$	1,098	0,121 (<0,001)	3.000	57	Pareto	$\alpha$	1,361	0,157 (0,107)
			$\theta$	50					$\theta$	3,000	
		Lognormal	$\mu$	4,823	0,183 (<0,001)			Lognormal	$\mu$	8,741	0,181 (0,042)
			$\sigma$	0,894					$\sigma$	0,757	
		Weibull	$\alpha$	1,158	0,241 (<0,001)			Weibull	$\alpha$	1,61	0,210 (0,011)
			$\beta$	204,38					$\beta$	8,303,3	
100	4.000	Lognormal	$\mu$	5,333	0,199 (<0,001)	10.000	11	Pareto	$\alpha$	1,418	0,210 (0,644)
			$\sigma$	0,863					$\theta$	10,118	
		Weibull	$\alpha$	1,152	0,223 (<0,001)			Weibull	$\alpha$	1,594	0,242 (0,466)
			$\beta$	341,05					$\beta$	22,607	
		Pareto	$\alpha$	1,373	0,245 (<0,001)			Exponencial	$\lambda$	41,002	0,282 (0,289)
			$\theta$	100							

En líneas generales, el test de K-S desarrollado vuelve a mostrar una escasa significación estadística para los umbrales pequeños, en el riesgo de procesos; según vamos elevando el umbral va mejorando el ajuste. En cualquier caso, la función Lognormal parece ajustar mejor para umbrales bajos y la de Pareto para elevados. El efecto umbral en la estimación paramétrica de la distribución se puede vislumbrar a partir del gráfico de la función de densidad de probabilidad. Se ha ilustrado, figura 3, dicha función para la Lognormal con dos umbrales distintos, 1.000 y 3.000 euros. A medida que aumenta el umbral se eleva el valor de la media y la desviación típica de la muestra observada, tensionando la estimación del parámetro de escala.



**Figura 3**

Función de Densidad para la distribución *Lognormal* con diferentes umbrales

- *El Ajuste de la Distribución de Frecuencia*

Una vez reescrita la función de severidad, en base al umbral, el siguiente paso es estimar la de frecuencia. Para el umbral de referencia, es decir, 0 euros, la estimación del parámetro de la distribución de Poisson no conlleva dificultad alguna, pues coincide con la media aritmética del número de los eventos anuales. En la tabla 9, detallamos los valores obtenidos por dicho parámetro en ambos riesgos:

**Tabla 9**

Parámetros estimados para la distribución de frecuencia.

Riesgo Operacional	Poisson ( $\lambda$ )
Recursos Humanos	12,33
Procesos	4.634,67

En cambio, cuando establecemos umbrales de modelización, el número medio de eventos registrados por encima de los mismos, no representa exactamente la probabilidad real de riesgo. En sintonía con esta aserción, Carrillo y Suárez (2006) expresan de manera literal que: *“los datos observados son sólo una parte de los datos totales, por lo que la frecuencia real es mayor que la frecuencia observada, ya que ésta corresponde únicamente a pérdidas por encima del umbral”*. Sobre la estructura del modelo LDA Estándar, Frachot et al. (2003) plantean una forma sencilla de recalculer el parámetro lambda ( $\lambda$ ) a través de la siguiente expresión:

$$\lambda_R = \frac{\lambda_O}{\Pr\{Pérdida > U\}} \quad [3]$$

donde, la frecuencia real,  $\lambda_R$ , es igual al cociente entre la frecuencia observada,  $\lambda_O$ , y la probabilidad de que acontezca una pérdida por encima del umbral,  $U$ . Al establecer la función Lognormal como distribución de severidad podemos interpretar matemáticamente la ecuación como:

$$\lambda_R = \frac{\lambda_O}{1 - F(U; \mu, \sigma)} \quad [4]$$

representando  $F(U; \mu, \sigma)$  la función de distribución de probabilidad,  $F(x)$ , de la Lognormal con un parámetro de escala,  $\mu$ , y de forma,  $\sigma$ , esto es,  $P(X \leq x)$ .

## 6. EL CAPITAL REGULATORIO POR RIESGO OPERACIONAL

### 6.1 Metodología

Una vez caracterizadas las funciones de frecuencia y severidad para los distintos umbrales de modelización, mediante el algoritmo de convolución obtenemos una tercera distribución, esto es, de pérdidas agregadas, que denotamos por  $S(i,j)$ . Así pues, la pérdida total ligada a una línea de negocio  $i$  y originada por un tipo de riesgo  $j$ , viene dada por:

$$S(i, j) = \sum_{n=0}^{N(i, j)} L_n(i, j) \quad [5]$$

dicha cuantía es, por tanto, el cómputo de un número aleatorio de eventos de pérdidas,  $N(i,j)$ , con cuantías también aleatorias, bajo el supuesto de que las  $L_n(i,j)$  están idénticamente distribuidos y son independientes entre sí. Entre las técnicas de convolución más recurrentes (véase Panjer, 2006), utilizamos la de Simulación de Monte-Carlo. Como señalan Dahen y Dionne (2007), el desarrollo de esta metodología no es rápido pero sí preciso. De este modo, siguiendo el esquema ilustrado a continuación, detallamos el proceso de simulación:

- Generamos una muestra aleatoria de la distribución de frecuencia, es decir, simulamos  $n$  eventos de pérdidas por año.
- Tomamos  $n$  muestras aleatorias de la distribución de severidad:

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n$$

- El cómputo de las  $n$  pérdidas simuladas representan la pérdida total:

$$X = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n$$

- Volvemos a la primera secuencia, y la repetimos  $m$  veces, con lo que obtenemos:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$$

Por tanto,  $m$  representa el número de simulaciones generadas. A este respecto, Moscadelli (2004) cita a Lawrence (Citigroup)<sup>92</sup>, quién sostiene que son necesarias un millón de simulaciones para calcular el percentil 99,9%. De cualquier modo, cuanto mayor sea el número de simulaciones realizadas menor será el error relativo cometido y, por ende, más robusta la estimación. En nuestro estudio, para cada una de las convoluciones efectuadas, hemos realizado un millón de simulaciones<sup>93</sup>, obteniendo errores relativos muy por debajo del 1%.

Una vez determinada la distribución de pérdidas agregada, la obtención del capital regulatorio es inmediata, por cuanto basta aplicar el concepto de Valor en Riesgo a la citada distribución, o lo que es lo mismo, el percentil 99,9%, como sugiere el Comité (2006: 167). Actuando bajo el supuesto de que la entidad de crédito no tiene provisionada su pérdida esperada (Expected Loss, EL), los requerimientos de capital han de cubrir tanto ésta como la no esperada (Unexpected Loss, UL); de ahí que identifiquemos la cifra del VaR con la cuantía del Capital en Riesgo (CaR). No obstante, en cada una de los riesgos estudiados hemos examinado las cuantías correspondientes tanto de EL como de UL con el objetivo de remarcar el potencial ahorro de capital que supondría la provisión de la pérdida esperada.

## 6.1 Resultados

Al modelizar sólo las pérdidas que superen un determinado importe, implícitamente, estamos aplicando el denominado método POT (peaks-over-threshold) o del umbral, usado en la Teoría de Valores Extremos. En este sentido, McNeil y Saladin (1997) indican que: “25 observaciones por encima del umbral sería el conjunto mínimo para poder trabajar; estimaciones realizadas con menos datos no serían fiables”. Así, subrayan que los resultados más rigurosos se alcanzan a partir de las 200 observaciones. Por otra parte, Embrechts et al. (2003) refrendan esta postura en el caso de pérdidas log-normalmen-

<sup>92</sup> Conferencia impartida en el 10º ICBI's Geneva Risk Management Forum, en 2003.

<sup>93</sup> El lenguaje de programación empleado es el C++. Asimismo, se ha utilizado una computadora con un procesador Intel Core 2 de 1,83 GHz y 2 GB de memoria; el tiempo requerido en cada ejercicio de simulación ha sido proporcional al número de eventos de la muestra.

te distribuidas, hecho que coincide con el escenario de este ejercicio. Por lo que, como norma genérica, hemos tomado esta cota mínima de eventos para efectuar nuestros cálculos.

A continuación presentamos, en formato tabular, las estimaciones del cómputo de capital regulatorio ( $CaR_{99,9}$ ) para recursos humanos y procesos, respectivamente.

**Tabla 10.** Efecto umbral en Recursos Humanos.

Umbral	Frecuencia Poisson( $\lambda_p$ )	Severidad	EL	UL	$CaR_{99,9}$
0	12,33	$LN\left(\begin{matrix} \mu=7,174 \\ \sigma=1,908 \end{matrix}\right)$	99.405	1.773.522	1.872.927
50	12,40	$LN\left(\begin{matrix} \mu=7,281 \\ \sigma=1,822 \end{matrix}\right)$	94.707 (-4,73%)	1.435.767 (-19,04%)	1.530.474 (-18,28%)
100	11,94	$LN\left(\begin{matrix} \mu=7,447 \\ \sigma=1,738 \end{matrix}\right)$	92.709 (-6,74%)	1.214.428 (-31,52%)	1.307.137 (-30,21%)
500	10,96	$LN\left(\begin{matrix} \mu=7,884 \\ \sigma=1,598 \end{matrix}\right)$	104.255 (+4,88%)	1.006.321 (-39,88%)	1.170.576 (-37,50%)

**Tabla 11.** Efecto umbral en Procesos.

Umbral	Frecuencia Poisson( $\lambda_p$ )	Severidad	EL	UL	$CaR_{99,9}$
0	4.634,67	$LN\left(\begin{matrix} \mu=3,763 \\ \sigma=1,396 \end{matrix}\right)$	528.987	75.128	604.115
5	4.568,85	$LN\left(\begin{matrix} \mu=3,910 \\ \sigma=1,229 \end{matrix}\right)$	485.162 (-8,28%)	50.760 (-32,44%)	535.922 (-11,29%)
25	3.345,96	$LN\left(\begin{matrix} \mu=4,518 \\ \sigma=0,955 \end{matrix}\right)$	483.846 (-8,53%)	42.014 (-44,08%)	525.860 (-12,95%)
50	2.744,61	$LN\left(\begin{matrix} \mu=4,823 \\ \sigma=0,894 \end{matrix}\right)$	508.903 (-3,80%)	46.008 (-38,76%)	554.911 (-8,14%)
100	1.665,65	$LN\left(\begin{matrix} \mu=5,333 \\ \sigma=0,863 \end{matrix}\right)$	500.496 (-5,39%)	57.189 (-23,88%)	557.685 (-7,69%)
500	263,49	$LN\left(\begin{matrix} \mu=6,915 \\ \sigma=0,746 \end{matrix}\right)$	350.555 (-33,73%)	93.606 (+24,60%)	444.161 (-26,48%)
1.000	122,51	$LN\left(\begin{matrix} \mu=7,507 \\ \sigma=0,755 \end{matrix}\right)$	296.619 (-43,93%)	120.873 (+60,89%)	417.492 (-30,89%)
3.000	22,57	$LN\left(\begin{matrix} \mu=8,741 \\ \sigma=0,757 \end{matrix}\right)$	187.986 (-64,46%)	203.548 (+170,93%)	391.534 (-35,18%)

Antes de iniciar el comentario de los resultados, queremos matizar que no ha sido factible la aplicación del umbral de 10.000 euros, propuesto por el Comité, dado que para los riesgos operacionales de referencia, no se ha contado con el mínimo de eventos requeridos (25) para realizar estimaciones realistas. Asimismo, sólo el riesgo de procesos ha presentado suficientes observaciones por encima de la cota de 3.000 euros para determinar con rigor el Capital en Riesgo.

En cuanto a los resultados alcanzados, subrayamos el alto grado de sensibilidad advertido en el CaR respecto al umbral de modelización. Observamos en el riesgo de recursos humanos que conforme aumenta el umbral, el consumo de capital disminuye, respecto al cálculo de referencia (umbral 0).

En los umbrales más bajos, la forma y la escala de la distribución de severidad apenas sufren una modificación sustancial; en cambio, sí se mitiga  $\lambda$ , es decir, la frecuencia media de eventos, resultando tras la convolución capitales menores.

De otra parte, los umbrales más altos presentan: un menor número medio de eventos anuales; una atenuación de la asimetría y curtosis; y una elevada media y varianza. En términos de capital, estos caracteres se traducen en una cuantía de pérdida no esperada muy por encima de la generada en umbrales cercanos a cero. A modo de ejemplo, la UL de procesos con un umbral de 3.000 euros, supera en un 170,93% a la del de 0 euros.

## **5. CONCLUSIONES**

El estudio desarrollado sobre el efecto umbral ha puesto de manifiesto no sólo su impacto directo sobre el consumo de capital, sino también la trascendencia de la modelización probabilística. Así pues, destacamos la alta sensibilidad del CaR al umbral; asunto que requerirá en el seno de la entidad un tratamiento minucioso. Sin embargo, dada la escasa profundidad y amplitud de las BDIPO actuales, lo más

operativo quizás sea utilizar toda la información disponible, es decir, establecer un umbral de modelación de 0 euros.

Por otra parte, el aumento del umbral induce un desplazamiento de la distribución hacia la derecha del eje de abscisas, lo que provoca un aumento del valor de las medidas de posición y dispersión y, por tanto, de su parámetro de escala. En sentido opuesto, al ir eliminando gradualmente las observaciones más bajas, se rebaja la asimetría y la curtosis de la distribución teórica. Si bien, esto no conlleva, en un sentido estricto, el abandono de un escenario leptocúrtico.

Por último, la menor densidad del cuerpo central de la distribución, confiere al test de ajuste una mayor sensibilidad a las desviaciones en la cola, donde la distribución de Pareto, a priori, se convierte en la mejor candidata. En líneas generales, hemos advertido que estableciendo umbrales de elevado importe esta función obtiene ajustes significativos. No obstante, hay que indicar que los parámetros de forma estimados en la mayoría de los casos confieren a la distribución unos momentos de orden 2, 3 y 4, esto es, varianza, asimetría y curtosis infinitos; lo que en términos de capital se podría traducir en cifras económicas poco realistas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexander, C. (2007): “Valor en Riesgo Operacional”. En Fernández-Laviada, A. (2007): La Gestión del Riesgo Operacional: de la Teoría a su Aplicación. Ediciones 2010, Madrid.

Basel Committee on Banking Supervision (2001): “Working Paper on the Regulatory Treatment of Operational Risk”. N°8, Basilea, Septiembre.

(2004): “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework”. N°107, Basilea, Junio.

(2006): “Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework - Comprehensive Version”. Basilea, junio.

Böcker, K. y Klüppelberg, C. (2005): "Operational VaR: a Closed-Form Approximation". Risk, Diciembre.

Carrillo, S. y Suarez, A. (2006): "Medición Efectiva del Riesgo Operacional". Estabilidad Financiera, N°11, pp. 61-89, Noviembre.

Dahen, H. y Dionne, G. (2007): "What about Underevaluating Operational Value at Risk in the Banking Sector?". Working Paper 07-05, Canada Research Chair in Risk Management, September.

Dutta, K., y Perry, J. (2006): "A Tale of Tails: An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational". Risk Capital, Working Paper, Federal Reserve Bank of Boston.

Embrechts P., Furrer H. y Kaufmann R. (2003): "Quantifying Regulatory Capital for Operational Risk". Derivatives Use, Trading and Regulation 9(3), 217-233.

Fontnouvelle, P., Rosengren, E. y Jordan, J. (2004) : "Implications of Alternative Operational Risk Modeling Techniques". Working Paper. Federal Reserve Bank of Boston.

Frachot, A., Moudoulaud, O. y Roncalli, T. (2003): "Loss Distribution Approach in Practice". Documento de trabajo, Credit Lyonnais.

McNeil, A. y Saladin, T. (1997): "The Peaks Over Thresholds Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions". Proceedings of 28th International ASTIN Colloquium.



## Ponencia 29

### UN ENFOQUE NO PARAMÉTRICO PARA AVANZAR EN LA MEDICIÓN DEL RIESGO OPERACIONAL EN ENTIDADES FINANCIERAS DE TAMAÑO MEDIO

María Dolores Oliver Alfonso, Ana I. Irimia Diéguez y Filippo di Pietro

#### RESUMEN

El Nuevo Acuerdo de Basilea (Basilea II) incorpora un requerimiento de capital explícito para el riesgo operacional. Desafortunadamente, aunque los enfoques avanzados para la medición del riesgo operacional evolucionan rápidamente, la ausencia de datos internos fiables de pérdidas operacionales en instituciones financieras de pequeña y mediana dimensión dificulta el empleo de estos modelos.

Con la utilización de una muestra de datos proveniente de una Caja de Ahorros Española de tamaño mediano, intentamos encontrar el mejor modelo que se ajuste a la base de datos con la utilización de la metodología estadística definida como enfoque de distribución de pérdidas (*Loss Distribution Approach* –LDA-). Las distribuciones pueden claramente variar enormemente respecto a la de otras instituciones financieras. En el trabajo que presentamos, se hace un esfuerzo para establecer una metodología que ayude a las entidades financieras a enfrentarse a la introducción de metodologías avanzadas para la medición y control del riesgo operacional (en el contexto de Basilea II). De manera que estas entidades puedan obtener importantes beneficios, sea en términos de eficiencia en la determinación del capital reglamentario o bien en términos de gestión del riesgo.

En nuestro trabajo, después de un exhaustivo análisis exploratorio de los datos, investigamos que distribución de frecuencia se ajusta

mejor a nuestros datos. Especialmente, comparamos la distribución de Poisson con la binomial negativa. Descubrimos que la distribución binomial negativa implica significativamente más variabilidad en el número de pérdidas operacionales respecto a la Poisson.

En relación a la distribución de severidad, nuestro trabajo muestra que ninguna distribución paramétrica se ajusta a nuestros datos, por lo cual, en nuestro caso es mejor usar los datos sin especificar ninguna distribución. Con este fin, presentamos un método donde combinamos la distribución empírica para la severidad de las pérdidas con la distribución de Poisson y la binomial negativa para la distribución de frecuencia de las pérdidas.

Como ultimo paso, para mostrar la robustez de nuestro modelo, comparamos con un modelo estándar, construido usando la distribución lognormal para la severidad de la pérdida y la distribución de Poisson para la frecuencia. Los resultados muestran que el modelo estándar “infraestima” enormemente el Value at Risk operacional.

El VaR operacional estimado con la distribución empírica puede ser utilizado como base de comparación ya que no necesita que se justifique un modelo paramétrico subyacente.

**Palabras clave:** riesgo operacional, Basilea II, Loss Distribution Approach.

JEL Classification: G10, G20, G21, G32, C11, C14.

## 1. INTRODUCCIÓN

A finales de 2006, el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea emitió el borrador final sobre las guías de implementación de las reglas de adecuación del nuevo capital internacional (Convergencia internacional de Medidas y Normas de Capital o, abreviadamente, “Basilea II”) para mejorar la estabilidad financiera a través de la convergencia de las regulaciones supervisoras del capital bancario. La última revisión del Acuerdo de Basilea representa la segunda

revisión de los cambios regulatorios desde el original Acuerdo de Basilea de 1988.

Desde la primera versión de la nueva propuesta de Basilea, reguladores, profesionales y académicos han estado discutiendo como definir y medir el riesgo operacional y, en consecuencia, como determinar los requisitos adecuados de capital. Tradicionalmente, la banca ha visto dos grupos principales de riesgo que originan y afectan al negocio de la industria financiera: el riesgo de crédito y el riesgo de mercado. De manera que los restantes riesgos se agrupaban como “otros riesgos” y se consideraba bien, que no merecía la pena prestarles atención, o bien, imposibles de gestionar. A menudo, en años recientes, estos riesgos residuales eran equiparados a riesgos operacionales bajo la presunción de que estaban vinculados a las operaciones bancarias.

Los riesgos de mercado y de crédito son riesgos específicos de los bancos y dependen, por un lado, de las partes que intervienen en las relaciones bancarias, y de otro lado, de los instrumentos financieros utilizados; mientras que los riesgos operacionales están, generalmente, vinculados a cualquier tipo de actividad empresarial.

La inclusión de los requisitos de capital en base al riesgo operacional en el Nuevo Acuerdo ha llevado a los bancos con sistemas de control menos sofisticados a comenzar a gestionar esta clase de riesgo de forma más efectiva. De igual modo, aquellas organizaciones que ya aplicaban modelos avanzados de gestión de riesgos operacionales, han alcanzado niveles más altos en sus metodologías de control. Sin embargo, el desarrollo de estas técnicas sigue un proceso dinámico y, por tanto, el sector financiero continúa realizando esfuerzos considerables para mejorar. Este dinamismo se basa en dos factores: por un lado, la inmadurez de las metodologías de medición, debido a que aún no han sido publicados informes sobre la robustez de su fiabilidad, por otro lado, la flexibilidad concedida por el propio Comité de Basilea sobre las técnicas de cálculo de los requisitos de capital, especialmente las referidas a metodologías de medición interna.

Sin embargo, las entidades financieras, especialmente los bancos pequeños y medianos, adolecen de una buena base de datos histórica que les permita introducir metodologías avanzadas. No obstante, muchas de estas compañías de tamaño medio, como es el caso de las Cajas de Ahorros españolas, han puesto en marcha un importante proyecto de recopilación de datos de pérdidas a partir de sus estados financieros. Consideramos que, aunque estas instituciones financieras no pueden utilizar estos datos para desarrollar metodologías avanzadas con el fin de procesar su riesgo operacional, sí pueden llevar a cabo un análisis de estos datos con el fin de adquirir conocimientos sobre su perfil de riesgo operativo.

Siguiendo esta línea de razonamiento hemos desarrollado esta investigación, utilizando una muestra de datos de pérdidas basado en el riesgo operacional de una Caja de Ahorros española de tamaño medio, con el fin de encontrar el modelo que mejor se ajuste a esta base de datos. Por lo tanto, mediante el empleo del Enfoque de la Distribución de Pérdidas (LDA) como metodología estadística, nos fijamos que distribuciones mejor se ajustan a la historia de pérdida de la muestra de nuestra empresa. Estas distribuciones pueden, evidentemente, variar mucho entre las diferentes empresas. Con este fin, se ha realizado un esfuerzo para establecer una metodología de aprendizaje para ayudar a cualquier organización financiera a afrontar el futuro inmediato en el que la introducción de metodologías avanzadas en riesgo operacional puede proporcionar importantes beneficios, tanto en relación con la eficiencia en la determinación del capital regulatorio como en la gestión de riesgos.

Nuestro trabajo comienza con la definición de riesgo operacional y con una breve descripción de las diferentes metodologías de medición propuestas en el Nuevo Acuerdo. A continuación, se exponen las características de la base de datos de pérdidas y la metodología utilizada en la investigación. Esta metodología implica, en primer lugar, la realización de un Análisis Exploratorio de Datos; en segundo lugar, la determinación de la distribución de la frecuencia de las pérdidas, así como su severidad y, por último, la determinación de la distribución de pérdidas agregada. En esta sección, los resultados de la severidad

y frecuencia se combinan con el fin de estimar el capital económico para el riesgo operacional. Para concluir nuestro trabajo, se presentan las principales conclusiones extraídas a lo largo de las líneas de estudio de nuestra investigación.

## **2. DEFINICIÓN DE RIESGO OPERACIONAL**

El Grupo de Gestión de Riesgo (RMG) del Comité de Basilea y representantes de la industria se han puesto de acuerdo sobre una definición normalizada de riesgo operacional, esto es, “el riesgo de pérdidas debido a la insuficiencia o fallo de procesos internos, de personas y sistemas o bien, procedentes de eventos externos”. Esta definición incluye el riesgo legal y excluye el riesgo estratégico y reputacional. El riesgo legal hace referencia (aunque no se limita) a la exposición a multas, sanciones, o daños punitivos derivados de las acciones de supervisión, así como de acuerdos privados. El riesgo estratégico es la probabilidad de pérdidas que depende de las decisiones a largo plazo como resultado de los cambios en el entorno económico y financiero en el que opera el banco, mientras que los riesgos reputacionales surgen por no cumplir las expectativas de los distintos participantes en el negocio bancario.

El Comité reconoce que el riesgo operacional es un término que tiene una variedad de significados en el sector bancario, y por lo tanto, para fines internos, los bancos pueden optar por adoptar sus propias definiciones de riesgo operacional. Sea cual sea la definición a utilizar, una clara comprensión por parte de los bancos de lo que se entiende por riesgo operacional es fundamental para la gestión eficaz y el control de esta categoría de riesgo. También es importante que la definición considere la amplia gama de riesgos operacionales a los que se enfrenta el banco y conozca las causas más importantes de pérdidas operacionales severas.

Con este fin, los bancos deberían distinguir entre las causas y los efectos de los riesgos operacionales. Así, las causas permitirán definir el riesgo operacional en una entidad financiera; a su vez, los efectos posibilitarán la evaluación y medición del riesgo operacional.

El riesgo operacional se clasifica de acuerdo con los siguientes criterios:

1. Tipo de riesgo operacional, tipo de evento y tipo de pérdida. Cuando los bancos registran sus datos de pérdidas operacionales, es fundamental que los clasifiquen en función de tipo de evento y tipo de pérdida, así como que identifiquen correctamente el tipo de riesgo.
2. La magnitud (o severidad) de la pérdida y la frecuencia de la pérdida. Es útil para evaluar el impacto económico y la frecuencia de los riesgos potenciales.

Los tipos de eventos de riesgo operacional que la Comisión - en cooperación con la industria - ha identificado con potencial para resultar en pérdidas importantes incluyen:

1. Fraude interno. Los actos destinados a defraudar, apropiarse de bienes indebidamente o eludir regulaciones, leyes o políticas empresariales, que implique, al menos, a una persona de la entidad financiera. Por ejemplo, la difusión de información inexacta sobre las posiciones de forma intencionada, robo de los empleados, y el uso de información privilegiada sobre la propia cuenta de un empleado.
2. Fraude externo. Los actos destinados a defraudar, apropiarse de bienes indebidamente o eludir la legislación, por un tercero. Por ejemplo, robo, falsificación, peloteo de letras y daños derivados de la piratería informática.
3. Prácticas de empleo y seguridad en el trabajo. Actos incompatibles con leyes o acuerdos sobre empleo, salud o seguridad, procedentes de reclamaciones de pagos y daños personales, o de eventos por discriminación. Por ejemplo, las reclamaciones de trabajadores por indemnización, violación de la salud de los empleados y las normas de seguridad, actividades laborales organizadas, demandas por discriminación, y por responsabilidad civil en general.

4. Clientes, productos y prácticas empresariales. Incumplimiento involuntario o negligente de una obligación profesional frente a clientes concretos, o de la naturaleza o el diseño de un producto. Por ejemplo, las infracciones fiduciarias, el uso indebido de información confidencial del cliente, las actividades comerciales impropias en la contabilidad del banco, blanqueo de dinero, y venta de productos no autorizados.
5. Daños a activos físicos. Pérdida o daños a activos materiales como consecuencia de desastres naturales u otros eventos. Por ejemplo, terrorismo, vandalismo, terremotos, incendios e inundaciones.
6. Interrupciones en la actividad y fallos en los sistemas. Por ejemplo, fallos de hardware y software, problemas de telecomunicaciones, o interrupciones del servicio eléctrico.
7. Ejecución, entrega y gestión de procesos. Errores en el procesamiento de operaciones o en la gestión de procesos como consecuencia de las relaciones comerciales. Por ejemplo, errores en la introducción de datos, fallos en la gestión de garantías, documentación jurídica incompleta, acceso no autorizado a cuentas de clientes, mala gestión de la entidad con potenciales clientes, y disputas de los comerciales.

### **3. METODOLOGÍAS DE MEDICIÓN DEL RIESGO OPERACIONAL**

El Acuerdo de Capital revisado de Basilea exige a los bancos cumplir con un requisito de capital para cubrir el riesgo operacional como parte de una exigencia global de capital basada en el riesgo. Se establecen diversos sistemas para el cálculo del riesgo operacional, que aumentan la sofisticación y la sensibilidad al riesgo, que van desde:

- a) Un enfoque básico puro, basado en un porcentaje fijo de los ingresos brutos (el indicador seleccionado por el Comité como *proxy* de la exposición de la banca al riesgo operacional). Los bancos que utilizan el método del indicador básico deben poseer un nivel de ca-

pital social para el riesgo operacional igual a la media de los últimos tres años de un porcentaje fijo (denominado alfa) de los ingresos brutos anuales positivos.

- b) Pasando por un método estándar intermedio, que extiende la metodología básica mediante la descomposición de las actividades bancarias y, por tanto, del cómputo del cálculo de capital, en ocho líneas de negocio subyacentes.

Dentro de cada línea de negocio, los ingresos brutos son un indicador general que sirve como *proxy* de la escala de las diferentes operaciones bancarias y por lo tanto, de la magnitud probable de la exposición al riesgo operacional en cada una de estas líneas de negocio. El cómputo de capital para cada línea de negocio se calcula multiplicando los ingresos brutos por un factor (identificado como beta) asignado a esa línea de negocio. Beta actúa como un *proxy* para las relaciones de la industria con respecto a la experiencia de pérdidas en riesgo operacional para una determinada línea de actividad y el nivel agregado de ingresos brutos de dichas líneas de negocio.

**Tabla 1**  
Cómputo de la beta por líneas de negocio

Líneas de negocio	Beta
Finanzas Corporativas	18%
Comercialización y ventas	18%
Banca minorista	12%
Banca Comercial	15%
Pagos y liquidaciones	18%
Servicios de agencia	15%
Gestión de activos	12%
Intermediación bursátil	12%

- c) Hasta los métodos más sofisticados, los métodos de medición avanzada (Advanced Measurement Approaches AMA), basados en la elaboración de modelos internos por parte de los bancos. El marco proporciona a los bancos una gran flexibilidad en la elección de las características de sus modelos internos, siempre que cumplan con una serie de criterios cualitativos y cuantitativos flexibles y puedan

demostrar que sus sistemas de medición interna son capaces de predecir estimaciones razonables sobre las pérdidas inesperadas. El uso de AMA está sujeto a la aprobación del órgano supervisor.

El Comité de Basilea de Supervisión Bancaria (el Comité) reconoce que el método para la gestión del riesgo operacional elegido por un banco determinado dependerá de una serie de factores, incluyendo su tamaño y sofisticación, así como la naturaleza y complejidad de sus actividades.

Con respecto a la cuestión de medición, el tema ha sido abordado desde un punto de vista teórico en un número creciente de artículos, libros y trabajos de investigación. En la práctica, este objetivo se complica por el relativamente corto período de tiempo durante el cual la banca ha recopilado datos sobre riesgo operacional; obviamente, la mayor dificultad está en la recopilación de información sobre pérdidas elevadas y poco frecuentes, las cuales, por otra parte, son las que más contribuyen a la exigencia de capital. La necesidad de evaluar la exposición a eventos puntuales potencialmente severos es una de las razones por las que el nuevo marco exige a los bancos complementar los datos internos con otras fuentes (datos externos, análisis de escenarios), a fin de calcular el nivel de exigencia de capital por riesgo operacional.

A diferencia de los modelos de riesgo de mercado y de crédito, la medición del riesgo operacional se enfrenta al reto de la disponibilidad limitada de datos. Además, debido a la sensibilidad de los datos de pérdidas operacionales, las instituciones probablemente no compartirán libremente sus datos sobre pérdidas. Recientemente, la medición del riesgo operacional se ha movido hacia una base de datos impulsada por el Enfoque de Distribución de Pérdidas (LDA). En consecuencia, muchas instituciones financieras han empezado a recoger datos sobre pérdidas operacionales con la intención de avanzar hacia un LDA para medir su riesgo operacional.

En el enfoque AMA, LDA es una herramienta utilizada por los bancos para determinar y evaluar el riesgo operacional. Se trata de un enfoque cuantitativo basado en modelos actuariales que pueden pro-

porcionar el perfil de riesgo de una entidad financiera. Así, LDA se ha convertido en el mejor modelo para el tratamiento estadístico de riesgo operacional basado, por un lado, en una distribución anual del número y del importe total de pérdidas de los eventos de riesgo operacional y, por otro lado, en una distribución de pérdidas agregadas que combina tanto la frecuencia como la severidad de las pérdidas.

#### 4. EJERCICIO DE COMPILACIÓN DE DATOS DE PÉRDIDAS

Desde el año 2001, el *Risk Management Group* del BIS realiza diversos ejercicios de recopilación de datos de pérdidas operacionales.<sup>94</sup>

El primero se recogió en el documento *Quantitative Impact Study 2* (QIS2), en el cual participaron 30 bancos que proporcionaron los datos cuatrimestrales de pérdidas operacionales agregados entre 1998 y 2000.<sup>95</sup>

En mayo de 2001, el BIS emprende el segundo estudio, *Quantitative Impact Study 3* (QIS3), cuyos resultados estuvieron disponibles en 2002. Éste fue mucho más comprensivo y exacto que el primero.<sup>96</sup> El tercer estudio, incluido en el QIS 4, fue realizado separadamente por diferentes países (Japón, Alemania, USA, etc.), variando mucho los resultados en cada país.

En el estudio efectuado en 2005 dentro QIS 5 participaron instituciones de 31 países, con la excepción de EEUU, todos los países del G10 (146 bancos) más otros 19 (un total de 155 bancos).<sup>97</sup> El primer objetivo del mismo fue detectar cambios potenciales en los niveles de requerimientos mínimos de capital bajo el esquema de Basilea II a medida que la industria bancaria progresaba en su implementación. De estos ejercicios de recopilación de datos de pérdidas de riesgo operacional (en adelante RO), incluidos en los estudios cuantitativos de impacto, sólo el realizado en 2002 dispone de un documento completo

<sup>94</sup> Chernobai. A., Rachev. S., Fabozzi. F. *Operational Risk: A guide to Basel requirements, Models, and Analysis* (2006)

<sup>95</sup> Detalles del estudio de 2001 están descrito en BIS (2001b) y BIS (2002a).

<sup>96</sup> Detalles del estudio de 200e están descrito en BIS (2002b) y BIS (2003a).

<sup>97</sup> Los resultado del QIS 5 estan descrito en BIS (2006<sup>a</sup>).

a nivel global, mientras que para el resto de los estudios están disponibles solamente los resultados o, como en el caso de 2004, documentos que describen el ejercicio realizado en un país concreto. Por esta razón, en este trabajo nos basamos en el ejercicio de recopilación del 2002 (LDCE 2002), tanto a título de fuente informativa como a título de base de comparación para el análisis empírico realizado por nosotros.

El estudio se realizó sobre una muestra de 89 bancos con actividad internacional. Las pérdidas registradas se clasificaron por tipo de riesgo operacional y por línea de negocio con un umbral de 10.000 euros. En total se registraron alrededor de 50.000 eventos de fallos operacionales, que supusieron un montante en pérdidas cercano a los 7.800 millones de euros.

**Tabla 2**

Numero de eventos de pérdidas por tipo de evento y línea de negocio

	Fraude interno	Fraude externo	Practica de empleo y seguridad laboral	Clientes productos y practicas comerciales	Daños a activos materiales	Interrupción de operaciones y fallos de sistema	Ejecución entrega y gestión de procesos	Sin inform.	Total
<b>Finanzas Corporativas</b>	17 0.04%	20 0.04%	73 0.15%	73 0.15%	16 0.03%	8 0.02%	214 0.45%	2 0.00%	423 0.89%
<b>Negociación y ventas</b>	47 0.10%	95 0.20%	101 0.21%	108 0.23%	33 0.07%	137 0.29%	4,603 9.74%	8 0.02%	5,132 10.86%
<b>Banca Minorista</b>	1,268 2.68%	17,107 36.19	2,063 4.36%	2,125 4.50%	520 1.10%	163 0.34%	5,289 11.19%	347 0.73%	28,882 61.10%
<b>Banca Comercial</b>	84 0.18%	1,799 3.81%	82 0.17%	308 0.65%	50 0.11%	47 0.10%	1,012 2.14%	32 0.07%	3,414 7.22%
<b>Pago y Liquidación<sup>98</sup></b>	23 0.05%	322 0.68%	54 0.11%	25 0.05%	9 0.02%	82 0.17%	1,334 2.82%	3 0.01%	1,852 3.92%
<b>Servicios de agencia</b>	3 0.01%	15 0.03%	19 0.04%	27 0.06%	8 0.02%	32 0.07%	1,381 2.92%	5 0.01%	1,490 3.15%
<b>Administración de activos</b>	28 0.06%	44 0.09%	39 0.08%	131 0.28%	6 0.01%	16 0.03%	837 1.77%	8 0.02%	1,109 2.35%
<b>Intermediación minorista</b>	59 0.12%	20 0.04%	794 1.68%	539 1.14%	7 0.01%	50 0.11%	1,773 3.75%	26 0.06%	3,268 6.91%
<b>No inf. Línea de negocio</b>	35 0.07%	617 1.31%	803 1.70%	54 0.11%	13 0.03%	6 0.01%	135 0.29%	36 0.08%	1,699 3.59%
<b>Total</b>	1,564 3.31%	20,039 42.39%	4,028 8.52%	3,390 7.17%	662 1.40%	541 1.14%	16,578 35.07%	467 0.99%	47,269 100.00%

Fuente: BIS (2003a).

<sup>98</sup> Las pérdidas se incorporan al historial de pérdidas de la línea de negocio afectada.

Como muestra la tabla 2, los casi 50.000 eventos de pérdidas no se distribuyen uniformemente entre las diferentes líneas de negocio y tipos de eventos. En particular, los datos fueron reagrupados en cuatro de las 8 líneas de negocio, con una concentración máxima en la línea de negocio Banco minorista, que sola representa el 61% de los eventos de pérdidas, mientras que Negociación y Ventas representa el 11% y Banca comercial e Intermediación minorista el 7%. Estas cuatro líneas juntas suman el 86% de los eventos de pérdidas.

Esta reagrupación no uniforme se verifica también al utilizar como criterio de clasificación los eventos de pérdidas, pues los fraudes externos representan el 42% y Ejecución, Entrega y Gestión de Procesos el 35%, seguidos por Práctica de empleo y seguridad laboral con el 8,5% y Clientes productos y prácticas comerciales con el 7%. Estos cuatro tipos de eventos juntos totalizan el 93% de los eventos de pérdidas.

La tabla 3 muestra un total de pérdidas de casi 7,8 billones de euros. La severidad de las pérdidas se distribuye más uniformemente, en comparación con la frecuencia, entre las líneas de negocio y los tipos de eventos. Aunque, también para la severidad se evidencia un cierto grado de concentración. Así como en el caso de la frecuencia de los eventos de pérdidas, la línea de negocio de Banca minorista representa la cantidad más alta, con un 29% de la pérdida total. No obstante, si comparamos en términos relativos la severidad con la frecuencia, observamos que la línea de Banca minorista refleja alta frecuencia pero bajo impacto.<sup>99</sup> A ésta línea, sigue en severidad Banca comercial con el 29% del total de pérdida. Resalta un fenómeno contrario al anterior, de manera que al enfrentar en este caso severidad (29%) con frecuencia (7%), nos encontramos con una línea de negocio que presenta baja frecuencia con alto impacto. Esta diferencia es debida a que la Banca Comercial se enfrenta en mayor medida a la pérdida derivada del tipo Daños en Activos y en menor medida al tipo de evento Ejecución entrega y gestión de procesos.

La severidad en función del tipo de evento se concentra en cuatro categorías: Ejecución entrega y gestión de procesos (29%), Daños en

<sup>99</sup> BIS (2002b).

activos materiales (24%), Fraude externo (16%), Clientes productos y practicas comerciales (13%). Comparando la frecuencia de pérdida operacional por tipo de evento con la severidad, se evidencia como la categoría Daños en activos materiales, es un tipo de evento que se caracteriza por su baja frecuencia y alto impacto en cuanto representa solo el 2% de números de pérdidas y mas del 24% como total de pérdida. En contraste, el tipo de evento Fraudes externos representa el 42% de números de eventos de pérdida pero solo el 16% del monto total de pérdida.

**Tabla 3**

Severidad de las pérdidas por línea de negocio y tipo de evento

	Fraude interno	Fraude externo	Practica de empleo y seguridad laboral	Clientes productos y prácticas comerciales	Daños a activos mat.	Interr. de oper. y fallos de sist.	Ejecuc. Entr. y gestión de procesos	Sin inform.	Total
<b>Finanzas Corporativas</b>	49.4 0.63%	5.0 0.06%	2.5 0.03%	157.9 2.03%	8.0 0.10%	0.5 0.01%	49.6 0.64%	0.6 0.01%	273.5 3.51%
<b>Negociación y ventas</b>	59.5 0.76%	40.4 0.52%	64.8 0.83%	193.4 2.48%	87.9 1.13%	17.6 0.23%	698.4 8.96%	1.1 0.1%	1,163.1 14.92%
<b>Banca Minorista</b>	331.9 4.26%	787.1 10.10%	340.0 4.36%	254.1 3.26%	87.5 1.12%	26.5 0.34%	424.5 5.45%	37.4 0.48%	2,289.0 29.36%
<b>Banca Comercial</b>	21.2 0.27%	324.9 4.17%	20.4 0.26%	156.4 2.01%	1,072.9 13.76%	18.2 0.23%	619.4 7.95%	23.2 0.30%	2,256.8 28.95%
<b>Pago y Liquidación<sup>100</sup></b>	23.0 0.29%	21.0 0.27%	11.6 0.15%	10.5 0.13%	15.0 0.19%	78.6 1.01%	93.5 1.20%	0.3 0.00%	253.4 3.25%
<b>Servicios de agencia</b>	0.2 0.00%	3.9 0.05%	7.6 0.10%	5.0 0.06%	100.0 1.28%	40.1 0.51%	174.1 2.23%	0.8 0.01%	331.6 4.25%
<b>Administración de activos</b>	6.4 0.08%	4.6 0.06%	10.2 0.13%	77.0 0.99%	2.3 0.03%	2.3 0.03%	113.2 1.45%	0.05 0.01%	216.5 2.78%
<b>Intermediación minorista</b>	61.5 0.79%	1.2 0.02%	50.7 0.65%	158.6 2.03%	513.2 6.58%	28.0 0.36%	97.1 1.25%	3.4 0.04%	913.7 11.72%
<b>No inf. Línea de negocio</b>	10.5 0.13%	23.4 0.30%	18.7 0.24%	11.5 0.15%	6.7 0.09%	0.7 0.01%	22.7 0.29%	3.8 0.05%	97.9 1.26%
<b>Total</b>	563.5 7.23%	1,211.3 15.54%	526.6 6.76%	1024.5 13.14%	1,893.4 24.29%	212.5 2.73%	2,292.6 29.41%	71.1 0.91%	7,795.5 100.00%

Fuente: BIS (2003a).

<sup>100</sup> Las pérdidas se incorporan al historial de pérdidas de la línea de negocio afectada.

## 5. ANÁLISIS DE LOS DATOS Y METODOLOGÍA

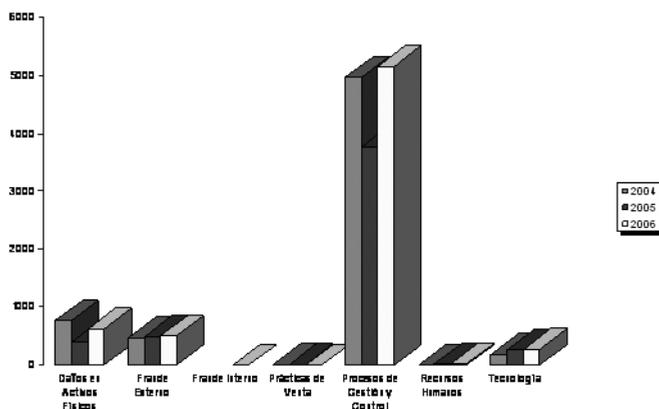
El Nuevo Acuerdo de Capital (Basilea II) demanda a los bancos que determinen el capital necesario para hacer frente a las posibles pérdidas operacionales. En los primeros documentos del BIS, la composición de un proceso Poisson para la determinación de la frecuencia y la distribución lognormal fue sugerido para la determinación de este capital, en el caso de elegir el método LDA. Ello sin tener en cuenta de las características específicas de la muestra de datos disponibles conlleva a una estimación inexacta de Value-at-Risk que determina el importe de capital necesario.<sup>101</sup> En este sentido, es muy importante analizar las características de los datos. Los datos disponibles para este trabajo provienen de una entidad española de tamaño medio cuya actividad bancaria es, fundamentalmente, banca minorista. Dicha entidad está en la fase de recopilación de datos con el objetivo de avanzar paso a paso en la medición y modelización del riesgo operacional. Los datos no están divididos entre las 8 líneas de negocio sugerida por el Comité, puesto que la actividad fundamental de la entidad es banca minorista y casi todos los datos provienen desde esta línea de negocio. Las pérdidas operacionales están repartidas entre los siete eventos de pérdidas sugerido por el Comité de Basilea. Los datos disponibles abarcan desde el año 2000 hasta el año 2006, pero debido a la no implantación de un mecanismo de identificación y recopilación de pérdidas operacionales hasta el año 2004, los años 2000, 2001, 2002 y 2003 contienen, respectivamente, 2, 5, 2 y 50 eventos de pérdida. Gracias a la implementación de un mecanismo idóneo por la identificación y recopilación de los datos los años 2004, 2005, 2006 contienen, respectivamente, 6,397, 4,959, 6,580. Para no distorsionar la distribución de frecuencia, solo vamos a tener en cuenta los años 2004, 2005, 2006. Con respecto a esto el Comité (2006:168) indica que el historial de pérdidas operacionales debe apoyarse en un periodo mínimo de cinco años a efectos del cálculo del capital regulador. No obstante, se permite a los bancos que utilicen por primera vez una metodología AMA utilizar un periodo de observación de, al menos, tres años.

<sup>101</sup> Chernobai A., Menn C., Trück S., Rachev T. S. (2004).

Otro aspecto importante en nuestros datos es la elección del umbral de pérdida sobre el cual los datos están recopilados. El Comité propone recopilar y modelar solo aquellos datos que superen el umbral de 10.000 euros de pérdida. Esta propuesta del Comité refleja su particular preocupación en la cobertura de aquellos sucesos ubicados en la cola de la distribución. Actualmente, debido a la exigua cantidad de datos disponibles usar un umbral tan elevado comprometería la robustez del estudio estadístico en muchos casos concretos. En nuestro caso, si aplicáramos un umbral de 10.000 euros la frecuencia de eventos pasaría a ser 21, 7 y 14 para los años 2004, 2005, 2006, respectivamente. Por tanto, en nuestra base de datos hemos aplicado un umbral de 0, y en la modelización del riesgo operacional usamos como A. Jobst (2007) un enfoque definido como “*full data approach*”, donde se utilizan todos los datos disponibles.

**Figura 1**

Número de sucesos por tipo de riesgo



Fuente: Elaboración Propia

Como muestra la figura 1, el mayor número de eventos de pérdida está presente en la categoría de Procesos de Gestión y Control. El

número de pérdidas total en los tres años en esta categoría es de 13.904 eventos que representa el 77,5% del número de pérdidas totales. Este porcentaje es mucho mayor al registrado en LDCE (2002) donde esta categoría de evento representa el 35% del número total. La razón de esta diferencia esta probablemente en el hecho que todos los datos provienen de la línea de negocio banca minorista, y que los bancos participantes en el ejercicio de recopilación tienen un perfil internacional con actividades muy diversificadas, por el contrario, la actividad de la entidad de nuestra muestra se sustenta básicamente en el negocio minorista tradicional, donde las operaciones de ventanilla ponderan de manera significativa. Otro factor es la elección de 0 como umbral de pérdida, ya que en la categoría de evento Procesos de gestión y control se incluyen pérdidas del tipo alta frecuencia/ bajo impacto. Los tipos de eventos Fraude interno, Prácticas de Venta y Recursos Humanos, contienen respectivamente 1, 16 y 39 eventos. Mientras que los tipos de eventos Tecnología (Interrupción de operaciones y fallos de sistema), Daños en activos físicos y Fraude externo tienen respectivamente 726, 1.790, 1.492 eventos. Es interesante destacar que en nuestra base de datos de pérdidas operacionales el tipo de evento Fraude externo representa solamente el 8% del número total de las pérdidas mientras que en el LDCE (2002) es la categoría de evento con más número de eventos de pérdidas, con el 42% de las pérdidas totales. En total, nuestra base de datos contiene 17.936 eventos de pérdidas divididos entre los tres años de la muestra.

En línea con la metodología específica empleada en nuestro trabajo, hay que tener presente que para simular un sistema con elementos estocásticos, es necesario especificar una distribución de probabilidad que regule el proceso que caracteriza el sistema. Una vez determinadas estas distribuciones, el proceso de simulación genera variables casuales. Si se disponen de datos reales, pueden ser utilizados para determinar las distribuciones usando uno de estos tres métodos:

- 1.Los datos se usan directamente en la simulación (Simulación Histórica).

2.Los datos se utilizan para generar una distribución empírica (Distribución Empírica).

3.Los datos se emplean para generar una distribución teórica (Distribución Teórica).

En primer lugar, la simulación histórica tiene sentido sólo en el caso que se disponga de un elevado número de datos que representen bien el sistema. La simulación histórica tiene un defecto obvio, y es que el sistema generado representa casi idénticamente el pasado, por eso este método se utiliza raramente; no obstante, puede ser útil para llevar a cabo un modelo de validación u para comparar el modelo realizado con el sistema real, aunque no es posible utilizarlo para previsiones.

En segundo lugar, los datos se recopilan para generar una distribución empírica o una función de distribución empírica que se usa para la producción o simulación de inputs. Este enfoque elimina el problema de no poder usar los datos para hacer previsiones, al menos para distribuciones continuas, puesto que cada valor entre el mínimo y el máximo observado puede ser obtenido.

Por último, los datos recopilados se utilizan para definir una distribución teórica. Existen técnicas estadísticas para analizar si una distribución teórica, entre las conocidas, es la adecuada para representar los datos a través de pruebas de hipótesis para comprobar la bondad de la distribución elegida.

Las razones por que usualmente una distribución teórica es preferible a la distribución empírica son:

1.Las distribuciones empíricas pueden tener deficiencias mientras que las distribuciones teóricas son mas “suaves” en el sentido que tienden a estabilizar los datos y representan su comportamiento global.

2. Las distribuciones empíricas no pueden generar valores fuera de la gama de valores observados y los resultados pueden a veces

depender de los eventos “excepcionales” de algunos valores que están fuera de esa gama.

Todavía, existen situaciones donde no existen distribuciones teóricas conocidas que se adapten a las características de los datos observados, por lo cual se debe utilizar la distribución empírica; éste parece ser nuestro caso. En este trabajo probamos a ajustar los datos con diferentes distribuciones teóricas, pero cuando eso no es posible, la distribución empírica generará valores más fiables.

## 6. ANÁLISIS EXPLORATORIO DE LOS DATOS

El análisis exploratorio de los datos (*Exporatory Data Análisis*, EDA) es un estudio estadístico con el objetivo de adquirir información sobre los datos disponibles y el proceso que los gobierna.

En este sentido como argumenta Tukey (1977) antes de testar qué distribución probabilística mejor se ajusta a la forma de la muestra, es conveniente efectuar un riguroso Análisis Exploratorio de los Datos (EDA). En el caso del riesgo operacional autores como Moscadelli (2004) o Dutta y Perry (2006) han utilizado como paso preliminar en sus trabajos esta herramienta sobre la muestra de datos utilizada. En el caso de Moscadelli los datos provienen del ejercicio de recopilación efectuado por el BIS en el 2002 (LDCE 2002). En nuestro caso, las técnicas EDA se emplean con el objetivo de describir las características principales de nuestro datos como: tendencia central, dispersión, y para determinar la distribución de los datos prestando particular atención al asimetría y curtosis.

Como primer paso ajustamos los datos al IPC (Índice Precio al Consumo) con el objetivo de no distorsionar los resultados del análisis. En este sentido, tomamos como año base 2006, de manera que convertimos las pérdidas nominales en unidades monetarias equivalentes.

Un análisis detallado de la distribución diaria de las pérdidas, como hacen Dione y Danne (2007), muestra que no están uniformemente

distribuidas entre los días de la semana, debido probablemente a un sesgo en la recopilación contable de los datos.

En la tabla 4 mostramos las principales características sobre tendencia central, asimetría y peso de las colas.

**Tabla 4**  
Estadística descriptiva

Estadísticos	Total	IF	EF	RH
N	17936	1	1462	37
Media	254.48	18909	565.48	15240.42
Mediana	51.35	18909	58.35	1156.74
Dev.tipica	3602.71	-	4407.71	62118.27
Coefficiente de asimetria	73.48	-	14.80	5.72
Coefficiente de curtosis	6924.22	-	242.66	33.77
Estadísticos	CPPV	DAM	TEC	EP
N	16	1790	726	13904
Media	6831.13	503.45	122.24	147.84
Mediana	890.64	141.66	31.95	50
Dev.tipica	12640.80	3086.83	738.67	1606.45
Coefficiente de asimetria	2.50	27.85	17.18	88.26
Coefficiente de curtosis	6.39	914.89	328.07	9077.73 <sup>102</sup>

Fuente: Elaboración Propia

El número de eventos de pérdidas en los tres años de la muestra varia mucho según el tipo de evento, por ejemplo se pasa a un solo evento presente en la categoría Fraude externo a los 13.904 en la categoría Ejecución entrega y gestión de procesos.

Podemos notar de la tabla 4 como la media es siempre mucho más alta que la mediana, esta es una característica presente en las distribuciones asimétricas, datos confirmados en nuestro caso por los coeficientes de *Skeweness*. Los datos presentan también cola leptocurtica con diferente grado de intensidad según la categoría de evento, pasando por el valor de 6,39 para el tipo de evento Clientes productos

102 IF: Fraude Interno / EF: Fraude Externo/ RU: Recursos Humanos / CPPV: Clientes Productos y Practicas de Ventas/ DAM: Daños en Activos Materiales/TEC: Tecnología/ EP: Ejecución Procesos de Gestión y Control

y prácticas comerciales, que representa el valor mas bajo, debido probablemente a los pocos eventos de pérdidas presentes en esta categoría de riesgo, al valor realmente alto de 9.077,73 en la categoría de riesgo Ejecución entrega y gestión de procesos.

**Tabla 5**  
Frecuencia y Severidad

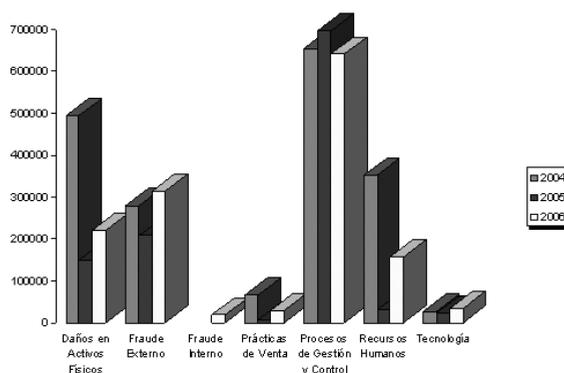
Tipo de Evento	Año 2004		Año 2005		Año 2006		TOTAL	
	Severidad	Frecuencia	Severidad	Frecuencia	Severidad	Frecuencia	Severidad	Frecuencia
DAM	494642.60	770	149688.00	397	220664.71	623	864995.25	1790
EF	280571.20	468	207295.80	490	315041.68	504	802908.62	1462
IF	-----	-----	-----	-----	18909.00	1	18909.00	1
CPPV	67405.00	6	7435.89	7	29875.12	3	104716.01	16
EP	655057.00	4967	696866.10	3779	642163.89	5158	1994087.00	13904
RU	352350.00	1	30888.27	19	156920.62	17	540158.89	37
TEC	27949.88	185	23371.57	267	34982.89	274	86304.34	726
<b>Total</b>	<b>1877976.00</b>	<b>6397</b>	<b>1115546.00</b>	<b>4959</b>	<b>1418557.90</b>	<b>6580</b>	<b>4412079.10</b>	<b>17936</b>

Fuente: Elaboración Propia

En la tabla 5 se muestra la severidad y la frecuencia por tipo de evento y años de la muestra. No solamente la frecuencia de las pérdidas está desigualmente repartida, sino también la severidad. Para afinar más estos aspectos, hemos volcado la información de nuestros datos en las siguientes figuras:

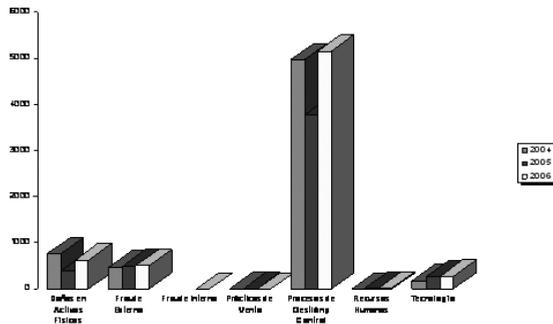
**Figura 3**

Montante de pérdida por tipo de riesgo



Fuente: Elaboración Propia

**Figura 4**  
Número de sucesos por tipo de riesgo



Fuente: Elaboración Propia

Sobre la información suministrada en forma la tabla 5 y en las figuras 3 y 4, destacamos algunas características relevantes sobre nuestros datos de pérdidas, además de las ya descritas en la sección anterior:

- Solamente hay un evento clasificado como fraude interno. Este hecho imposibilita la modelización estadística de este tipo de evento.
- Los sucesos en la categoría Recursos humanos o los de Clientes producto y prácticas comerciales, no alcanzan el 1% de las pérdidas. En cambio, la severidad de los mismos es muy elevada.
- Finalmente, destacamos como la categoría de riesgo Interrupción de operaciones y fallos de sistema es un evento de importancia media/baja por su frecuencia y baja por su severidad. Conclusiones que, en este caso, coinciden con los observados en el LDCE (2002).

Hemos ya subrayado la no uniformidad de los datos entre los días de la semana, a este propósito vamos a analizar si se detectan factores de estacionalidad en la distribución mensual de los datos

**Tabla 6**  
Cantidad mensual de pérdida

Mes	Año			Total
	2004	2005	2006	
1	66169,1	70337,23	38225,93	174732,3
2	179981,8	105454,8	91763,87	377200,5
3	134809,7	249035,4	175849,6	559694,8
4	55011,89	93549,19	51454,33	200015,4
5	168053,5	50433,71	106385,2	324872,5
6	557136,5	83403,4	126467,9	767007,7
7	95412,18	55823,84	174745,3	325981,3
8	76233,28	70356,69	153999,9	300589,8
9	80651,07	146472,4	190217,6	417341
10	244451,2	52047,94	123753,7	420252,9
11	84456,23	50670	103134,9	238261,2
12	257794,8	118080,7	82559,62	458435

Fuente: Elaboración propia

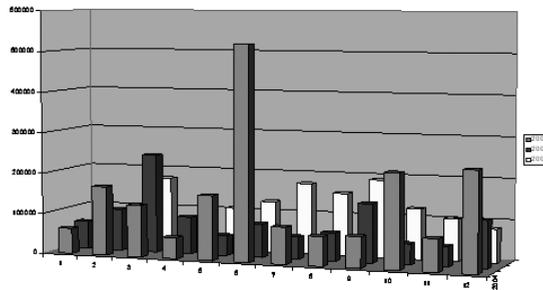
**Tabla 7**  
Frecuencia mensual de pérdida

Mes	Año			Total
	2004	2005	2006	
1	266	428	370	1064
2	349	417	366	1132
3	538	405	490	1433
4	388	502	410	1300
5	452	418	700	1570
6	475	371	704	1550
7	439	433	655	1527
8	554	396	533	1483
9	546	412	654	1612
10	1394	416	690	2500
11	519	389	519	1427
12	477	372	489	1338

Fuente: Elaboración propia

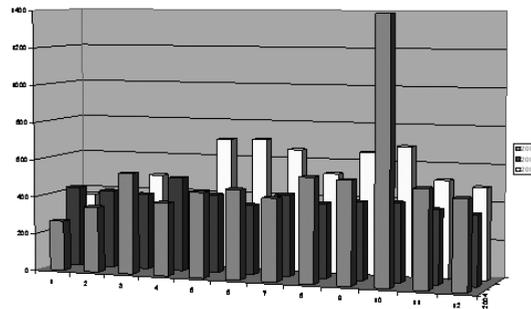
Observando la tablas 6 y 7 y las figuras 5 y 6 derivadas de ellas, notamos que quitando el pico de pérdidas de junio 2004 y el mes de octubre del mismo año que registra un número de eventos un 180% superior a la media mensual, los datos parecen no presentar estacionalidad.

**Figura 5**  
Cantidad mensual de pérdida



Fuente: Elaboración Propia

**Figura 6**  
Frecuencia Mensual de pérdida



Fuente: Elaboración Propia

## 7. LA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIA

Como se ha comentado anteriormente, la distribución de frecuencia no está uniformemente distribuida entre los días de la semana, por lo cual no es exacto estimar los parámetros de la distribución de frecuencia sobre una base diaria. Por el contrario, una estimación sobre una base mensual de los datos no parece presentar particulares problemas.

Las distribuciones de frecuencia más utilizar por los autores<sup>103</sup> para caracterizar los datos de pérdidas operacionales son: la binomial, la Poisson y la binomial negativa.

<sup>103</sup> Moscadelli, Dionne, Chernobai, entre los más destacados.

Por otro lado, Da Costa (2004) ofrece una regla general para elegir entre estas tres distribuciones, evidenciando lo siguiente:

- Para la distribución binomial la varianza es menor que la media aritmética de la muestra.
- Para la distribución de Poisson la varianza es igual a la media aritmética de la muestra.
- Para la negativa binomial la varianza es mayor de la media aritmética de la muestra.<sup>104</sup>

Basándonos en lo anterior, según esta regla si la varianza de nuestros datos es bastante mayor que su media aritmética, la distribución binomial negativa es la que mejor se ajusta a dichos datos.

Ahora nos concentramos en elegir la distribución que mejor se ajusta a nuestros datos a través de un análisis estadístico.

Como primer paso, observando las características de los datos, excluimos a distribución binomial como posible alternativa para ajustarse a la distribución de frecuencia, y nos concentramos en las distribuciones de Poisson y binomial negativa.

Para evaluar esta dos distribuciones ajustamos ambas a cada tipo de evento que disponga de bastantes datos, para estimar los relativos parámetros y efectuar las pruebas de bondad de ajuste.

**Tabla 8**

Parámetros de la distribución de frecuencia

Tipo de Evento	Poisson	Binomial Negativa	
	$\lambda$	p	n
EF	40.611	0.32968	19
DAM	49.722	0.05407	2
TEC	20.167	0.56763	26
EP	386.220	0.01320	5

Fuente: Elaboración propia

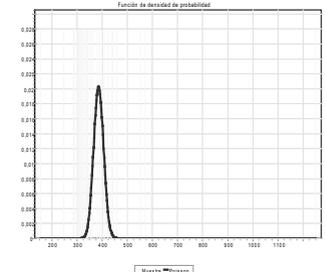
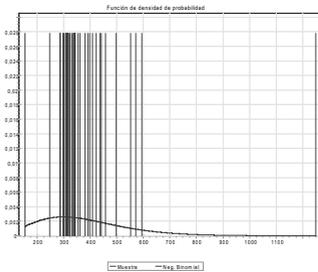
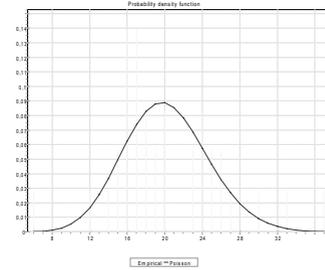
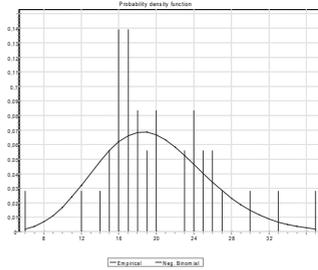
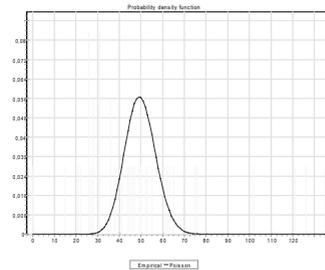
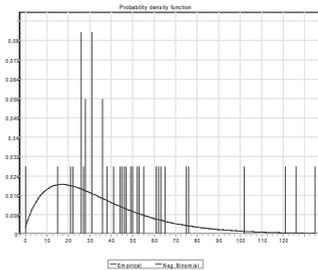
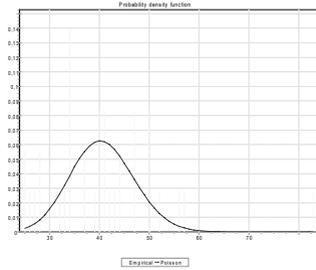
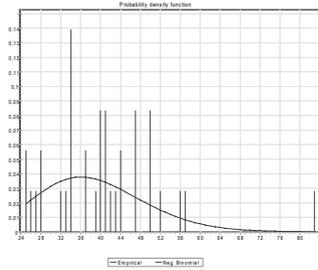
La tabla 8 reporta los respectivos parámetros estimados para las dos distribuciones, en cada uno de los tipos de evento, que disponen de suficientes datos para efectuar tal estimación.

<sup>104</sup> Ver: Da Costa, L. (2004).

## Figura 7 Ajuste distribución de frecuencia

Negative Binomial

Poisson



Fuente: Elaboración propia

La figura 7 muestra a través de los gráficos, como los datos se ajustan a las dos distribuciones. En la columna de la izquierda se representan las distribuciones binomiales negativas y en la derecha las distribuciones de Poisson. Observando tales gráficos, se puede notar como la distribución binomial negativa tiene una cola más larga en la parte derecha, por lo cual parece mejor representar la dispersión de los datos respecto a la distribución de Poisson, que como se puede ver es bastante simétrica respecto al valor central (debido a que en esta distribución media y varianza coinciden).

Para determinar cual de las dos distribuciones mejor se ajusta a los datos nos basamos en las pruebas de bondad de ajuste

**Tabla 9**  
Daños Activos Materiales

Function	Kolmogov-Smirnov	Anderson-Darling
	$D(p - value)$	$A_n^2(p - value)$
Binomial Neg.	0,34051 (<0.001)	6,7439 (<0.001)
Poisson	0,39322 (<0.001)	44,675 (<0.001)
Rechazar?) Binomial Neg	SI	SI
Rechazar?) Poisson	SI	SI

Fuente: Elaboración propia

**Tabla 10**  
Proceso de Gestión y Control

Function	Kolmogov-Smirnov	Anderson-Darling
	$D(p - value)$	$A_n^2(p - value)$
Binomial Neg.	0,28422 (<0.001)	3,0265 (>0.001)
Poisson	0,56773 (<0.001)	103,19 (<0.001)
Rechazar?) Binomial Neg	SI	NO
Rechazar?) Poisson	SI	SI

Fuente: Elaboración Propia

**Tabla 11. Fraude Externo**

Function	Kolmogov-Smirnov	Anderson-Darling
	$D(p - value)$	$A_n^2(p - value)$
Binomial Neg.	0,15425 (>0.001)	1,1636 (>0.001)
Poisson	0,1924* (>0.001)	2,98485** (<0.001)
Rechazar?) Binomial Neg	NO	NO
Rechazar?) Poisson	NO	NO

Fuente: Elaboración Propia

**Tabla 12. Tecnología**

Function	Kolmogov-Smirnov	Anderson-Darling
	$D(p - value)$	$A_n^2(p - value)$
Binomial Neg.	0,16584 (>0.001)	0,98947 (>0.001)
Poisson	0,13934 (>0.001)	1,3615 (<0.001)
Rechazar?) Binomial Neg	NO	NO
Rechazar?) Poisson	NO	NO

Fuente: Elaboración Propia

Las pruebas de bondad de ajuste miden la compatibilidad de la muestra con la función de distribución teórica. En otras palabras, estas pruebas muestran el nivel de ajuste de la distribución teórica elegida a los datos disponibles. En las dos últimas filas de las tablas 9 a 12, se muestra, si en base la pruebas realizadas, la hipótesis nula es rechazada o aceptada, recordando que la hipótesis nula y la alternativa son:

$H_0$  = los datos siguen la distribución especificada.

$H_1$  = los datos no siguen la distribución especificada.

La hipótesis nula es rechazada a un nivel dado de relevancia ( $\alpha$ ), si el valor estadístico de la prueba es superior al valor crítico obtenido. Los valores de nivel de relevancia ( $\alpha$ ) mas usados son 0,01 y 0,05. El valor 0,05 es en general el mas usado, e incluso en algunas situaciones criticas se emplean valores más bajos. En nuestro caso, los test utilizados rechazan ambas distribuciones teóricas para el tipo de riesgo Daños en activos materiales. En la categoría Proceso de gestión y control, el test de Anderson-Darling acepta la hipótesis nula para la distribución binomial negativa. Para las restantes categorías de riesgo, los test aceptan la hipótesis nula de ambas distribuciones.

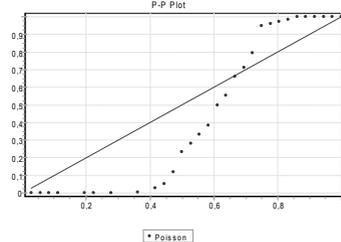
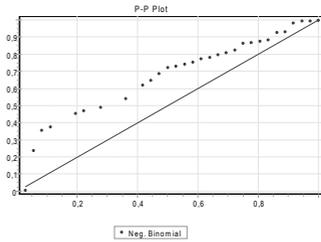
\* Rechazado por valores superiores a  $\alpha=0,2$

\*\* Rechazado por valores superiores a  $\alpha=0,05$

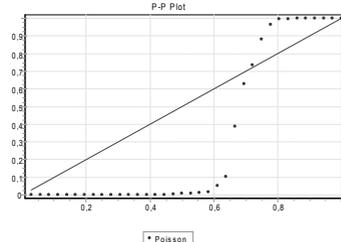
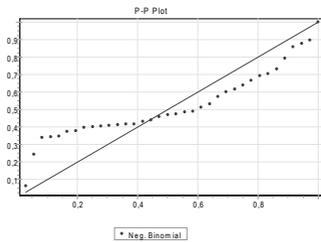
Como última prueba, llevamos a cabo un análisis gráfico de las dos distribuciones por medio del P-P plot (*Probability-Probability plot*).

**Figura 8**  
P-P plot

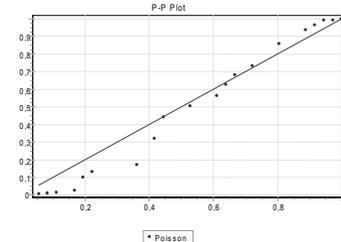
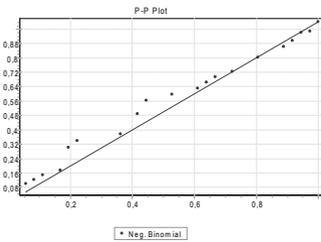
**Daños Activos Materiales**



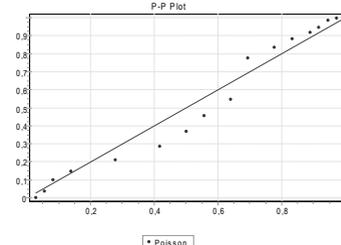
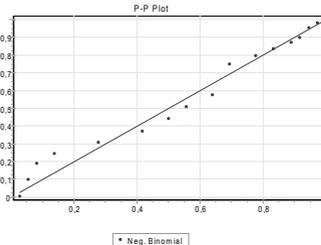
**Proceso de Gestión y Control**



**Fraude Externo**



**Tecnología**



**Fuente: Elaboración Propia**

El P-P plot es un gráfico que compara la función acumulativa de la distribución empírica, representada en dicha gráfica por la línea de puntos, con la función acumulativa de la distribución teórica elegida, que es representada por la línea recta a 45°. Por lo tanto, este gráfico muestra que, cuanto más cerca este la línea de puntos de la recta a 45°, la distribución teórica elegida mejor se ajusta a los datos.

Considerando el conjunto de las pruebas empleadas para las dos distribuciones de frecuencia, podemos afirmar que en general en nuestro caso la distribución binomial negativa se ajusta en mejor medida a los datos, aunque la Poisson no parece ser una mala distribución de frecuencia para nuestros datos. Y, considerando las posibles ventajas provenientes de la facilidad de estimación de la Poisson, junto al hecho que casi la totalidad de la literatura en este campo coincide en el escaso impacto de la distribución de frecuencia sobre el cálculo del VaR, decidimos trabajar con ambas distribuciones de cara a seguir con el análisis para la obtención de un VaR Operacional.

## 8. DISTRIBUCIÓN DE SEVERIDAD

En esta sección analizamos los montantes de los datos de pérdidas o severidad con el fin de encontrar la distribución más representativa. La distribución de severidad de la pérdida es una tarea muy importante en todos los modelos de riesgo operacional con base estadística, y puede ser la tarea más difícil, considerando que los datos pueden estar mal recopilados, confusos, incompletos o simplemente limitados.

Para modelizar la distribución de severidad se puede elegir entre dos enfoques principales:

- Enfoque no paramétrico, usando directamente la densidad empírica de los datos o su versión de curva *smoothed*.<sup>105</sup> El enfoque no paramétrico puede ser importante en dos circunstancias: cuando los

<sup>105</sup> Para un ejemplo ver: Rosenberg y Schuermann (2004). Otras referencias importantes para este enfoque son Silverman (1986) y Scott (1992).

datos disponibles no siguen ninguna distribución teórica<sup>106</sup> y cuando la base de datos es considerada suficientemente comprensiva.<sup>107</sup>

- Enfoque paramétrico, que es el más simple de seguir, en cuanto se trata de ajustar curvas analíticas que satisfacen ciertas características. El objetivo de este enfoque es encontrar una distribución de pérdidas que se pueda parecer lo mas posible a la distribución de severidad de la pérdida de la muestra disponible.

Para evaluar que distribución se ajusta mejor a nuestros datos, como primer paso, estimamos una serie de distribuciones teóricas usando el método de la máxima verosimilitud y controlando la bondad del ajuste a través de las dos pruebas más populares: el test de Kolmogorov-Smirnov y el test de Anderson-Darling.

El elenco de las familia de distribuciones que se podrían comprobar es relativamente amplia, por lo cual nos hemos basado en los trabajos de los autores más representativos en materia de análisis del riesgo operacional (Moscadelli, Dutta y Perry, Chernobai, Dionne, entre otros) , así como en las características de nuestros datos (por ejemplo la elección de no elegir un umbral de pérdida en la recopilación de los datos).

Finalmente las distribuciones elegidas para ser analizada en nuestro trabajo son: Exponencial, Lognormal. Weibull, Loglogistic y Pareto.

En las tablas 13 a 16 mostramos los parámetros y los resultados de los dos test estadísticos efectuados para cada tipo de evento que disponga de suficientes datos para efectuarlo.

---

<sup>106</sup> Ver: Rosenberg y Schuermann (2004).

<sup>107</sup> Ver: Cizek, Härdle, y Weron (2005).

**Tabla 13**  
Parámetros TEC

Function	Parámetros		Kolmogov-Smirnov	Anderson-Darling
			$D(p - value)$	$A_n^2(p - value)$
Exponential	$\lambda$	0.00818	0.38793 (<0.001)	177.500 (<0.001)
Weibull	$\alpha$	0.96808	0.18629 (<0.001)	42.193 (<0.001)
	$\beta$	66.273		
Lognormal	$\mu$	3.6095	0.1254 (<0.001)	15.956 (<0.001)
	$\sigma$	1.158		
Loglogistic	$\alpha$	1.4974	0.12449 (<0.001)	14.954 (<0.001)
	$\beta$	36.642		
Pareto	$\alpha$	0.32438	0.43376 (<0.001)	144.980 (<0.001)
	$\beta$	1.6933		

**Tabla 14**  
Parámetros DAM

Function	Parámetros		Kolmogov-Smirnov	Anderson-Darling
			$D(p - value)$	$A_n^2(p - value)$
Exponential	$\lambda$	0.00199	0.30419 (<0.001)	351.260 (<0.001)
Weibull	$\alpha$	0.97395	0.11953 (<0.001)	76.882 (<0.001)
	$\beta$	285.69		
Lognormal	$\mu$	5.0676	0.05071 (<0.001)	11.209 (<0.001)
	$\sigma$	1.2218		
Loglogistic	$\alpha$	1.4675	0.06108 (<0.001)	8.552 (<0.001)
	$\beta$	158.22		
Pareto	$\alpha$	0.22322	0.4205 (<0.001)	457.910 (<0.001)
	$\beta$	1.8000		

**Tabla 15**  
Parámetros EF

Function	Parámetros		Kolmogov-Smirnov	Anderson-Darling
			$D(p - value)$	$A_n^2(p - value)$
Exponential	$\lambda$	0.00177	0.52207 (<0.001)	965.900 (<0.001)
Weibull	$\alpha$	0.8525	0.19144 (<0.001)	104.840 (<0.001)
	$\beta$	163.28		
Lognormal	$\mu$	4.4255	0.12564 (<0.001)	29.175 (<0.001)
	$\sigma$	1.3381		
Loglogistic	$\alpha$	1.313	0.13612 (<0.001)	888.380 (<0.001)
	$\beta$	83.155		
Pareto	$\alpha$	0.26839	0.41695 (<0.001)	1965.500 (<0.001)
	$\beta$	2.0129		

**Tabla 16**  
**Parámetros EP**

Function	Parámetros		Kolmogov-Smirnov	Anderson-Darling
			$D(p - value)$	$A_n^2(p - value)$
Exponential	$\lambda$	0.00676	0.29311 (<0.001)	2533.200 (<0.001)
Weibull	$\alpha$	0.89099	0.10021 (<0.001)	312.100 (<0.001)
	$\beta$	82.229		
Lognormal	$\mu$	3.7626	0.06491 (<0.001)	48.856 (<0.001)
	$\sigma$	1.3959		
Loglogistic	$\alpha$	1.2963	0.04956 (<0.001)	27.408 (<0.001)
	$\beta$	43.034		
Pareto	$\alpha$	0.13757	0.46092 (<0.001)	4258.600 (<0.001)
	$\beta$	0.03		

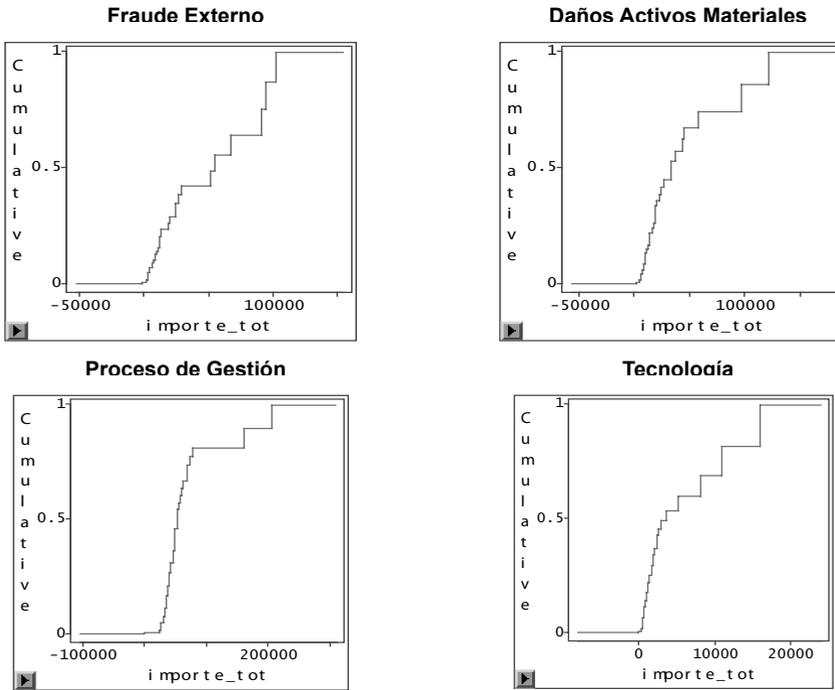
Según los resultados de las pruebas de bondad de ajuste, ninguna de las distribuciones elegidas se ajusta a los datos de severidad de pérdidas. No obstante, podríamos decir que la Loglogistic y la Lognormal darían los mejores resultados.

Considerando los “pobres” resultados de las distribuciones teóricas y las características específicas de nuestros datos, para el cálculo del VaR nos basamos en un enfoque pragmático y flexible. Con este fin, utilizamos la función de distribución empírica, de forma que el modelo se adapta a los datos disponibles y no al revés.

Abajo mostramos la cuatros distribuciones empíricas correspondientes a cada tipo de evento.

## Figuras 9

### Distribuciones Empíricas



Suponemos que buscamos la función de distribución empírica de una variable casual  $X$ , definida como:

$$P(X \leq x) = \frac{\text{numero de pérdidas} \leq x}{\text{numero total de pérdidas}}$$

La función de distribución empírica, parece una función en escalera, donde cada escalón representa una observación  $X$  y la amplitud del escalón es proporcional al peso ponderado de la observación.

En la literatura pocos estudios han utilizado la distribución empírica para modelizar la distribución de severidad de la pérdida. En este sentido, recordamos a Reynold y Syer (2003) y a de Fontnouvelle y Rosengren (2005) que utilizan la distribución empírica para calcular el VaR operacional con el objetivo de comparar los resultados con los VaR operacional calculados a través de una distribución lognormal y de una Pareto.

En la próxima sección estimamos el VaR operacional agregando la distribución empírica para la severidad de la pérdida con la distribución de Poisson y también con la binomial negativa para la distribución de frecuencia.

Como ultimo paso remplazamos la distribución empírica con la log-normal con el objetivo de estimar un modelo comparativo con nuestra primera elección. La combinación distribución lognormal con al distribución de Poisson es definido como el modelo estándar por Dionne y Dahen (2007), ya que este modelo es frecuentemente usado en la literatura sobre el riesgo operacional.<sup>108</sup>

## **9. LA DISTRIBUCIÓN AGREGADA DE DE PÉRDIDAS. EL CÁLCULO DEL VAR OPERACIONAL**

Para el cálculo del VaR operacional necesitamos agregar la distribución de frecuencia y la distribución de severidad, obteniendo una sola distribución de pérdidas. Para este objetivo, los posibles enfoques son:

- Formula Analítica.
- Serie de Fourier.
- Simulación Montecarlo.
- Método Recursivo de Panjer.

El enfoque más común y el elegido por este trabajo es la Simulación de Montecarlo, donde para un número simulado de años se genera un número de pérdidas desde la distribución de frecuencia y el montante de pérdida es simulado a través de la distribución de severidad. Con el objetivo de calcular el VaR operacional, se suman las pérdidas para cada año simulado y se ordenan de manera creciente. Desde esta nueva función de pérdidas agregadas, se elige el cuantil correspondiente al nivel de confianza elegido (el Comité aconseja el 99,9%).

<sup>108</sup> See: Dionne, G. , Dahen, H., (2007).

Con el fin del cálculo del VaR, en este trabajo exploramos dos diferentes asunciones para la distribución de frecuencia (Poisson, binomial negativa), y dos para la distribución de severidad (Empírica, Lognormal).

Un enfoque para el cálculo del VaR (ver de Fountanelle et al, 2004) es simular las pérdidas desde la distribución empírica, en vez que desde una distribución teórica. En este enfoque se llevan a cabo los siguientes pasos:

- Simulamos  $n$  meses (los parámetros de nuestro trabajo son estimados sobre base mensual).
- Para cada mes, en primer lugar simulamos  $n$  números de eventos desde la distribución de Poisson y en segundo lugar desde la negativa binomial.
- Cada pérdida es simulada desde la distribución empírica.
- Sumando las pérdidas para cada mes, se obtiene la distribución agregada de pérdidas.
- Por último, agregamos en periodos de cómputo anual las pérdidas mensuales.
- Repetimos este proceso 100.000 veces.

En el caso del cálculo del VaR, con el uso de la distribución lognormal para la severidad, el procedimiento es similar al descrito anteriormente, sólo que cada montante de pérdida es simulado desde la distribución lognormal, con los parámetros estimados en el párrafo anterior. Por último, se ordenan las pérdidas y calculamos el VaR al 95, 99 y 99,9% de nivel de confianza.

## 10. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Como primer paso, analizamos las diferencias en los resultados del VaR operacional enfrentando el uso de la distribución empírica para la severidad con la distribución lognormal, utilizando a la Poisson como distribución de frecuencia.

**Tabla 17**  
Operational VaR (Poisson)

	Lognormal	Empirical
EF	OpVar	OpVar
95 <sup>th</sup>	81929.6286	334909.6906
99 <sup>th</sup>	97468.6379	455074.0569
99.9 <sup>th</sup>	110444.0190	609138.8590
TEC	OpVar	OpVar
95 <sup>th</sup>	9007.5164	26022.5456
99 <sup>th</sup>	12105.4492	51040.1183
99.9 <sup>th</sup>	18237.5764	81015.1673
DAM	OpVar	OpVar
95 <sup>th</sup>	154390.7545	253177.7861
99 <sup>th</sup>	179377.5267	384508.8464
99.9 <sup>th</sup>	208622.2414	484049.5432
EP	OpVar	OpVar
95 <sup>th</sup>	106689.7547	333738.1314
99 <sup>th</sup>	143084.4787	497868.9633
99.9 <sup>th</sup>	270126.6493	700283.9759

Fuente: Elaboración propia

Como se puede ver en la tabla 17, el VaR calculado con la distribución lognormal genera valores bastante menores a los producidos con el uso de la distribución empírica. Esto hace pensar en una subestimación del VaR por parte de la distribución lognormal, debido a la incapacidad de generar valores en la cola de la distribución. Por lo cual, la carga de capital calculado con la distribución empírica es mayor.

Este resultado es coherente con el estudio conducido por Dionne y Dahen (2007), donde los autores afirman que el modelo “estándar” subestima el VaR.

Ahora procedemos al mismo análisis pero con el uso de la distribución binomial negativa para la frecuencia de las pérdidas.

**Tabla 18**  
Operational VaR (binomial negativa)

	Lognormal	Empirical
EF	OpVar	OpVar
95 <sup>th</sup>	86890.3114	336554.1288
99 <sup>th</sup>	106058.7322	499867.3213
99.9 <sup>th</sup>	130708.1372	685007.4213
BDSF	OpVar	OpVar
95 <sup>th</sup>	16173.6196	36346.9432
99 <sup>th</sup>	19971.3688	55066.0171
99.9 <sup>th</sup>	26390.6258	79942.2829
DPA	OpVar	OpVar
95 <sup>th</sup>	203020.2537	252235.2682
99 <sup>th</sup>	282006.2872	363489.2217
99.9 <sup>th</sup>	390785.3534	522255.1475
EDPM	OpVar	OpVar
95 <sup>th</sup>	107915.4197	177414.2123
99 <sup>th</sup>	153588.3765	359480.6391
99.9 <sup>th</sup>	304234.3457	1779789.367

Fuente: Elaboración Propia

Como ocurre antes, los valores generados por la distribución lognormal son inferiores para todos los niveles de confianza y todos los tipos de eventos respecto a los generados por la distribución empírica. La diferencia entre los dos VaR es más grande en los tipos de eventos con más pérdidas operacionales, y tiende a aumentar al crecer del nivel de confianza.

La distribución empírica no es ausente de problemas, en cuanto que la estimación del VaR depende de las pérdidas generada por la simulación, que a su vez depende de la distribución empírica. Si la distribución empírica contiene muy pocas observaciones en la cola, el VaR estimado tendrá sesgo hacia abajo. Al revés, si la distribución empírica contiene muchas observaciones en la cola, el VaR estimado tendrá sesgo hacia arriba.

Como ultimo paso, comparamos las dos tablas con el fin de analizar las diferencias entre los valores producidos con el uso de la distribución de Poisson y el uso de la distribución binomial negativa. En general los valores producidos por esta últimas son más grandes que empleando la distribución de Poisson, debido probablemente a la mayor variabilidad de la distribución negativa.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexander, C. (2002): “Bayesian Method for Measuring Operational Risk”, Derivatives, Use Trading and Regulation, vol. 6, N° 2.

Basel Committee on Banking Supervision:

- (1998): Operational risk management, BASEL, Basilea.
- (2001a), Operational Risk-Consultative Document, Supporting Document to the New Basel Capital Accord.
- (2001b), Working Paper on the Regulatory Treatment of Operational Risk.
- (2002): Operational risk data collection exercise - 2002, BASEL, Basilea.
- (2003a), Third Consultative Paper, The New Basel Capital Accord.
- (2003b): Sound Practices for the Management and Supervision of Operational Risk, BASEL, Basilea.
- (2006): Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework – Comprehensive Version, BASEL, Basilea.

Chernobai A., Menn C., Trück S., Rachev T. S., (2004), “A Note on the Estimation of the Frequency and Severity Distribution Losses” . Applied Probability Trust.

Chernobai A., Rachev S., Fabozzi F., (2007), “Operational Risk: A guide to Basel 2 Capital Requirements, Models, and Analysis”. John Wiley and Son, Inc. New Jersey.

Cruz, M. G. (2002) “Modeling, Measuring and Hedging Operational Risk”, John Wiley & Soon, New York, Chichester.

Da Costa, L (2004), “Operational Risk with Excel and VBA”. John Wiley and Son, Inc. New Jersey.

Danielsson, J. and de Vries, C.G., (1997), "Tail index and quantile estimation with very high frequency data", *Journal of Empirical Finance*, 4, pp. 241-57.

de Fontnouvelle, P., Deleus-Rueff, V., Jordan, J. and Rosengren, E., (2003), "Using loss data to quantify operational risk", Federal Reserve Bank of Boston, Working Paper.

de Fontnouvelle, P., Jordan, J. and Rosengren, E., (2005), "Implications of Alternative Operational Risk Modeling Techniques", Technical report, Federal Reserve Bank of Boston and Fitch Risk.

Dionne, G. , Dahen, H., (2007), "What about Undervaluating Operational Value at Risk in the Banking Sector?" , working paper.

Dutta, K., Perry, J. , (2007), "An Empirical Analysis of Loss Distribution Models for Estimating Operational Risk Capital", Federal Reserve Bank of Boston working paper.

Ebnother, S., Vanini, P., McNeil, A.J. and Antolinez-Fehr, P., (2001), "Modelling Operational Risk", Zurich Cantonal Bank and Swiss Federal Institute of Technology Zurich (Department of Mathematics), Working Paper.

Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T., (1997) "Modeling Extremal Events for Insurance and Finance", Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Fernández Laviada, A. y Martínez, F.J. (2006): "Bases del Marco Conceptual del Riesgo Operacional: Fin de una Etapa", VI Jornadas de Predicción del Fracaso Empresarial, AECA.

Frachot, A and Roncalli, T., (2002), "Mixing Internal and External Data for Managing Operational Risk," Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais.

Gabbi, G., Marsella, M., Massacesi, M. (2005): "Il Rischio Operativo nelle Banche", ED. EGEEA, Milano.

Gasol Magriña, A. (2007): “La industria bancaria en el marco de Basilea II”, Ed. ACCID, Barcelona.

Jiménez Rodríguez, E.J. (2008): El capital regulatorio por riesgo operacional, Tesis Doctoral, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla.

Jobst, A.A. (2007): Operational Risk - The Sting is Still in the Tail But the Poison Depends on the Dose, Journal of Operational Risk, Vol. 2, Nº 2.

Mori, T., and Haranda, E. (2001): Internal Measurement Approach to Operational Risk Capital Charge, Technical report, Bank of Japan.

Moscadelli, M., (2004), The Modelling of Operational Risk: Experience with the Analysis of the Data Collected the Basel Committee, Technical report, Bank of Italy.

Müller, H., (2002), Quantifying Operational Risk in a Financial Institution, Master’s thesis, Institut für Statistik and Wirtschaftstheorie, Universität Karlsruhe,

In Chernobai A., Rachev S., Fabozzi F., (2007), “Operational Risk: A guide to Basel 2 Capital Requirements, Models, and Analysis”. John Wiley and Son, Inc. New Jersey.

Reynolds, D., and Syer, D., (2003), A General Simulation Framework for Operational Loss Distributions, In Alexander, C., et al., “Operational Risk: Regulation, Analysis and Management”, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, pp-193-214.

Rosenberg, J., and Schuermann, T., (2004), A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-Tailed Risks, Technical Report, Federal Reserve Bank of New York.

Tukey, J., W., (1977), “Exploratory Data Analysis”, Reading, MA: Addison-Wesley.

## Ponencia 30

# LA DETERMINACIÓN DE LAS NECESIDADES DE CAPITAL A TRAVÉS DE MODELOS INTERNOS FRENTE AL MODELO ESTÁNDAR PROPUESTO EN SOLVENCIA II (QIS4): IMPLICACIONES PARA EL SECTOR ASEGURADOR ESPAÑOL

Luís A. Otero González , Pablo Durán Santomil,  
David Rodeiro Pazos Milagros Vivel Búa

### RESUMEN

La entrada en vigor del proyecto de Solvencia II transformará por completo el sistema de determinación de las necesidades de capital del asegurador. En el nuevo marco regulatorio se propone un modelo estándar basado en el valor en riesgo (VaR), pero al mismo tiempo, se fomenta la aplicación de modelos internos de autoevaluación y gestión del riesgo. En este trabajo hemos comparado la determinación de capital resultante de aplicar diferentes modelos parciales y una medida de riesgo alternativa (TVaR) a través de análisis financiero dinámico (DFA), frente a la propuesta del modelo estándar que se recoge en el cuarto estudio de impacto cuantitativo (QIS4). Para ello, se han utilizado datos del período 2001-2008 en lo referente a los diferentes riesgos de mercado, y la cuenta de resultados agregada del ramo de autos de los últimos 10 años para el análisis del riesgo asegurador. El resultado de nuestro trabajo muestra que, en general, las necesidades de capital obtenidas mediante modelos internos superan a las del modelo estándar. Esto significaría que aquellas compañías que utilicen el modelo estándar podrían estar subestimando la cantidad de capital necesaria para cubrir el riesgo en el entorno actual de elevada volatilidad.

## ABSTRACT

The arrival of the project of Solvency II will transform completely the insurer's capital requirements system. The new regulatory framework proposes a standard model based on value-at-risk (VaR), but at the same time, it will promote the application of internal models of self-evaluation and management of risk. In this work we compared the capital determination of different partial models and an alternative measure of risk (TVaR) under dynamic financial analysis (DFA) versus the model of the fourth quantitative impact study (QIS4). All the examples of market risk are based on data from the period 2001-2008, and the 10 last income statement of the cars insurance. The results show that capital levels obtained through a DFA model The result show that the capital needs obtained by means of internal models overcome to those of the standard model. This would mean that those companies that use the standard model might be underestimating the quantity of capital needs to hedge risk in the current environment of high volatility.

**PALABRAS CLAVE:** Análisis Financiero Dinámico (DFA), QIS4, modelos internos, modelización estocástica, Solvencia II.

**KEYWORDS:** Dynamic Financial Analysis (DFA), QIS4, internal models, stochastic modelling, Solvency II.

**JEL:** G22, G32.

## 1. INTRODUCCIÓN

La creación de un mercado de seguros estable y eficiente requiere el establecimiento de mecanismos que garanticen la solvencia de las compañías de seguros. Ésta se define como la capacidad financiera para hacer frente a sus obligaciones en condiciones normales de mercado (IAIS<sup>109</sup>, 2002). Para garantizar dicha solvencia, es preciso que

---

<sup>109</sup> Asociación Internacional de Supervisores del Seguro (*International Association of Insurance Supervisors*).

las compañías de seguros dispongan de recursos propios suficientes, de ahí que el objetivo principal de las normas de solvencia sea la determinación de las necesidades de capital. El actual sistema de solvencia de la Unión Europea (Solvencia I) no tiene en consideración el perfil de riesgo específico de cada compañía para calcular el capital necesario. Por ello, el nuevo proyecto, denominado Solvencia II, lleva a cabo una revisión de las normas de valoración de la situación financiera con el objetivo de mejorar el control y la medición de los riesgos a los que se exponen las aseguradoras europeas. En la actualidad nos encontramos en la segunda fase del proyecto, iniciada en el año 2003 y que tiene por objeto la elaboración de una Directiva Marco, cuyo desarrollo se está llevando a cabo a través del análisis del impacto que supondrá su entrada en vigor<sup>110</sup>. En este sentido la Comisión Europea solicitó al Comité Europeo de Supervisores de Seguros (CEIOPS)<sup>111</sup> el seguimiento de las propuestas normativas a través de diversos estudios de impacto cuantitativo (QIS). Las especificaciones técnicas del cuarto estudio de impacto (QIS 4) fueron publicadas en marzo de 2008 y son en las que se basa este trabajo<sup>112</sup>.

Bajo Solvencia II, la determinación de las necesidades de capital<sup>113</sup> se puede calcular mediante un modelo estándar o bien con modelos

---

<sup>110</sup> El proceso técnico y legislativo de Solvencia II se dividió en dos fases. La primera fase tuvo lugar entre Mayo de 2001 y Diciembre de 2002 y tenía por objeto determinar el marco general del futuro sistema. La segunda se inició en el 2003 y continúa en la actualidad con el objeto definir los detalles del sistema de solvencia de la UE. En la actualidad, la Comisión Europea avanza en la redacción de la Directiva Marco, después de haber presentado en el año 2007 el borrador definitivo o Propuesta de Directiva sobre Solvencia II. De forma paralela al proceso técnico y legislativo se realiza el proceso de evaluación del impacto de la futura normativa. El CEIOPS, a petición de la Comisión Europea y con la colaboración del sector asegurador, ha realizado diversos estudios sobre el posible impacto cuantitativo del nuevo sistema de solvencia. Los resultados de QIS4 permitirán ajustar o incluso modificar la determinación del capital económico (SCR) y de las necesidades mínimas de capital (MCR).

<sup>111</sup> El denominado Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors es un organismo creado en el año 2003 por la Comisión Europea para gestionar el Proyecto Solvencia II. El CEIOPS está compuesto de representantes de las autoridades de supervisores de seguros y fondos de pensiones de Estados Miembros de la Unión Europea.

<sup>112</sup> Las especificaciones técnicas de QIS4 establecen las reglas para: la valoración de activos y pasivos, la clasificación y selección de fondos propios (Tier 1, 2 y 3), el SCR mediante la fórmula estándar, el SCR mediante modelos internos, el MCR y el tratamiento a los grupos.

<sup>113</sup> Solvencia II establecerá dos cantidades de capital: el capital económico (SCR) que es la cantidad asociada al riesgo realmente soportado por el asegurador y el capital legal o mínimo (MCR) que es la cantidad mínima que la compañía debe disponer en cada momento.

internos previamente aprobados por el regulador. En cuanto a la segunda opción, se permitirá la implantación de modelos parciales que no incluyan todos los riesgos a los que hace frente un asegurador. De hecho, en el informe elaborado por KPMG<sup>114</sup> para la Comisión Europea, se destacaba que entre las grandes aseguradoras analizadas, sólo una minoría de los modelos intentará cubrir el espectro completo de riesgos asumidos, siendo la mayoría parciales que sólo son aplicables a determinados ramos y tipos de riesgos. Además, en dicho informe se alude al análisis financiero dinámico (DFA) como la técnica más adecuada para el desarrollo de modelos internos. Los modelos DFA emplean técnicas de simulación de tipo Monte Carlo para predecir los resultados de la compañía ante un conjunto de escenarios futuros, mostrando cómo dichos resultados pueden estar afectados por cambios en el entorno interno y/o externo de la compañía. Su aplicación permite una mejor evaluación y gestión del riesgo, por ser modelos a medida que permiten identificar aquellas situaciones en las que la compañía tiene un mayor grado de exposición.

Este trabajo contribuye a la literatura existente aportando un enfoque novedoso, al mostrar las diferencias en la determinación de las cargas de capital que resultan de aplicar diferentes modelos de simulación y medidas del riesgo y compararlas con aquellas que resultan de aplicar el modelo estándar. De este modo pretendemos comprobar si las necesidades de capital obtenidas mediante el modelo estándar se adecúan a una situación como la actual, caracterizada por una elevada volatilidad. Además, la metodología utilizada es susceptible de ser replicada por parte del sector asegurador para construir modelos internos con los que evaluar su nivel de exposición al riesgo y los requerimientos de capital necesarios de acuerdo con la nueva regulación que entrará en vigor en el horizonte de 2012.

En cuanto a su estructura, en el segundo epígrafe introducimos las medidas del riesgo en las que se basa Solvencia II, frente a otras alternativas que pueden utilizarse en DFA. Posteriormente, utilizando el

---

<sup>114</sup> Este Informe publicado en 2002 lleva por título "Study into the Methodologies to Assess the Overall Financial Position of an Insurance Undertaking from the Perspective of Prudential Supervision".

esquema de riesgos propuesto en QIS4 para los riesgos de seguros no vida y de mercado, se realiza un análisis comparativo de la medición del riesgo a través de un modelo estándar y de un modelo de análisis financiero dinámico. Por último, se exponen las principales conclusiones del trabajo.

## 2. MEDIDAS DEL RIESGO Y NECESIDADES DE CAPITAL: VAR FRENTE A TVAR.

El proyecto de Solvencia II pretende que el nivel de capital de las compañías de seguros esté en función del riesgo asumido. Por tanto, se trata de cuantificar el impacto económico que pueden tener sobre la compañía de seguros los diferentes riesgos técnicos, financieros y operativos, para determinar un capital necesario consistente con dichos riesgos. Para la cuantificación del riesgo en el modelo estándar se ha optado por el VaR analítico (Value at risk) por ser una medida ampliamente difundida en los mercados financieros, por tener solución analítica y permitir la integración de los diferentes riesgos. El VaR analítico es la máxima pérdida que se puede esperar para un plazo e intervalo de confianza determinados en condiciones normales de mercado, asumiendo que los factores de riesgo se distribuyen normalmente. De este modo, los parámetros y las hipótesis utilizadas para el cálculo del capital necesario se corresponden con el shock más adverso que se puede producir a un año con un nivel de confianza del 99,5%<sup>115</sup>. Dicho nivel de confianza se corresponde con 2,58 desviaciones estándar. Esto significa que si la volatilidad histórica anual de una acción es del 10%, es muy improbable (0,5%) que se produzca una caída superior al 25,8% en su valor. Frente al VaR utilizado en Solvencia II, los modelos DFA determinan esta medida a través de métodos de simulación basados en Monte Carlo, lo cual aporta mayor

<sup>115</sup> La distribución normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  tiene una función de densidad dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Sea  $f(x)$  y  $F(x)$  la función de densidad y la función de distribución de la Ley Normal estándar o tipificada ( $\mu=0$  y  $\sigma=1$ ). Entonces el VaR y el TVaR de una distribución de

pérdidas para una probabilidad  $p$  se calcula como:  ${}^L VaR_p(Y) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p)$   ${}^{TV} VaR_p(Y) = \mu + \sigma \frac{\phi[\Phi^{-1}(p)]}{1-p}$

flexibilidad al no tener que modelizar cada riesgo asumiendo la hipótesis de normalidad. Por lo tanto, el VaR se calcula simplemente como el percentil deseado de la distribución de resultados simulada. Formalmente, el VaR (ecuación 1) es el nivel de pérdidas tal que exista una probabilidad  $p$  de que las pérdidas sean iguales o mayores que:

$$VaR_p(Y) = Prob(Y \geq Y) \quad [1]$$

Además, los modelos internos no se limitan a utilizar una única medida del riesgo, ya que pueden emplear la distribución simulada para calcular un grupo diverso de indicadores. Así, suele ser común, la determinación del TailVaR o TVaR<sup>116</sup>.

En el cálculo del TVaR sólo se tienen en cuenta los escenarios en los que las pérdidas han superado al VaR y con dichos valores se calcula el promedio:

$$TailVaR(Y) = E(Y | Y \geq VaR(Y)) \quad [2]$$

El TailVaR es mayor que el VaR para un mismo nivel de confianza, ya que es el VaR más la media de las pérdidas que exceden el VaR (ecuación 3):

$$TailVaR(Y) = VaR(Y) + E(Y - VaR(Y) | Y > VaR(Y)) \quad [3]$$

El TVaR ha sido propuesto como alternativa al VaR ya que a diferencia del anterior es una medida coherente del riesgo y que por tanto la supera (Rockafellar y Uryasev, 2000, 2002; y Acerbi y Tasche, 2002). El TailVaR se concentra específicamente en los escenarios que perjudican en mayor medida a la solvencia de la compañía, por lo que como afirma Brooke (2003), es muy útil para determinar la asignación de capital entre las distintas líneas de negocio de una compañía.

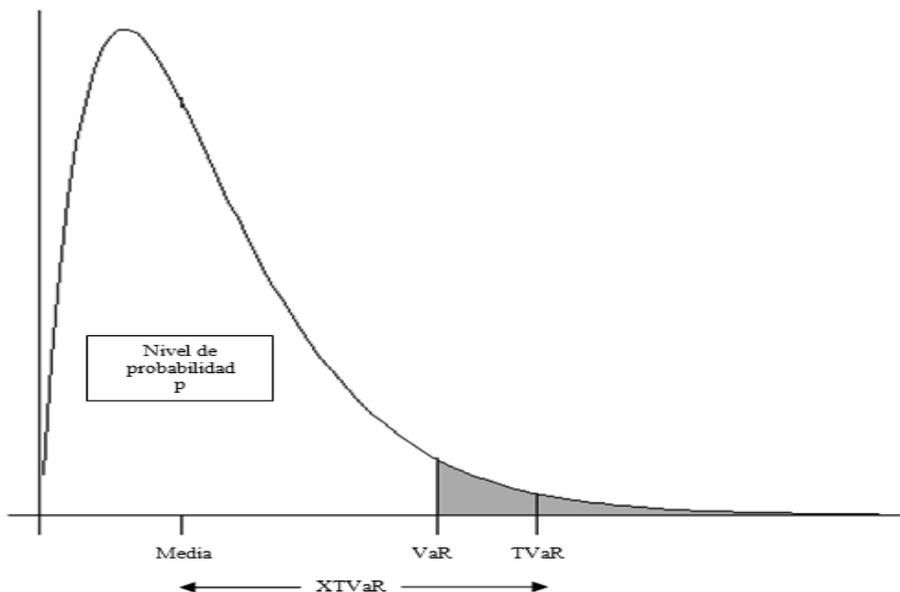
En el desarrollo de Solvencia II se planteó el uso de esta medida, pero al final se optó por el VaR por la mayor difusión entre los operadores del mercado. Por este motivo, trataremos de evaluar en qué medida se verán afectados el capital necesario utilizando modelos de análisis

<sup>116</sup> A veces se le denomina *Conditional Value at Risk* (CVaR) o *Expected Shortfall* (ES).

financiero dinámico y utilizando esta medida en lugar del VaR. En el gráfico inferior se muestra la representación gráfica de las VaR y del TVaR para una hipotética distribución de pérdidas.

**Gráfico 1**

Comparación gráfica del VaR y TVaR



Fuente: Elaboración propia

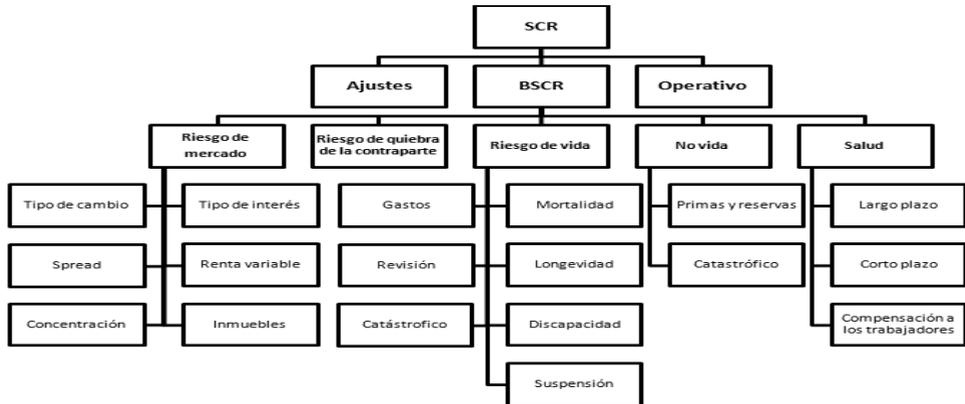
### 3. EL MODELO ESTÁNDAR PROPUESTO EN SOLVENCIA II (QIS4) FRENTE AL DISEÑO DE MODELOS INTERNOS A TRÁVÉS DE DFA

Las necesidades de capital en Solvencia II se determinan a través del cálculo del capital económico o SCR (*Solvency Capital Requirement*) y del capital mínimo o MCR (*Minimum Capital Requirement*). La fórmula estándar del SCR emplea un enfoque modular en el que se establecen necesidades de capital para las diferentes categorías de riesgo y se agregan mediante matrices de correlación aportadas

por el regulador<sup>117</sup>. Los riesgos que se han de considerar aparecen recogidos en el gráfico 3.

**Gráfico 3**

Esquema propuesto en QIS4 para la determinación del SCR



Fuente: CEIOPS (2008a)

Como se desprende del gráfico 3, las necesidades de capital de solvencia (SCR) se determinan a partir de los riesgos en los que incurre la empresa. Como se especifica en el gráfico anterior y se aprecia en la ecuación 5, el SCR se calcula como:

$$SCR = BSCR - Adj - \quad [5]$$

<sup>117</sup> El MCR bajo QIS4 se calcula mediante una técnica combinada. En una primera etapa se calcula un MCR lineal dependiendo del tipo de negocio suscrito (vida, no vida, asimilado a vida y asimilado a no vida), al que posteriormente se le aplica un límite superior del 50% y un límite inferior el 20% del SCR calculado empleando la fórmula estándar o un modelo interno. Además se debe considerar el límite inferior absoluto del Artículo 127(1)d de la Propuesta de Directiva al MCR combinado (Comisión de las Comunidades Europeas, 2007). Este límite es de 1 millón de euros para las compañías (re)aseguradoras de no vida, 2 millones para las compañías (re)aseguradoras de no vida y 3 millones para las compañías de no vida y vida.

Siendo:

BSCR = Basic solvency capital requirement

Adj= Ajustes<sup>118</sup>

SCRop= SCR operativo

De este modo, el nivel de capital que precisará la compañía de seguros será el que resulte del riesgo asegurador, financiero y operativo. El cálculo en el modelo estándar será el resultado de la adición de las necesidades de capital derivadas de los diferentes riesgos en los que incurre la empresa, para lo cual se proponen fórmulas analíticas que recogen el VaR al 99,5% a un año, al tiempo que se emplea para la agregación de los riesgos una matriz de correlación. Debido a la amplitud del tema abordado, restringiremos el análisis a los riesgos que afectan en mayor medida a las aseguradoras de vida europeas: riesgos de mercado y riesgo asegurador.

### 3.1.- Riesgo de mercado

El riesgo de mercado es debido a los cambios en los precios de los instrumentos financieros. Bajo QIS4 se establecen los sub-módulos de tipos de interés, renta variable, propiedades inmobiliarias, tipos de cambio, spread y concentración. A continuación analizaremos como se determinan las necesidades de capital para cada uno de los riesgos, expondremos las limitaciones del modelo estándar y las alternativas para estimar dichas necesidades mediante un modelo interno.

- *Riesgo asociado a la renta variable ( $Mkt_{rentavariabile}$ ), inmuebles ( $Mkt_{inmuebles}$ ) y riesgo de cambio ( $Mkt_{t.cambio}$ )*

Si bien en Solvencia II (QIS4) estos riesgos se abordan de forma individual, hemos optado por integrarlos dentro de un mismo epígrafe,

---

<sup>118</sup> Recoge el ajuste por el efecto mitigante del riesgo. Los conceptos que dan lugar a un ajuste en el SCR en QIS4 son las participaciones en beneficios discrecionales (negocios de vida con participación en beneficios) y los impuestos diferidos.

debido a que en el análisis financiero dinámico se suelen modelizar a través de técnicas comunes. El riesgo de renta variable está ligado al nivel y volatilidad de los precios de mercado de las acciones. En QIS4 la carga de capital para riesgo de acciones  $Mkt_{rentavariabile}$  se calcula asumiendo un shock del 32% de variación para las inversiones en índices de mercados desarrollados globales (países EEE y OCDE) y un 45% para el resto<sup>119</sup>. Asimismo, se establece un coeficiente de correlación de 0,75 entre las anteriores categorías para recoger el beneficio por diversificación<sup>120</sup>. Al igual que ocurre para la renta variable, la carga de capital  $Mkt_{inmuebles}$  se basa en el cálculo de un escenario de estrés donde este shock es el efecto de una caída del 20%<sup>121</sup> en el valor de todas las propiedades inmobiliarias (directas e indirectas). La carga de capital para riesgo de cambio ( $Mkt_{t.cambio.}$ ) es el resultado de dos escenarios predefinidos en los que se hacen un shock de subida y de bajada del 20%<sup>122</sup> de todas las monedas diferentes a la que utiliza la compañía para presentar sus cuentas anuales. El capital necesario será el que resulte del peor de los escenarios considerados sobre el valor neto de los activos y pasivos.

El modelo de rendimientos normal que subyace en el cálculo de QIS4 ha sido elegido por razones de simplicidad y transparencia. No obstante, la hipótesis de normalidad puede infra estimar seriamente la cola de la distribución de pérdidas (resultados extremos). En un mo-

119 Dichos factores permanecen inalterados desde la calibración efectuada en el tercer estudio de impacto cuantitativo (QIS3) y se alcanzó por el ajuste de los rendimientos medidos en términos nominales y netos de riesgo cambiario del índice global MSCI de mercados desarrollados para el período 1970-2005. La media aritmética anual calculada era de 11.5% y la desviación estándar era de 16.9% por lo que bajo la hipótesis de normalidad y para un  $VaR_{99,5\%}$  el factor a aplicar es  $VaR = 0,115 - 2,58 \times 0,169 \approx -32\%$ . Si efectuásemos el cálculo del  $TVaR_{99,5\%}$  este sería de  $TVaR = 0,115 - 2,89 \times 0,169 \approx -37\%$ .

120 Cabe resaltar que QIS4 también investiga el uso de un modelo amortiguador (*dampener*) que intenta buscar un efecto contra-cíclico evitando que las compañías vendan activos en los peores momentos.

121 Este factor permanece inalterado desde el QIS3 donde se calibró basado en los rendimientos anuales de la fuente IPD para Holanda, Francia, Alemania, Suecia y Reino Unido.

122 Este factor permanece inalterado respecto a QIS3 en donde se calibró a partir de una cesta de monedas frente al euro que representaban las posiciones mantenidas por las instituciones financieras de Holanda. Sin embargo en QIS4 se establece además un factor del 2,25% para la corona danesa (DKK) y un 15% para la corona estonia (EEK), el lat de letonia (LVL), la lita lituana (LTL) y la corona eslovaca (SKK).

delo DFA pueden emplearse otras técnicas para recoger la tradicional asimetría y curtosis de la distribución de resultados, la posible correlación de los rendimientos a lo largo del tiempo (autocorrelación serial) y la volatilidad no constante en el tiempo (heterocedasticidad). Por tanto en el diseño de modelos internos a través de DFA se ha recurrido a técnicas muy variadas. Así como se aprecia en el cuadro 2, para los activos de renta variable Schmeiser (2004) opta por el modelo de rendimientos normal, Kaufmann *et al.* (2001) y el modelo DynaMo 3 proponen un “modelo lineal”, mientras que Hibbert *et al.* (2001) y Ahlgrim *et al.* (2004) utilizan un modelo de cambio de régimen, justificando el mejor ajuste a las “colas gordas” que muestran las rentabilidades históricas. En lo referente a los inmuebles y el tipo de cambio se ha recurrido al uso de modelos autorregresivos (Ahlgrim *et al.*, 2004 y Blum *et al.*, 2001). Otras alternativas que pueden ser empleadas son los modelos tipo GARCH (Engle, 1982 y Bollerslev, 1986) o modelos de volatilidad estocástica (SV) (Taylor, 1986). En el cuadro inferior se muestra un resumen de la alternativa propuesta en QIS4 frente a las distintas opciones que pueden ser empleadas en DFA para los tres riesgos anteriormente descritos.

## Cuadro 2.

Comparación del modelo estándar de QIS4 con algunas alternativas utilizadas en DFA para los riesgos de mercado de renta variable, inmuebles y riesgo de cambio.

Solvencia II-DFA	Modelo	Características	Riesgo	Autores
<b>Modelo estándar Solvencia II</b>	QIS4	Modelo normal utilizando media y volatilidad histórica	Renta Variable Inmuebles Riesgo de cambio	<b>CEIOPS (2008a)</b>
<b>DFA</b>	Modelo normal	Modelo normal utilizando media y volatilidad histórica	Renta Variable Inmuebles	<b>Schmeiser (2004)</b>
	Modelo lineal	Versión del CAPM en donde se correlaciona negativamente el cambio en los tipos de interés a la rentabilidad de las acciones.	Renta variable	<b>Kaufmann et al. (2001)</b> <b>DynaMo*</b>
	Modelo de cambio de régimen	Regímenes con distintas volatilidades y rendimientos esperados. El cambio de un régimen a otro está dictado por las probabilidades de transición.	Renta variable	<b>Hibbert et al. (2001)</b> <b>Ahlgren et al. (2004)</b>
	Modelo AR(1)	Modelo en el que los valores de una variable se generan a partir de sus valores retardados un período.	Inmuebles	<b>Ahlgren et al. (2004)</b>
	Regresión lineal múltiple	Modelo en el que los tipos de cambio se generan a partir de los valores de la tasa de inflación y tipos de interés de distintas economías.	Riesgo de cambio	<b>Blum et al. (2001)</b>
Vectores autorregresivos	Modelo en el que los tipos de cambio se generan a partir de sus valores pasados y de los valores de otras variables.	Riesgo de cambio	<b>Blum et al. (2001)</b>	

\* DynaMo es un modelo descrito en D'Arcy *et al.* (1997,1998), en la actualidad está siendo actualizado por la sociedad de actuarios americana CAS (Casualty Actuarial Society).

A continuación exponemos el resultado de estimar el capital necesario para una cartera de acciones invertida en IBEX-35 eurostoxx-50 si se utiliza un modelo GARCH (1,1) estimado a partir de los rendimientos diarios durante el período 01/01/2001 y 30/06/2008<sup>123</sup>. El análisis de los datos revela que los rendimientos son estacionarios en media, pero presentan agrupamientos o *clusters* de volatilidad y un exceso de curtosis y asimetría que llevan a rechazar la hipótesis de normali-

<sup>123</sup> Para la modelización de los tipos de cambio e inmuebles se podría recurrir a un modelo similar.

dad del Test de Jarque-Bera. Además, del análisis del correlograma de las rentabilidades y su cuadrado, se deducen efectos autorregresivos, tanto en media como en varianza. Se han testado distintos modelos del tipo GARCH, optando finalmente por el GARCH (1,1) por presentar un buen ajuste a los datos analizados. El modelo GARCH (1,1) estimado responde a las siguientes ecuaciones:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t h_t, y_t = \mu + \varepsilon_t h_t \quad [7]$$

$$h_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2, \quad t = 1, \dots, T \quad [8]$$

El ajuste ha sido realizado empleando el paquete fGarch del software R elaborado por Rmetrics. Como se puede comprobar en el cuadro siguiente, el modelo estimado presenta parámetros muy significativos

**Cuadro 3**

Modelo GARCH (1,1) estimado a partir de datos históricos.

	Estimación	Error Estándar	t valor	Pr(> t )
$\mu$	7.351e-04	2.145e-04	3.428	0.000608
$\omega$	2.085e-06	6.036e-07	3.454	0.000553
$\alpha$	9.687e-02	1.562e-02	6.203	5.54e-10
$\beta$	8.914e-01	1.695e-02	52.576	< 2e-16

Una vez estimados los parámetros se realizó, a través del programa @risk de Palisade, una simulación de 10.000 escenarios a un año<sup>124</sup> por el método Latino Hipercúbico<sup>125</sup> y se generó el histograma que se recoge en el gráfico siguiente. La máxima pérdida, con un nivel de

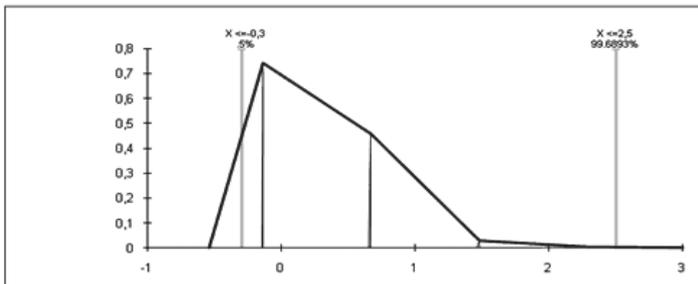
<sup>124</sup> Se simulan los rendimientos diarios continuos, computándose posteriormente el rendimiento anual suponiendo 250 días de cotización al año.

<sup>125</sup> El método de simulación Latino Hipercúbico (LHS) es un método de recogida de muestras por estratificación. Permite recrear una distribución con una mayor precisión para un mismo número de iteraciones que el método de Monte Carlo común, en el que las muestras son seleccionadas de forma completamente aleatoria.

confianza idéntico al utilizado en el modelo estándar, es del 29,7%, ligeramente inferior al 32% que se exige en el modelo estándar. Asimismo, hemos estimado el TVaR, cuyo valor asciende a 35,9%, cantidad que superaría sensiblemente la estimación del modelo estándar.

#### Gráfico 4

Histograma de rendimientos a un año simulados del IBEX-35 a través del modelo GARCH (1,1)

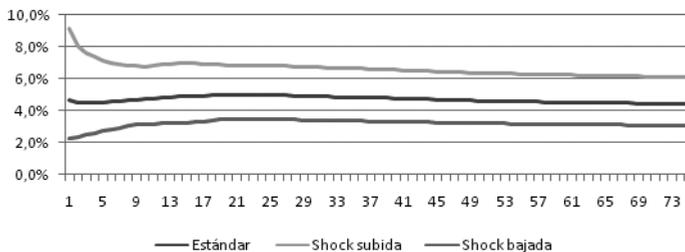


- *Riesgo de tipos de interés ( $Mkt_{interés}$ )*

El riesgo de tipo de interés afecta a todos los activos y pasivos cuyo valor neto sea sensible a las variaciones en la estructura temporal y que no estén relacionados con pólizas en las que el tomador asuma el riesgo de inversión. En QIS4 el capital requerido se mide a través del impacto que tienen unas variaciones predeterminadas en la curva de tipos sobre la posición neta de los flujos de efectivo de entrada (renta fija) y salida (provisiones técnicas y préstamos)<sup>126</sup>. La estructura de tipos alterada se deriva de la multiplicación de la curva de tipos actuales por el factor de estrés superior  $s^{up}(t)$  y por el factor de estrés inferior  $s^{down}(t)$  para cada vencimiento.

<sup>126</sup> Por lo tanto, cuanto mejor casados estén los flujos de efectivo menor será la necesidad de capital.

**Gráfico 5**  
ETTI estándar y shocks propuestos en el QIS4



Fuente: CEIOPS (2008a)

Por tanto, la carga de capital para el riesgo de tipos de interés es el resultado del mayor valor entre los dos escenarios de estrés siguientes<sup>127</sup>:

$$\text{Mkt}_{\text{interés}}^{\text{subida}} = \Delta \text{VAN}|_{\text{shocksubida}} \quad [9]$$

$$\text{Mkt}_{\text{interés}}^{\text{bajada}} = \Delta \text{VAN}|_{\text{shockbajada}} \quad [10]$$

Siendo:

$\Delta \text{VAN}$ , es el cambio en el valor neto de los activos y pasivos derivados de las modificaciones en los tipos de la ETTI.

En el cuadro 4 podemos ver dos compañías cuyo valor de la cartera de activo y pasivo descontado a la curva de tipos propuesta en QIS4 es el mismo, teniendo por lo tanto ambas el mismo valor del excedente. El cuadro 5 aporta el desglose de flujos de activo y pasivo, necesario para poder estimar el efecto de las variaciones en la curva de tipos.

<sup>127</sup> Los factores de estrés fueron calibrados en QIS3 a partir de dos fuentes de datos: los tipos cupón cero alemanes con vencimiento desde un año a 10 años desde 1972 hasta con frecuencia mensuales. La fuente fue el Bundesbank.

### Cuadro 4

Valor de la cartera de activo y pasivo

Compañía	VAN Activo	VAN Pasivo	Excedente
A	561,09	553,62	7,47
B	561,09	553,62	7,47
	flujos de activo		flujos de pasivo
	A	B	A y B
1	110	300	100
2	160	300	150
3	180		175
4	181		200

Como podemos comprobar en el cuadro 7, el escenario que les perjudica a ambas compañías es el de bajada de tipos de interés, ya que la variación de capital es positiva, lo que significa que el valor actual de los activos respecto al de los pasivos disminuye ante ese escenario. La compañía B que tiene una estructura de flujos menos congruente, por lo que precisará de un capital de 11,56 frente a 0,32 de la compañía A<sup>128</sup>.

### Cuadro 7

Variación ante caída y subida de tipos en el activo y pasivo.

Caída	VAN Activo	VAN Pasivo	Activo-Pasivo	Variación VAN
A	590,59	583,44	7,15	0,32
B	579,36	583,44	-4,08	11,56
Subida	VAN Activo	VAN Pasivo	Activo-Pasivo	Variación VAN
A	518,99	511,28	7,71	-0,24
B	532,11	511,28	20,83	-13,35

Frente a esta opción, DFA opta generalmente por el diseño de la dinámica de la estructura temporal de tipos de interés mediante el ajuste de los datos históricos a un modelo de tipos de interés. Ahlgrim *et al.* (1999) indican que los modelos de equilibrio<sup>129</sup> son más apropiados para la proyección a largo plazo debido a que los modelos sin arbi-

<sup>128</sup> Las curvas de tipos con las que hay que calcular el impacto pueden verse en CEIOPS (2008a).

<sup>129</sup> Entre otros se incluyen las propuestas de Vasicek (1977), Dothan (1978), Cox *et al.* (1980), Cox *et al.* (1985).

traje<sup>130</sup> pueden tender a niveles poco realistas (valores extraordinariamente altos o negativos). En cuanto al número de factores, también Ahlgrim (2001) llega a la conclusión de que un modelo de un factor es suficiente para un modelo de DFA de una compañía aseguradora de no vida<sup>131</sup>. Introducir más factores posibilita una gama más completa de movimientos y formas de la curva, pero por contra aumenta rápidamente la complejidad y la manejabilidad del modelo. Dentro de los modelos de un factor, el propuesto por Cox *et al.* (1985) o modelo CIR (1985) es el que logra un mejor equilibrio entre complejidad y exactitud, tal y como indican D'Arcy *et al.* (1998), Ahlgrim *et al.* (1999) y Kaufmann *et al.* (2001). Por el contrario Hibbert *et al.* (2001) y Ahlgrim *et al.* (2004) emplean un modelo de 2 factores de Vasicek.

### Cuadro 8

Comparación del modelo estándar de QIS4 con las alternativas de DFA

Solvencia II-DFA	Modelo	Características	Riesgo	Autores
<b>Modelo estándar Solvencia II</b>	QIS4	Análisis del efecto en el valor neto de los activos menos pasivos de cambios predeterminados en la ETTI.	Tipo de interés	<b>CEIOPS (2008a)</b>
<b>DFA</b>	Modelo normal	Modelo normal utilizando media y volatilidad histórica	Tipo de interés	<b>Schmeiser (2004)*</b>
	Modelo CIR (1985)	Modelo en el que el tipo de interés a corto plazo es un proceso estocástico de reversión a la media estando su volatilidad relacionada con el nivel de los tipos.	Tipo de interés	<b>Kaufmann <i>et al.</i> (2001) DynaMo</b>
	Modelo de 2 factores de Vasicek	Modelo en el que tanto el tipo de interés a corto plazo como tipo medio al que revierte presentar reversión a la media..	Tipo de interés	<b>Hibbert <i>et al.</i> (2001) Ahlgrim <i>et al.</i> 2004</b>

\* En realidad modeliza directamente la rentabilidad de la renta fija.

Dado que nuestro modelo se centra en seguros no vida y atendiendo a las recomendaciones anteriores hemos optado por seleccionar el modelo de Cox *et al.* (1985). El modelo CIR (1985) describe el tipo de interés a corto plazo como un proceso estocástico de reversión a la media en donde la volatilidad del proceso está relacionada con

<sup>130</sup> Dentro de estos se incluyen las propuestas de Ho y Lee (1986), y Heath *et al.* (1992)

<sup>131</sup> Sin embargo, el asegurador de vida debe utilizar un modelo de más factores debido a la mayor sensibilidad de su actividad a las fluctuaciones del tipo de interés.

el nivel de los tipos. En el modelo en tiempo continuo el proceso de cambio instantáneo en el tipo de interés libre de riesgo viene dado por la siguiente ecuación:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_{t-1}}Z_t \quad [11]$$

donde:  $\kappa$  = constante que representa la velocidad de reversión del tipo de interés a su media a largo plazo;  $\theta$  = media a largo plazo del tipo de interés;  $r_t$  = tipo de interés a corto plazo instantáneo,  $\sigma$  = volatilidad o desviación estándar del proceso de tipo de interés y  $Z_t$  = un movimiento browniano estándar o proceso de Wiener.

Para nuestro propósito se utiliza la versión discreta del modelo en tiempo continuo (ecuación 11) que se aproxima como sigue:

$$\Delta r_t = a(b - r_{t-1}) + s_t \quad [12]$$

donde:

$\Delta r_t$  = cambio discreto en el tipo de interés a corto plazo

$e_t$  = una muestra de la distribución normal estándar

La fórmula anterior determina el tipo de interés a corto plazo para cada período de simulación, mientras que la curva de tipos de interés (term structure) se determinará a través de la siguiente expresión:

$$R_{t,T} = \frac{r_t B_t - \log A_t}{T} \quad [13]$$

El modelo de tipos (ecuación 12) ha sido calibrado a los tipos mensuales del Euribor a un mes durante el período 02/01/2001 a 01/12/2008 empleando la siguiente ecuación:

---


$$132 \quad A_t = \left( \frac{2G^{(a+G)T/2}}{(a+G)(e^G - 1) + 2G} \right)^{2b/s^2}; \quad B_t = \frac{2(e^G - 1)}{(a+G)(e^G - 1) + 2G} \quad \text{y} \quad G = \sqrt{a^2 + 2s^2}.$$

$$r_t - r_{t-1} = \alpha + \beta r_{t-1} + \delta_t^{133} \quad [14]$$

Siendo  $E(\delta_t) = 0$  y  $Var(\delta_t) = s^2 r_{t-1}$ .

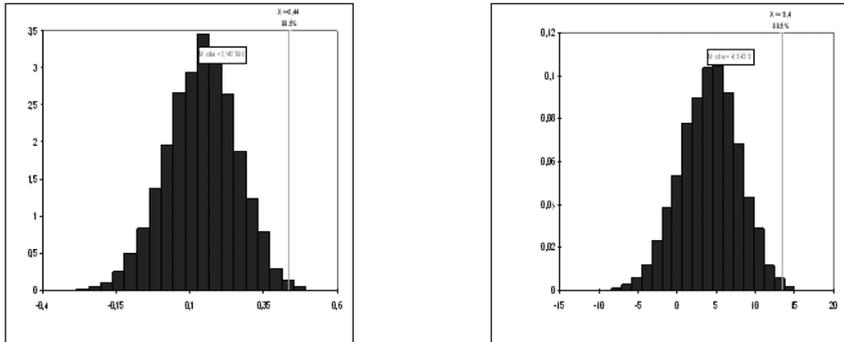
Los valores obtenidos son  $\hat{\alpha} = 0,0008$ ,  $\hat{\beta} = -0,03$  y  $s^2 = 0,0001$ , por lo que los parámetros a emplear en el modelo son una velocidad de reversion mensual del tipo de interés a su media a largo plazo del 3% ( $a = -\hat{\beta}$ ), una media a largo plazo del tipo de interés del 2,74% ( $b = \hat{\alpha} / -\hat{\beta}$ ) y una volatilidad de 0,0102.

A continuación se presentan los resultados de analizar el efecto en el excedente de las compañías A y B bajo las 10.000 simulaciones efectuadas. Como se puede observar en los gráficos 6 y 7, la variación que se produce en el excedente de la compañía B al 99,5% de confianza, se eleva a 13,40 € frente a 0,44 € de la compañía A. Si lo que calculásemos fuera el TVaR, la compañía B obtendría 14,55 € frente a 0,47 € de la A. De este modo, al igual que ocurría en el modelo estándar, la compañía que asume un mayor riesgo, deberá disponer de más recursos. No obstante, la cuantía sería inferior a través del modelo estándar.

<sup>133</sup> Para ello estimamos el modelo anterior (ecuación 14) dividiendo todos sus términos por  $\sqrt{r_{t-1}}$  obteniendo el siguiente modelo:  $\frac{r_t - r_{t-1}}{\sqrt{r_{t-1}}} = \alpha \frac{1}{\sqrt{r_{t-1}}} + \beta \sqrt{r_{t-1}} + \frac{\delta_t}{\sqrt{r_{t-1}}}$ . En donde ahora  $Var\left(\frac{\delta_t}{\sqrt{r_{t-1}}}\right) = s^2$  Por lo tanto el modelo estimado será  $\frac{r_t - r_{t-1}}{\sqrt{r_{t-1}}} = \hat{\alpha} \frac{1}{\sqrt{r_{t-1}}} + \hat{\beta} \sqrt{r_{t-1}}$  y posteriormente estimamos  $s^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{r_t - r_{t-1}}{\sqrt{r_{t-1}}} - \hat{\alpha} \frac{1}{\sqrt{r_{t-1}}} - \hat{\beta} \sqrt{r_{t-1}} \right)^2$ .

### Gráfico 6

Distribución del VAN del excedente ante variaciones de los tipos de interés de las compañías A y B.



- *Riesgo asociado al diferencial o spread de crédito (MKTspread)*

El riesgo de spread refleja el cambio en el valor de los activos<sup>134</sup> debido al movimiento de la curva de tipos de interés en relación a la curva sin riesgo. La carga de capital por spread de una obligación o bono se calcula multiplicando el valor de mercado  $VM_i$  por una función de su duración modificada  $m(dur_i)$  y por un factor asociado a la clase de rating  $F(rating_i)$ <sup>135</sup>:

$$Mkt_{spread}^{RF} = \sum_i VM_i * m(dur_i) * F(rating_i) + \Delta Pasivo_{ul} \quad [16]$$

<sup>134</sup> En QIS4 se establecen tres clases de activos: renta fija, estructurados de crédito y derivados de crédito. Por lo tanto la carga de capital por spread de crédito ( $Mkt_{spread}$ ) es la suma de las cargas de capital para estas tres clases de activo. En el texto sólo se muestra la carga resultante a la renta fija.

<sup>135</sup> Además debe considerarse  $\Delta Liab_{ul}$  que es el impacto del escenario de estrés en el pasivo para aquellas pólizas en las cuales el beneficiario soporta el riesgo de inversión.

## Cuadro 9

Spreads de stress considerados en cada modalidad de Rating.

Rating <sub>i</sub>	F(Rating <sub>i</sub> )
AAA	0.25%
AA	0.25%
A	1.03%
BBB	1.25%
BB	3.39%
B	5.60%
CCC o inferior	11.20%
Sin rating <sup>136</sup>	2%

Fuente: CEIOPS (2008a)

En cuanto a la función de la duración, se establece un límite a la duración modificada en función del rating, de modo que se reduce la variación máxima, ya que al asumir una relación lineal se estaría sobreestimado el riesgo y, consecuentemente, el nivel de capital necesario<sup>137</sup>.

En el cuadro 10 se expone el cálculo del capital necesario para una obligación con valor de mercado de 100€ con calificación AAA y duración modificada de 4 años. Aplicando la fórmula indicada con anterioridad (ecuación 16), la carga de capital sería:

$$Mkt_{spread}^{RF} = \sum_i VM_i * m(dur_i) * F(rating_i) + \Delta Pasivo_{ul} = 100 \times 4 \times 0,0025 = 1€$$

<sup>136</sup> De esta forma, y en base a la función de la duración una obligación sin rating con duración modificada de 5 años tendrá una carga de capital por riesgo de spread del 8% de su valor de mercado.

<sup>137</sup> La función del rating equivale a un factor del 0,25% para los ratings AAA y AA, 1,03% para A, 1,25% para BBB, 3,39% para BB, 5,6% para B, un 11,2% para CCC o inferior y un 2% para los no calificados. Los límites para la duración modificada son los siguientes:

$$m(dur_i) = \left. \begin{array}{l} \max(\min(dur_i; 8); 1) \quad \text{si rating}_i = \mathbf{B} \\ \max(\min(dur_i; 6); 1) \quad \text{si rating}_i = \mathbf{B} \\ \max(\min(dur_i; 4); 1) \quad \text{si rating}_i = \text{CCC o inferior, sin rating} \\ \max(dur_i; 1) \quad \text{resto} \end{array} \right\}$$

### Cuadro 10

Carga por spread calculada para un bono con calificación AAA.

	BO-1
Valor Mercado	100
Rating	AAA
Duración	4
Duración QIS4	4
Carga spread	1,00

El riesgo de spread no ha sido incluido tradicionalmente en los trabajos de análisis financiero dinámico. Por eso para generar la evolución a futuro de los spreads se ha optado por emplear el modelo de saltos lognormales empleado por el CEIOPS (2008a). Otras alternativas para modelizar la dinámica de los spreads podrían ser los modelos de series temporales, los modelos estructurales y los de forma reducida. Nueva tabla teniendo en cuenta el nuevo trabajo de spreads

El modelo utilizado estima el valor del spread transcurrido un mes como:

$$CS_1 = CS_0 * e^X \quad CS_1 = CS_0 * e^X \quad [17]$$

Donde X sigue una distribución  $N(\mu; \sigma^2)$   $N(\mu; \sigma^2)$

Tomando los spreads mensuales históricos entre 01/01/2008 y 30/06/2008, se obtienen los parámetros para diferentes categorías de rating que posteriormente se utilizan para simular escenarios de spread y evaluar el riesgo.

### Cuadro 11

Parámetros de las variaciones logarítmicas mensuales de los spreads.

Rating	AAA	AA	A	BBB
Media	0,0100	0,0011	0,0008	0,0002
Desviación estándar	0,1047	0,0966	0,0992	0,1195

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de S&P.

Así, al igual que en los ejemplos anteriores, se han realizado 10.000 simulaciones de los spreads a través de este modelo (ecuación 17) para analizar la repercusión sobre el precio del bono analizado con anterioridad. De este modo, el efecto del riesgo de spread al cabo de 12 meses se estima a través de la siguiente ecuación:

$$P_{12} = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r+CS_{11}) * e^{N(\mu;\sigma)}} P_{12} = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r+CS_{11}) * e^{N(\mu;\sigma)}} \quad [18]$$

Donde:

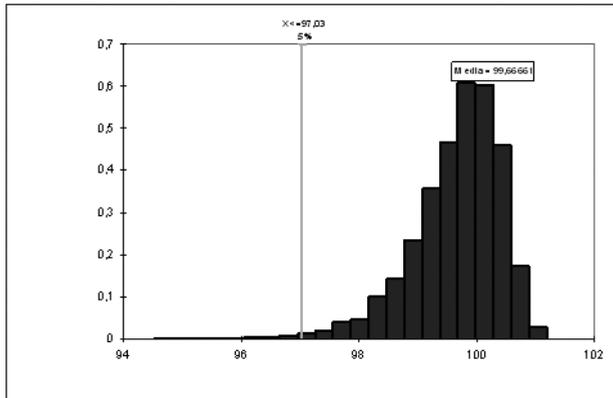
$CF_t$  es el flujo de caja

$r$  es la tir libre de riesgo

Como puede observarse en el gráfico 8, para un nivel de confianza del 99,5% el precio del bono sería de 97,03, por lo que los recursos propios que debería disponer para cubrir este riesgo serían de 2,97 frente a la carga de 1 euro propuesta en el modelo estándar.

### Gráfico 8

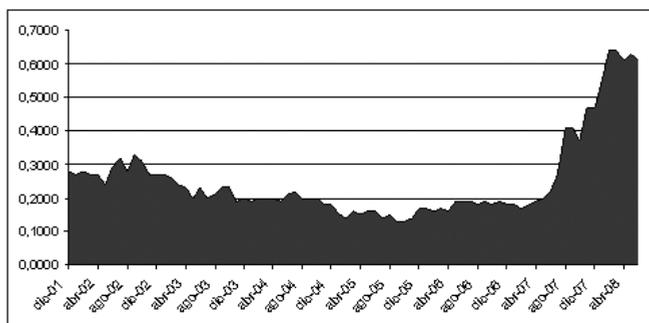
Distribución del valor del bono 1 ante diferentes escenarios de spreads.



Además el TVaR calculado para este bono sería de 3,53 euros. La principal diferencia de los resultados obtenidos en esta propuesta es debida al considerable aumento en los spreads de crédito provocados a partir de marzo de 2007 como se aprecia en el gráfico inferior. Dicho periodo no fue considerado en la calibración de la fórmula del QIS4<sup>138</sup>.

**Gráfico 9**

Evolución de los spreads de crédito calificación AAA



- *Riesgo de concentración (MKTconc)*

El riesgo de concentración surge como consecuencia de la mayor volatilidad que presentan las carteras poco diversificadas y de la posible pérdida total o parcial de valor por *default* o incumplimiento del emisor. En QIS4 los títulos del gobierno están exentos en principio del riesgo de concentración<sup>139</sup>, al igual que los depósitos bancarios hasta 3 meses y hasta 3 millones de euros en bancos con una calificación crediticia igual o superior a AA. Las exposiciones al riesgo en activos deben ser agrupadas de acuerdo con las contrapartes implicadas. Las

<sup>138</sup> Para la calibración de la fórmula estándar para el riesgo de spread de QIS4 se emplearon la mediana de los diferenciales de bonos desde 1991 a 2006 y los diferenciales de crédito a largo plazo desde 1950 a 2006 empleando como fuente Moody's.

<sup>139</sup> Están exentos los préstamos emitidos por el gobierno local o garantizados por él o por un estado OCDE o del Espacio Económico Europeo siempre que sean emitidos en la divisa del gobierno local.

siguientes partidas son necesarias para efectuar el cálculo de concentración:

- $E_i$  = exposición neta a la quiebra de la contraparte i.
- $Activo_{xl}$  = Cantidad total de activos excluyendo aquellos en los que el beneficiario soporte el riesgo de inversión.
- $Rating_i$  = calificación externa del rating de la contraparte i.

Para cada contraparte se permite un nivel de concentración de riesgo y a partir de ese límite, el exceso deberá cubrirse con un determinado nivel de capital. El límite de concentración (CT) se aplica a la suma de la renta variable y la renta fija y está en función del rating de la contraparte. De esta forma se establece un nivel del 5% para los títulos de calificación A o superior, mientras que para los títulos BBB o inferior es del 3%<sup>140</sup>. La fórmula para el cálculo de las exposiciones en exceso es, por tanto la siguiente:

$$XS_i = \left\{ 0; \frac{E_i}{Activo_{xl}} - CT \right\} \quad [19]$$

Sobre la cuantía del exceso de riesgo será preciso disponer de una cantidad de capital ( $g_i$ ), nuevamente en función del rating cuya cuantía se recoge en el cuadro siguiente.

### Cuadro 12

Porcentaje de capital necesario sobre el exceso de riesgo asumido

rating <sub>i</sub>	Calidad crediticia <sup>2</sup>	g <sub>i</sub>
AAA	1	0,15
AA		
A	2	0,18
BBB	3	0,30
BB o inferior, sin calificar	4 – 6, -	0,73

<sup>140</sup> Además, en el caso de ciertos valores de deuda el límite de concentración se fija en un 40% lo que refleja la mayor naturaleza de seguridad de estos valores.

De este modo, la carga de concentración de riesgo para cada contraparte se calcula como:

$$Conc_i = Activos_{xl} * XS_i * g_i \quad [20]$$

Finalmente se procede a la agregación de las distintas cargas de concentración suponiendo total independencia entre ellas, obteniendo así el  $Mkt_{concentración}^{141}$

$$Mkt_{concentración} = \sqrt{\sum_i Conc_i^2} \quad [21]$$

El riesgo de concentración en los modelos DFA, en la medida que se simula completamente el comportamiento de la cartera de inversión, ya está implícito en los propios sub-modelos. De este modo, las carteras más diversificadas se beneficiarán más de su composición de cartera que aquellas que no lo hagan.

### 3.2. Modelización del riesgo asegurador en seguros no vida ( $SCR_{NO VIDA}$ )

El modelo utilizado en QIS4, considera dentro del riesgo asegurador, la posibilidad de que durante el período de análisis (1 año), tanto las primas como las reservas sean insuficientes para hacer frente al pago de las prestaciones por siniestros y de los gastos de la actividad. Adicionalmente, se tienen en cuenta los riesgos catastróficos, por tratarse de eventos que no son capturados suficientemente en el concepto anterior, para los cuales la compañía deberá disponer también del capital preciso. Por lo tanto la carga de capital por riesgo asegurador no vida ( $SCR_{no vida}$ ) se obtiene combinando los riesgos anteriores, siendo el coeficiente de correlación lineal entre las cargas de capital

<sup>141</sup> Para calcular el riesgo de concentración para los seguros de vida, los cálculos de las cargas de capital se deben calcular suponiendo que no se modifican las tasas de reparto de beneficios futuros, es decir, que las tasas se mantienen constantes antes y después de un cambio en la volatilidad y/o nivel de impago de los activos concentrados. De forma adicional se debe calcular el resultado del cálculo en el que las tasas de reparto se modifican dando como resultado la carga de capital  $nMkt_{concentración} \cdot nMkt_{concentración}$ . Por diferencia entre ambas cargas de capital se recoge el efecto de la reducción del riesgo.

para el riesgo de reservas y primas ( $NLpr$ ) y para el riesgo catastrófico ( $NLcat$ ) igual a cero<sup>142</sup>.

De este modo, el capital necesario se estima a través del producto de una función de la volatilidad y del nivel de exposición al riesgo:

$$NLpr = \rho(\sigma) * V \quad [22]$$

Siendo:

$\rho(\sigma)$  una función de la volatilidad<sup>143</sup>

V= el volumen de primas y reservas.

Las *volatilidades* son proporcionadas por el regulador a partir de datos de mercado en el caso del riesgo de reserva, con valores que oscilan entre el 7% y el 15% en función de la línea de negocio. Respecto a la volatilidad del riesgo de primas, se utilizan los datos propios del asegurador y otros basados en el mercado referentes al *loss ratio*<sup>144</sup>, de modo que en función del número de años del que se tenga información disponible y de la línea de negocio se dará un mayor o menor peso (factor de credibilidad) a la información específica del asegurador. La compañía determinará la volatilidad de cada ramo<sup>145</sup> y posteriormente, teniendo en cuenta la correlación del riesgo entre ramos<sup>146</sup>, calculará el riesgo global. La *variable volumen*, hace referencia a las primas y provisiones previstas para el período de análisis. Además,

142 Por lo tanto, en el hipotético caso de que fuera 100 u.m. y fuera también 100 u.m., el  $SCR_{no\ vida}$  sería de 141 u.m.

143 La función  $\rho(\sigma)$  equivale aproximadamente a tres desviaciones estándar. De este modo, una compañía que tenga una volatilidad del ratio combinado de primas y reservas del 5%, la carga equivalente de capital se determinará de forma aproximada como  $\rho(\sigma)=3 \times 0,05=0,15$ . El valor exacto de la función de la volatilidad (0,13) se determina a

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp(N_{0,995} * \sqrt{\ln(1 + \sigma^2)})}{\sqrt{(1 + \sigma^2)}} - 1$$

144 La ratio de siniestralidad se establece como el cociente entre las reclamaciones, gastos y provisiones imputables del ejercicio en una línea de negocio, sobre las primas imputables al final del año.

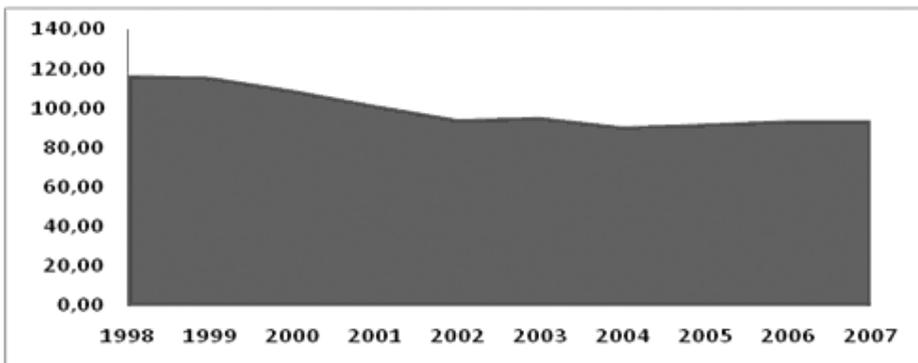
145 Se agrega la volatilidad de reservas y de primas para cada LoB suponiendo una correlación de 0,5.

146 Los coeficientes de correlación entre ramos toman los valores 0,25 o 0,5.

aquellas instituciones que dispongan de una mayor diversificación geográfica<sup>147</sup>, se beneficiarán de un ajuste en el volumen y, consecuentemente, necesitarán menos recursos propios<sup>148</sup>.

En este ejemplo ilustraremos el cálculo de las necesidades de capital para cubrir el riesgo de primas. Para ello hemos considerado una compañía que opera en el ramo de autos español y con una cuota de mercado del 10%. En el gráfico siguiente puede observarse la evolución de la ratio de siniestralidad o *loss ratio* para el período 1998-2007, calculado a partir de las cuentas de explotación del ramo de autos proporcionadas por ICEA. Dicha ratio se ha calculado como la suma de la siniestralidad, incluidas provisiones del ejercicio, de los gastos de explotación y otros gastos técnicos, sobre el volumen total de primas imputadas al ejercicio.

**Gráfico 10**  
Evolución de la ratio de siniestralidad en el período 1998-2007  
en el ramo de Autos



Fuente: Elaboración propia a partir datos ICEA.

El volumen en este caso es la cuantía de primas previstas para el ejercicio siguiente, que en este caso hemos estimado en una cuantía

<sup>147</sup> El beneficio por diversificación se calcula en función del índice Herfindahl para los países en los que opere la compañía. Sólo se beneficiarán de la reducción del capital necesario las compañías con una concentración en un mercado inferior al 95%.

<sup>148</sup> El volumen de primas es el mayor entre la expectativa de primas netas ganadas, la expectativa de primas netas suscritas, y el 105% de las primas netas suscritas en ese año. El volumen de reservas es la mejor estimación de las reclamaciones pendientes.

igual al 10% de la cifra del mercado en 2007. Dicha cuantía equivale a 2.524,923 millones de euros.

Las volatilidades de mercado para las primas son proporcionadas por QIS4 y ascienden al 9%, mientras que la volatilidad propia del *loss ratio* es preciso calcularla a partir de los datos históricos de la compañía, que hemos considerado que se comporta como la media sectorial. De este modo, aplicamos la fórmula de cálculo de la volatilidad de la ratio de siniestralidad como:

$$s_{(A, primas, ramo)} = \sqrt{\frac{1}{(n_{ramo} - 1) * V_{(primas, ramo)}} * \sum_y P_{ramo}^{y, ganadas} * (R_{ramo}^y - m_{ramo})^2} = 7,84$$

Donde:

- $\mu_{ramo}$  es la estimación específica de la compañía del valor esperado de la ratio de siniestralidad de un ramo, definida como la media ponderada histórica de la ratio de siniestralidad<sup>149</sup>

$$m_{ramo} = \frac{\sum_y P_{ramo}^{y, ganadas} * R_{ramo}^y}{\sum_y P_{ramo}^{y, ganadas}}$$

$$P_{ramo}^{y, ganadas} \text{ es igual a } \sum_j P_{j, ramo}^{y, ganadas}$$

- $n_{ramo}$  es el número de años históricos para el cual se tienen datos (5, 10 o 15 años dependiendo del ramo).

- $R_{ramo}^y$  es la ratio de siniestralidad neta para cada ramo y para los años históricos  $y=t-1, t-2, \dots, t-n$

Una vez que se dispone de ambas volatilidades, se calcula la volatilidad de las primas de la compañía, ponderando una u otra en mayor o menor medida, en función del período histórico que se haya utilizado para los datos propios. En este caso particular, como se utiliza información de los últimos 10 años, la ponderación de la volatilidad propia será de un 71% y se obtendría el resultado siguiente:

<sup>149</sup> Se calcula sin considerar la diversificación geográfica de cada ramo, es decir, de forma consolidada.

$$\sigma_{(primas, ramo)} = \sqrt{c_{ramo} \cdot \sigma_{(A, primas, ramo)}^2 + (1 - c_{lob}) \cdot \sigma_{(M, primas, ramo)}^2}$$

$$= \sqrt{0,29 \times 0,09^2 + 0,71 \times 0,0784^2} = 0,0819$$

Finalmente, la carga de capital es igual al producto de la función de volatilidad global por el volumen (ecuación 22). En este caso la carga de capital se calcula como:

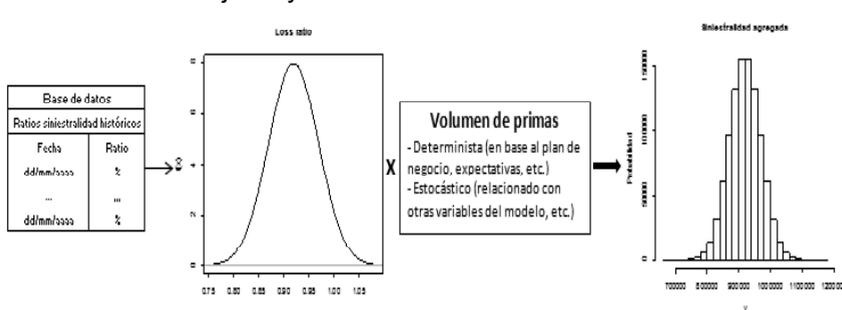
$$NL_{pr} = \left( \frac{\exp(N_{0,995} \times \sqrt{\ln(1 + 0,0819^2)}) - 1}{\sqrt{(1 + 0,0819^2)}} \right) * 10.958.369 = 2.524.923,27 \text{ u.m.}$$

Es decir, la carga de capital es igual al 23,04% del volumen de primas, lo que equivale, como ya habíamos indicado, a aproximadamente tres veces la volatilidad ( $3 * 0,0819 = 0,24$ ).

La modelación del riesgo asegurador a través de DFA se realiza habitualmente mediante la simulación de las variables (primas, gastos, siniestralidad, reservas, inflación, etc.) que afectan al riesgo asegurador, tomando como referencia el ajuste de los datos históricos que han presentado dichas variables. Una alternativa, íntimamente ligada al modelo propuesto en QIS4, consiste en proyectar directamente la ratio de siniestralidad tras haber sido ajustada a una distribución histórica. Suele ser habitual utilizar una función normal, lognormal o gamma.

### Gráfico 11.

Proceso de ajuste y simulación de loss ratio en modelos DFA



Fuente: Elaboración propia

Continuando con el ejemplo utilizado para el modelo estándar, hemos procedido al ajuste del *loss ratio* histórico del ramo de autos a una función lognormal. Los resultados de dicho ajuste se muestran en el cuadro inferior.

**Cuadro 14**

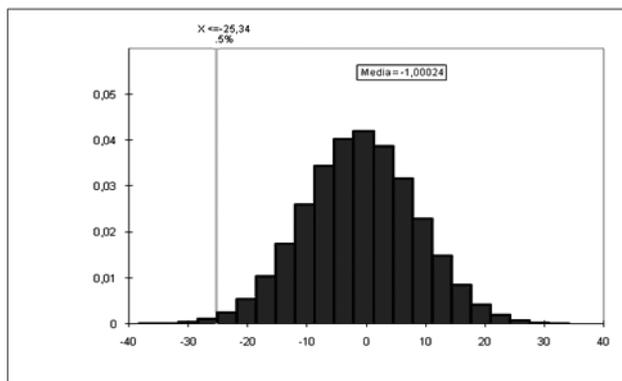
Estadísticas de ajuste de la ratio de siniestralidad

	<i>Lognormal</i>
<i>Media</i>	4,607
<i>Desviación típica</i>	0,091
<i>Chi</i>	0,4
<i>K-S</i>	0,8896
<i>A-D</i>	0,298

Posteriormente, al igual que para el resto de los ejemplos anteriores, se realizaron 10.000 simulaciones sobre la diferencia entre el valor de las primas y la siniestralidad proyectada, obteniendo los resultados que se recogen en el gráfico siguiente. En el mismo se puede observar que el exceso máximo del *loss ratio* sobre el valor de las primas con un nivel de confianza del 99,5% ascendió a 25,33%. De este modo, el capital resultante sería ligeramente superior al estimado a través del modelo estándar. Además, si se hubiese optado por el TVaR, las necesidades de capital se elevarían al 27,81% de las primas. En ambos casos, los resultados de la simulación superan la estimación del modelo estándar (23,02%).

**Gráfico 12**

Distribución simulada del riesgo de primas.



En el cuadro siguiente recogemos los resultados obtenidos en los apartados anteriores para los diferentes riesgos. Como se puede observar, salvo en el caso del capital determinado a través de modelos internos para el riesgo de acciones y usando el VaR como medida de riesgo, las cuantías que resultan superan en todos los casos a las propuestas en el modelo estándar. Destaca particularmente el caso del riesgo de spread, donde la cuantía se triplica. Además, de haber utilizado TVaR en lugar del VaR como medida del riesgo, las cargas de capital habrían aumentado, en particular, en los riesgos de renta variable y spread.

### Cuadro 15

Cargas de capital obtenidas para los riesgos analizados

Riesgos analizados		Modelo estándar (QIS4)	Modelo interno (Propuesta DFA)	
		VaR	VaR	TVaR
<b>Renta variable</b>		32%	29,7%	35,9%
<b>Tipos de interés</b>	Compañía A	0,32 €	0,44 €	0,47 €
	Compañía B	11,56 €	13,40 €	14,55 €
<b>Spread</b>		1 €	2,97 €	3,53 €
<b>Primas</b>		23,04%	25,33%	27,81%

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos analizado desde un punto de vista práctico, el modelo propuesto en el último informe de análisis de impacto cuantitativo (QIS4) para seguros generales, frente a diversas alternativas que pueden utilizarse en la configuración de modelos internos mediante análisis financiero dinámico. En concreto hemos evaluado los principales riesgos a los que están expuestas las compañías de seguros españolas que operan en seguros no vida. Para ello, se han utilizado datos del período 2001-2008, en lo referente a los diferentes riesgos que se engloban dentro del módulo de mercado, y la cuenta de resultados agregada del ramo de autos de los últimos 10 años para evaluar el riesgo asegurador. El resultado de nuestro trabajo muestra

que, en general, las necesidades de capital obtenidas mediante modelos internos basados en las técnicas utilizadas y estimadas para el horizonte temporal analizado, superan a las del modelo estándar. Destaca particularmente el caso del riesgo de spread, donde la cuantía se triplica. Además, de haber utilizado TVaR en lugar del VaR como medida del riesgo, las cargas de capital habrían aumentado, en particular, en los riesgos de renta variable y spread. Esto significaría que aquellas compañías que utilicen el modelo estándar podrían estar subestimando la cantidad de capital necesaria para cubrir el riesgo en el entorno actual de elevada volatilidad. Otro motivo que podría conducir a diferencias en la carga de capital con el modelo estándar, y que no ha sido tenido en cuenta en este trabajo, es la forma en la que se establece la estructura de dependencia entre los riesgos individuales. La metodología utilizada es susceptible de ser replicada por parte del sector asegurador con la finalidad de construir modelos internos con los que evaluar su nivel de exposición al riesgo y los requerimientos de capital necesarios de acuerdo con la nueva regulación que entrará en vigor en el horizonte de 2012. De este modo, aquellas compañías que opten por aplicar modelos DFA para el control de su solvencia, dispondrán de una herramienta de gran utilidad para la gestión de la compañía, que les permitirá medir mejor su nivel de exposición y, consecuentemente, mejorar la toma de decisiones que favorezcan la solvencia y la creación de valor.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acerbi, C. y Tasche, D., 2002. Expected Shortfall: a Natural Coherent Alternative to Value at Risk, *Economic Notes*, 31(2), 379-388.

Ahlgrim, K. C.; D'Arcy, S. P. y Gorvett, R. W., 1999. Parameterizing Interest Rate Models, *CAS Forum*, 1-50.

Ahlgrim, K. C.; D'Arcy, S. P. y Gorvett, R. W., 2004. Modeling of Economic Series Coordinated with Interest Rate Scenarios, Proyecto de investigación CAS y SOA, Disponible en

<http://casact.org/research/econ/> [consultado 10 de febrero de 2009]

Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber J. M. y Heath, D., 1999. Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, 9(3), 203-228.

Blum, P.; Dacorogna, M.; Embrechts, P.; Neghaiwi, A. A.; Niggli, H., 2001. Using DFA for Modelling the Impact of Foreign Exchange Risks on Reinsurance Decisions, *CAS Forum*, 49-94.

Bollerslev, T., 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-328.

Brooke, T., 2003. Dynamic Financial Analysis. Making Use Of Your Simulations, Presentado el 2 de Abril de 2003 a la Society of Actuaries en Dublín, Irlanda. Disponible en [http://www.actuaries.ie/Events%20and%20Papers/Events%202003/2003-04-02\\_DFA%20Modelling/2003-04-02\\_Tony\\_Brooke\\_Taylor.PDF](http://www.actuaries.ie/Events%20and%20Papers/Events%202003/2003-04-02_DFA%20Modelling/2003-04-02_Tony_Brooke_Taylor.PDF) [consultado 10 de febrero de 2009]

CEIOPS, 2007. QIS3 Technical Specifications, CEIOPFS-11/07.

CEIOPS, 2007. QIS3 Technical Specifications Annexes, CEIOPS- FS-13/07.

CEIOPS, 2007. QIS3 Calibration of the underwriting risk, market risk and MCR, CEIOPS- FS-14/07.

CEIOPS, 2007. QIS3 Calibration of the credit risk, CEIOPS- FS-23/07.

CEIOPS, 2008a. QIS4 Technical Specifications, MARKT/2505/08.

CEIOPS, 2008b. Errata to the QIS4 Technical Specifications, MARKT/2505/08.

Comisión de las Comunidades Europeas, 2007. *Propuesta de Directiva del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el seguro de vida el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio Solvencia II.*

Cox, J.; Ingersoll, J. y Ross, S., 1980. An analysis of variable rate loan contracts, *Journal of Finance*, 35(2), 389-403

Cox, J.; Ingersoll, J. y Ross, S., 1985. A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53(2), 385-407.

D'Arcy, S.P.; Gorvett, R. W.; Herbers, J. A.; Hettinger, T. E.; Lehmann, S. G. y Miller, M. J., 1997. Building a Public Access PC-Based DFA Model, CAS Forum, 1–40.

D'Arcy, S. P.; Gorvett, R.W.; Hettinger, T.E. y Walling, III R.J., 1998. Using the Public Access Dynamic Financial Analysis Model. A Case Study, CAS Forum, 53–118.

D'Arcy, S.P. y Gorvett, R., 2004. The Use of Dynamic Financial Analysis to Determine Whether an Optimal Growth Rate Exists for a Property-Liability Insurer, *Journal of Risk and Insurance*, 71(4), 583–615.

Dothan, L.U., 1978. On the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics*, 6(1), 59-69.

Embrechts, P.; McNeil, A. y Straumann, D., 2001. Correlation and Dependence in Risk Management. Properties and Pitfalls, en Dempster, M. Ed. *Risk Management. Value at Risk and Beyond*, Cambridge University Press, 176-223.

Engle, R. F., 1982. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation, *Econometrica*, 50(4), 987-1008.

Heath, D.; Jarrow, R. y Morton, A. 1992. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates. A New Methodology, *Econometrica*, 60(1), 77-105.

Hibbert, J.; Mowbray, P. y Turnbull, C., 2001. A Stochastic Asset Model & Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes, Technical Report, Barrie & Hibbert Limited.

Ho T. S. Y y Lee. S-B., 1986. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *The Journal of Finance*, 41(5), 1011-1030.

IAIS 2002. Principios sobre suficiencia de Capital y de Solvencia, Principios . 5.

Kaufmann, R.; Gadmer, A. y Klett, R., 2001. Introduction to Dynamic Financial Analysis, *ASTIN Bulletin*, 31(1), 213–249.

Rockafellar, R.T. y Uryasev, S., 2000. Optimization of Conditional Value-At-Risk, *The Journal of Risk*, 2(3), 21–41.

Rockafellar, R.T. y Uryasev, S., 2002. Conditional value-at-risk for general loss distributions, *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1443-1471.

Schmeiser, H., 2004. New Risk-Based Capital Standards in the EU. A Proposal Based on Empirical Data, *Risk Management and Insurance Review*, 7(1), 41–52.

Taylor, S.J. 1986. *Modelling Financial Time Series*, Wiley, New York.

## Ponencia 31

# MODELO DINÁMICO DE GESTIÓN Y CUANTIFICACIÓN DEL RIESGO OPERACIONAL EN EL MARCO DE SOLVENCIA II

M<sup>a</sup> Victoria Rivas López y Javier Montoya Martín

## RESÚMEN

El riesgo operacional para compañías de seguros europeas en el marco de Solvencia II, está resultado uno de los más complicados a hora de ser gestionado y cuantificado. Esto es debido a la necesidad de disponer de una base de datos histórica de pérdidas operacionales tanto individuales como sectoriales en un horizonte temporal prolongado. El objetivo de este artículo consiste proponer un modelo general de gestión y cuantificación para el riesgo operacional, en el cuál se englobe todos los aspectos teóricos y prácticos para implantar un modelo dinámico de gestión de dicho riesgo en las compañías aseguradoras.

**Palabras Clave:** Enterprise Risk Management, Solvencia II, Riesgo Operacional, SAS Business Intelligence, Dinámica de Sistemas

## 1. INTRODUCCIÓN

Solvencia II supone para las compañías de seguros europeas un cambio profundo en su sistema de gestión, cuantificación y control eficiente del riesgo, es decir la implantación de un ERM (Proceso Integral de Gestión de Riesgos) que se adapte a las necesidades regulatorias y de mercado. Para alcanzar el adecuado ERM que exige Solvencia II, se tendrá que desarrollar un ORM (Operational Risk Management) en el que se desarrollen todas las fases propias de un ERM pero centrándose en el riesgo asociado a las operaciones y procesos.

La preocupación por la gestión del riesgo operacional por parte de CEIOPS quedó patente, cuando incluyó en su cuarto estudio de impacto (QIS4), un cuestionario relacionado con la gestión por parte de las compañías de seguros de su riesgo operacional en el que resaltaba:

*“La implantación de estrategias, políticas, procedimiento concernientes la gestión del riesgo operacional, es un pre-requisito necesario para asegurar que cualquier empresa identificar, analizar, tratar, controlar de una forma adecuada el riesgo operacional, no siendo suficiente quedarse únicamente en la gestión de los riesgos propios de negocio que están llevando a cabo, en la actualidad en muchas compañías.”*

En relación al caso español, las compañías se han visto motivadas a avanzar en esta dirección, ante la aparición y modificación del art 110 ROSSP en el que se destaca:

*“Las entidades aseguradoras establecerán Sistemas de Gestión de Riesgos, adecuados a su organización, que les permitan identificar y evaluar sus riesgos internos y externos a los que están expuestas.*

*Para ello se establecerán estrategias respecto a los mismos, adecuadas a la naturaleza e incidencia de tales riesgos, incorporando procesos que permitan una medición de los riesgos identificados, incluyendo la probabilidad de ocurrencia e impacto en el perfil de riesgo de la entidad.*

*Asimismo, las entidades deberán tener establecidos planes de contingencia que permitan anticipar situaciones adversas que puedan poner en peligro su viabilidad”*

Ante este ambicioso reto regulatorio al que se están enfrentando las compañías de seguros europeas, surge este artículo con el objetivo de orientar y ayudar en dicho proceso para la construcción de un ORM óptimo, que permita un control de riesgos eficaz en un entorno dinámico.

El artículo está dividido en tres partes, en la primera se describen las diferentes teorías y metodologías aplicables para la gestión y cuanti-

ficación de dicho riesgo. En la segunda parte, se analizan las fases de un proceso ORM así como un plan director para la implantación del proceso de gestión del riesgo operacional en el marco de Solvencia II.

## **2. MARCO GENERAL LA MODELIZACIÓN DEL RIESGO OPERACIONAL (OPERATIONAL RISK MANAGEMENT) EN LAS COMPAÑÍAS DE SEGUROS**

La gestión y cuantificación del de riesgo operacional (Operational Risk Management, ORM) se puede definir como el proceso integral que abarca en la identificación, análisis, evaluación, tratamiento, mitigación y control de los riesgos operacionales. El objetivo principal de este proceso es la minimización de las pérdidas operacionales a las que está sometida la entidad. Este proceso implica y afecta a todo la organización y a todos los niveles. En relación con esta definición se plantean las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles pasos se tienen que seguir para implantar un ORM?
- ¿Qué recursos, capacitación e información se necesitan?
- ¿Qué metodologías, teorías o técnicas son necesarias para su implantación y desarrollo?
- ¿Cuáles son las responsabilidades los participantes de un proceso ORM para que sea efectivo?

En este apartado se va tratar de responder a todas estas cuestiones, pero en primer lugar, se definirá en que consiste el riesgo operacional.

El riesgo operacional está asociado a los fallos o de la falta de adecuación de los procesos internos, de las personas, de los sistemas, o por eventos externos. En está definición incluye el riesgo legal, pero excluye el riesgo estratégico y reputacional. En este sentido hay que

tener en cuenta que a pesar de no estar incluido en la definición el riesgo reputacional, en muchas ocasiones las pérdidas operacionales elevadas provoca la aparición, desarrollo e intensificación del riesgo reputacional.

La importancia de gestionar los riesgos operacionales es imprescindible para la empresa, tanto desde un punto de vista global así como en cada una de sus unidades estratégicas de negocio, para su evolución, crecimiento y supervivencia.

El tratamiento del riesgo operacional en el marco de Solvencia II se muestra en el cálculo del SCR (Solvency Capital Requirement) y en los requerimientos del Pilar II asociados al proceso de gestión de riesgos. De la forma que está integrado en la estructura modular de Solvencia II para el caso de la fórmula estándar, no se permite la opción de considerar las correlaciones entre los riesgos de otros módulo, dicho hecho esta englobado en el Pilar II cuando se lleva a cabo un análisis de sensibilidad de riesgos.

En este sentido, CEIOPS ha estado trabajando prioritariamente en la valoración interna del riesgo y de la solvencia como parte del sistema de gestión de riesgos para una empresa aseguradora.

En este marco se seguirán las fases de identificación, la valoración, la revisión, control y la publicidad de todos los riesgos a los que una empresa aseguradora está expuesta también a medio y largo plazo. Entre los objetivos de la aplicación de Solvencia II figura la determinación de los fondos propios requeridos para garantizar que las necesidades totales de solvencia de la entidad son cubiertas en todo momento.

El impacto en términos de coste asociado a la falta de gestión de riesgo operacional por parte de las compañías aseguradoras puede ser enorme. CEIOPS en su informe “Lessons learn from crisis, Solvency II and Beyond, 2009” considera que una de las lecciones aprendidas a raíz de la crisis es precisamente que tanto los supervisores como la industria del seguro son conscientes de la relevancia del riesgo

operacional, al cuál en determinadas situaciones pasadas no se le ha prestado suficiente interés.

De acuerdo con los principios del marco de Gestión de Riesgos Operacionales se deben tener en cuenta los siguientes aspectos desde el punto de vista organizativo y directivo a la hora de implantar un ORM.

- El marco global de la Gestión del Riesgo comienza con la definición de la estrategia compuesta por los objetivos y políticas en materia de riesgos dentro del modelo de gobierno corporativo. Se debe definir de forma clara el apetito o actitud frente al riesgo así como la política de retención y transferencia de riesgos.
- El Consejo de Administración debe ser consciente de dos de los aspectos más importantes de una óptima gestión del riesgo operacional está asociada a la aprobación y revisión periódica. Para ello será necesario disponer de potentes soluciones tecnológicas que un control a tiempo real y disposición en cualquier momento de un reporting de riesgos actualizado a tiempo real. Esto les permitirá una efectiva auditoría interna y externa de riesgos.
- La dirección tiene la responsabilidad de determinar el marco de gestión de riesgo operacional a todos los niveles e involucrar a toda la organización para lograr una cultura responsable de gestión de riesgos.
- La entidad debe identificar los riesgos operaciones asociados a sus productos, actividades, procesos y sistemas.
- Será básico para la entidad tener planes de contingencia y continuidad de negocio, asegurando su capacidad para operar y evitar una posible interrupción del negocio.
- Adaptación de la estructura organizativa en las que se defina las responsabilidades, proceso de comunicación, actitudes, prácticas y todas aquellas actividades de riesgos que caracterizan el funcionamiento diario de la entidad. Todo ello debería hacerse en orden

a ajustar cuando sera necesario los procesos internos a nuevas situaciones externas.

- El organigrama considerado servirá para la marcar los pasos generales de la implantación del ORM. Por otra parte, será necesario conocer, aspectos tan importantes como el grado de preparación del equipo líder de las diferentes unidades de negocio y llevar a cabo la designación de los responsables de cada área en materia de riesgo.

Recursos técnicos	Recursos humanos	Recursos organizativos
<ul style="list-style-type: none"> <li>- BBDD</li> <li>- Software adecuado</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Formación</li> <li>- Contratación</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Integración de procesos de riesgos en los procesos de negocio</li> <li>- Cambios estructura organizativa</li> <li>- Nuevo departamento de riesgos</li> <li>- Asignación de responsabilidades de riesgos</li> </ul>

- En todo proceso de implantación de un ORM, la dirección debe plantearse involucrar a toda la organización por ello será básico analizar las diferentes unidades o líneas de negocio así como los departamentos principales de la entidad.
- En el estudio de los riesgos de una empresa se deben establecer los límites de tolerancia a pérdidas económicas que puede soportar cada entidad, en valores referenciados frente a determinados parámetros financieros. Los límites o umbrales de tolerancia que conviene determinar son, pérdidas económicas totales de todo tipo de riesgos soportables por la empresa en un periodo de tiempo, normalmente anual, pérdidas económicas de un tipo de riesgos soportables por la entidad en un periodo de tiempo y por último pérdidas económicas soportables por el impacto de un único siniestro.
- Otro aspecto a destacar a la hora del establecimiento de un ORM es la problemática de obtención de pérdidas operacionales. Los

datos de pérdidas operacionales para calcular el riesgo de la firma, deben provenir de fuentes internas y externas. Las fuentes internas de datos operaciones partirán de la información de la compañía y en estudio de sus procesos y procedimientos. También será importante disponer de una base de datos que incluya tanto datos públicos como privados. Los datos públicos son obtenidos generalmente desde los informes que aparecen en los medios e información comercial pública. Los datos privados de carácter externo, son obtenidos generalmente cooperando con instituciones que estén de acuerdo en compartir sus datos internos. En España en lo referente a este punto, el sector se encuentra ante la inexistencia de una base de datos privada externa. En este sentido, queda todavía mucho por hacer, ya que no sólo es necesario que las compañías tengan su base de datos de pérdidas operacionales interna, sino que además debe tenerlo en un horizonte histórico al menos de cinco años para que dicha base de datos proporcione datos significativos para la creación de escenarios futuros lo más acertados posibles. En Inglaterra, se creó ORIC, (Operational Risk Insurance Consortium) base de datos de pérdidas operacionales externa pero privada de las compañías. En dicho consorcio participan las principales compañías de seguros inglesas. ORIC fue promovido por ABI (Association British Insurance) y SAS Business Intelligence. En este sentido, España y el resto de Europa tendrán que tomar ejemplo de dicho organismo con vistas a crear una base de datos de riesgo operacional que permita modelizar de una forma óptima sus pérdidas operacionales. Una vez obtenidos los datos de pérdidas habrá que categorizarlos, es decir agruparlos por categorías. Dicho proceso ayudará el tratamiento y comprensión del riesgo con vistas a la optimización de su control. Para agrupar los datos se pueden considerar diferentes atributos o criterios. La cuestión clave es determinar qué constituye una buena categorización estándar.

En principio es posible que las categorías puedan ser definidas de forma que permita identificar quién es la persona o grupos de personas responsables, supervisores o controladores del riesgo. Deben ser definidas de tal forma que el gerente de riesgos comprenda cómo puede reducir la probabilidad y severidad de ocurrencia de una pérdida.

La categorización de las pérdidas se puede llevar a cabo por causa, efecto y evento.

- a) – Categorización por causa. Se atribuye a la relación entre ciertos factores causales y las pérdidas operacionales. Por ejemplo un error en la suscripción puede estar asociado a la falta de formación de un empleado, mientras que otro puede estar ocasionado por una sobrecarga de trabajo.

El problema respecto a este criterio consiste en una excesiva subjetividad y que en realidad las pérdidas pueden estar motivadas por un número de factores que rara vez son exclusivos. Con lo que este tipo de categorización no es el más adecuado en el caso de pérdidas operacionales.

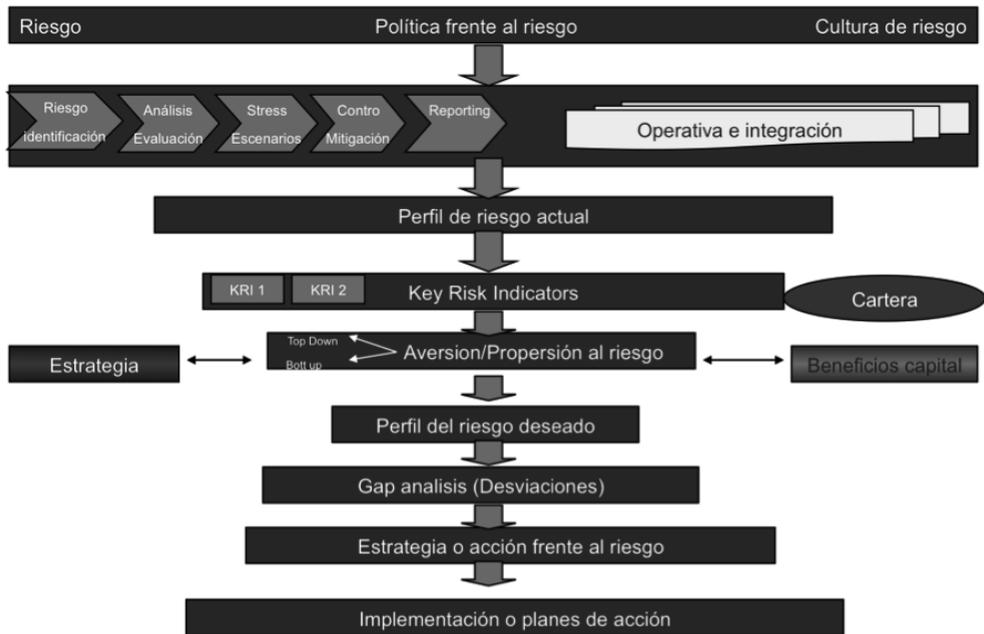
- b) – Categorización por efecto: Se basa en la forma en que las pérdidas son manifestadas. El primer problema de este criterio está asociado a que el mismo tipo de eventos operacionales puede provocar pérdidas de diversa índole. El segundo problema está asociado a la dificultad de establecimiento un adecuado método de control por parte del gerente de riesgos al estar asociado dicho control a los efectos que provocan las pérdidas operacionales.
- c) – Categorización por evento: Consiste en la categorización por causa pero que se ha mejorado definiéndose la pérdida basándose en la naturaleza del evento. Por ejemplo, una pérdida asociada al fraude por parte de la red comercial puede ser agrupada en la categoría de fraude interno o por ejemplo una pérdida debido a discriminación puede ser agrupada en la categoría de prácticas de empleados. Este método mejora la categorización de las pérdidas y permite que eventos de tipología similares sea agrupados de forma conjunta. Lo más importante de la categorización por evento está asociada a que permite una mejora en la gestión en temas de asignación de responsabilidad, roles y controles

### **3. PROCESO DE GESTIÓN Y CUANTIFICACIÓN DEL RIESGO OPERACIONAL (OPERATIONAL RISK MANAGEMENT) EN LAS COMPAÑÍAS DE SEGUROS**

ORM es un proceso sistemático de decisión que permite la la identificación del riesgo, el marco de control, análisis, evaluación, medición, retroalimentación y reporting. La gestión de riesgos es un proceso que debe expandirse por toda la organización. Para ello es necesario crear una unidad de riesgo específica que defina el marco de gestión y reporte a la alta dirección los resultados del proceso de gestión del riesgo. Es vital el papel de auditoría en el proceso como mecanismo interno que permita auditar y validar los procedimientos que se sigan. Las fases del proceso de gestión son: Identificación, análisis y valoración, medición, control y reporting.

Puntos clave son las causas, consecuencias (pérdidas monetarias, incidencias en el negocio, daños en la reputación de la entidad), política de límites (tolerancia al riesgo), controles establecidos.

Es un proceso continuo que no acaba en la última fase, sino que los resultados conducen a decisiones estratégicas y diarias que inciden sobre la operativa del negocio y en el que es básico un adecuado proceso de retroalimentación, es decir será un proceso dinámico.



Fuente: SAS Business Intelligence

El proceso de gestión del riesgo operacional (ORM) está compuesto de las siguientes fases:

- a. Identificación del riesgo: Consiste en determinar cuáles son los tipos de riesgo existentes y cual es su influencia en las actividades de la entidad. Es obvio, que sin una apropiada identificación de riesgos es muy difícil alcanzar una exitosa gestión. Para ello será clave el conocimiento de las fuentes de riesgo, realizar un inventario de riesgos y un análisis causal.

ORIC clasifica la tipología de riesgos operacionales en los siguientes grupos: Fraude interno, Fraude externo, Clientes, productos y prácticas de negocio, daños a los activos físicos, interrupción del negocio o caída del sistema y riesgos en los procesos de negocio.

CATEGORÍAS DE RIESGO OPERACIONAL. ORIC (Operational Risk Insurance Consortium)
Fraude Interno (ej: malversación de fondos)
Fraude Externo (ej: fraude en la contratación, no veracidad de los datos declarados en la solicitud de seguro de vida)
Clientes, productos y prácticas de negocio (ej: Inclusión de coberturas no contrastadas: Incorporación de coberturas poco contrastadas, por presiones comerciales debido a demandas del mercado sin una base estadística suficiente ni experiencia práctica de siniestros. También puede dar lugar a la existencia de “lagunas” en las coberturas, producidas por la ambigüedad en los textos comerciales).
Daños a activos físicos (ej: incendio, terremoto, inundación, terrorismo)
Interrupción de negocio y caída de sistema (ej: establecimiento de un nuevo sistema informático)
Riesgos en los procesos de negocio (ej: Errores en la elaboración de tarifas o cálculo de primas)
Prácticas laborales y seguridad en el puesto de trabajo

Pero cada entidad debe determinar cuáles son sus riesgos y establecer una clasificación propia, detallada y acoplada a sus procesos.

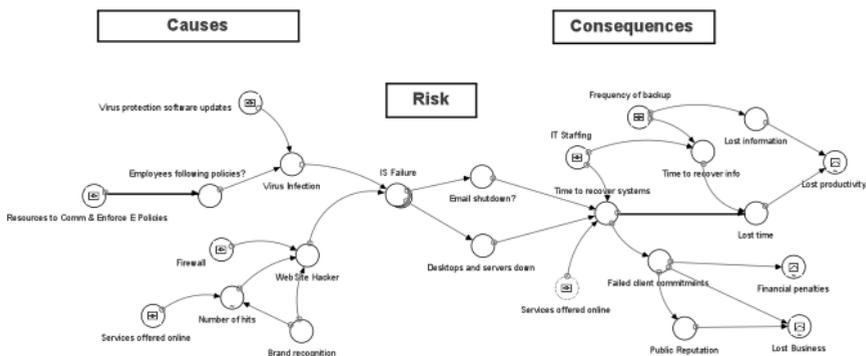
Desde el punto de vista metodológico para el estudio de las relaciones causales en el marco ORM, se destaca la dinámica de sistemas que nos permite pasar enfoque cualitativo a un enfoque más cuantitativo y establecer un sistema integral basado en un proceso de retroalimentación que permite o facilita el control de los procesos y la minimización de las pérdidas operacionales.

Dinámica de Sistemas (Sterman, 2000) es un nombre propio que designa un determinado método de construcción de modelos de sistemas sociales susceptibles de ser simulados por ordenador. El origen de esta técnica se remonta a finales de los años cincuenta y su implantación definitiva se produce durante la década de los sesenta. El desarrollo de este método se debe al trabajo de J. W. Forrester del Instituto Tecnológico de Massachussets, el cual por primera vez utilizó técnicas pertenecientes a las disciplinas de ingeniería automática para el estudio de procesos sociales y económicos

La dinámica de sistemas es una metodología que trata la aproximación a la modelización de sistemas complejos como poblaciones biológicas o los sistemas económicos, en los que las partes demuestran propiedades interactivas entre los objetos, dando como resultado una comunicación gracias a las transacciones que se derivan de las relaciones mútuas. Es básico en la dinámica de sistemas el diseño de los bucles de realimentación. Estos bucles de realimentación hacen referencia a que si la situación X afecta a Y y viceversa quizás se deba a una cadena de causas y efectos. Crear un mapa causa-efecto basado en dinámica de sistemas, asociado a los riesgos operacionales de la entidad puede facilitar la explicación y la simulación de posibles escenarios futuros. (Shah, 2001)

Un aspecto notable del método es su enorme capacidad descriptiva. Los modelos se representan mediante unos diagramas conocidos como diagramas de flujo. Un diagrama de flujo es una descripción gráfica del sistema en estudio construida de acuerdo a unas determinadas reglas.

En el gráfico que aparece a continuación, se muestra un ejemplo de la aplicación de la dinámica de sistemas a la caída del sistema informático de una entidad. Dicho análisis se podría aplicar para todas las relaciones causales asociadas a los procesos asociados a la actividad de las entidades aseguradoras y en los que surgen pérdidas operacionales



Para el proceso de identificación de riesgos se desarrollaran varios cuestionarios con el objetivo de modelizar la experiencia de expertos y poder trasladar la experiencia cualitativa a cuantitativa.

**b. Análisis y evaluación del riesgo**

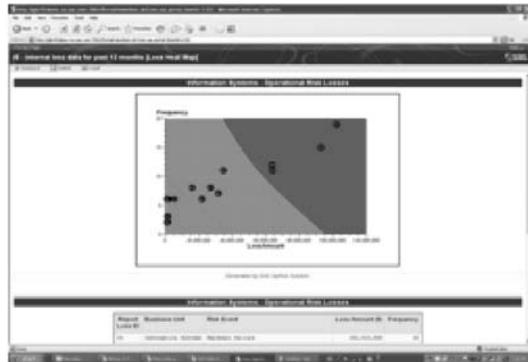
En esta fase la entidad teniendo en cuenta tanto datos históricos como opinión de expertos construirá en mapa de riesgos inherente o puro. Para la construcción del mapa bidimensional se fijaran dos ejes, uno asociado a la frecuencia y otro a la intensidad. Para la determinación de la frecuencia y la intensidad se partirá de la opinión de expertos o datos históricos y se calculará para cada riesgo un par ordenado de frecuencia en intensidad. Con ello llegaremos al mapa de puntos que constituirá en mapa de riesgos. La problemática existente esta centrada en la determinación de los pares ordenados de frecuencia e intensidad a la hora de llevar a cabo los cuestionarios a entregar a expertos.

Frecuencia	Intensidad				
	1 Muy Bajo	2 Bajo	3 Medio	4 Alto	5 Muy Alto
5 Casi Cierto	5	10	15	20	25
4 Probable	4	8	12	16	20
3 Posible	3	6	9	12	15
2 Raro	2	4	6	8	10
1 Rarísimo	1	2	3	4	5

Riesgo Muy Alto	(20-25)
Riesgo Alto	(15-19)
Riesgo Medio	(10-14)
Riesgo Medio-Bajo	(5-9)
Riesgo Bajo	(1-4)

Una vez construido el mapa de riesgos puro o inherente se analizan los posibles controles efectivos asociados que puedan minimizar esa frecuencia o intensidad. El objetivo o existencia de dichos controles nos llevará a la obtención del mapa de riesgos residual. La problemática asociada a dichos controles está centrada en la necesidad de

disponer de unos adecuados programas informáticos que permitan ese control efectivo a tiempo real. Para ello, dicho proceso se verá apoyado por los KRI (Key Risk Indicators) que serán tratado con posterioridad.



Fuente: SAS Business Intelligence

Una vez obtenido el mapa de riesgos residual se aplicará la política que en materia de riesgos tenga la entidad para su tratamiento.

#### d. Cuantificación del riesgo

En el caso de tener una base de datos histórica se podrá recurrir a la modelización actuarial que nos permitirá calcular las pérdidas de la distribución agregada llevando a cabo la descomposición de los eventos individuales y dónde se describen el número de eventos

y las pérdidas por evento, siguiendo:  $AggL = \sum_{i=1}^N X_i$  siendo  $X_i$ ,

$N$  variables aleatorias y donde cada  $X_i$  representa un pérdida o cuantía por evento y  $N$  es el número de eventos.

La evidencia empírica sugiere que la frecuencia de eventos operacionales se suele modelizar utilizando la distribución de Poisson, Binomial y Binomial negativa, entre otras distribuciones, y donde no se descartará la mixtura de distribuciones

La compañía de seguros deberá calcular el VaR Operacional con vistas a desarrollar sus modelos internos en el marco de Solvencia II. Para ello será necesario conocer la tendencia del número de eventos en un año teniendo en cuenta la estructura y el tamaño de la organización. Este procedimiento implica descubrir la relación entre el tamaño de la organización y la frecuencia de pérdidas históricas y se ajuste dichas pérdidas a la situación actual.

Para el caso de la modelización de la intensidad, severidad o cuantía de pérdidas operacionales se suelen utilizar la distribución log-normal, Weibull, Pareto y Beta. En muchos casos de pérdidas operacionales deben ser recolectados u obtenidos bajo un determinado margen o intervalo. Como resultado de esto, los datos recolectados son una muestra de una distribución de severidad truncada. Excepto para determinadas distribuciones definidas para datos truncados como GPD (Generalized Pareto Distribution). (Fabozzi, 2007)

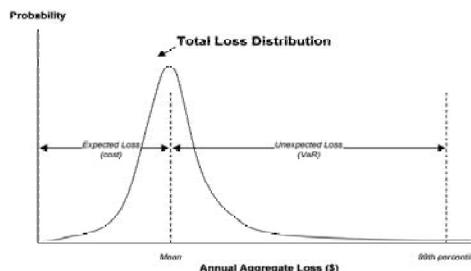
La ETV ofrece una aproximación paramétrico-estadística para valores de pérdidas extremos. En el caso de pérdidas operacionales se lleva a cabo un ajuste de los valores de pérdidas a una GPD (Distribución de Pareto Generalizada). En este método se aproxima la distribución de los valores que exceden un umbral o prioridad  $u$  determinado, es decir, la distribución condicionada a que los datos excedan de un determinado nivel. Esta teoría es complementaria a metodología Delta. El teorema de *Pickands-Balkema\_de Haan* (*Balkema* y de *Haan* 1974; *Pickands*-1975), muestra que bajo condiciones de máximos dominios de atracción y que la distribución generalizada de Pareto, es la distribución límite para los excesos sobre un límite  $u$  cuando ésta es elevada. Esta distribución se ajusta, o bien los valores  $X$  (valores absolutos que exceden al límite), o bien los valores  $Y = X - u$  (excesos sobre el límite), es una distribución condicional, ya que está sujeta a que el siniestro exceda el valor  $u$  marcado como límite. Esto conduce a la función de distribución de los excesos por encima del valor  $u$ . Esta función de distribución de exceso en  $u \left[ F^u \right]$  es:

$$F^u(x) = F^u(y+u) = P(X-u \leq X < u) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \text{ para } 0 \leq y \leq x_0 - u$$

Donde  $x$  representa la pérdida operacional total del siniestro e  $y$  el exceso por encima del umbral  $u$ , de modo que  $y = x - u$ . Al ajustarse los excesos sobre el umbral, el extremo inferior de la distribución es cero. La dificultad se encuentra en la elección del límite, ya que la teoría no propone dicho aspecto. La elección de este umbral está sujeto al problema de elección entre la varianza y sesgo, esto es, si se disminuye el umbral, se incrementa el número de observaciones para formar la serie. Por otro lado, si se reduce el sesgo entonces el índice es más volátil al realizarse con un menor número de observaciones. Los pasos para aplicar la teoría de EVT al riesgo operacional son los siguientes:

- Recopilación de datos de pérdidas por encima del límite fijado
- Ajuste del exceso de cuantía de pérdidas (datos de pérdidas operacionales) a una GDP usando máxima verosimilitud u otra técnica de ajuste
- Ajuste de los datos de frecuencia de pérdidas (datos de pérdidas operacionales) a una función de distribución de Poisson usando el método de los momentos u otra técnica de ajuste
- Simulación de Montecarlo para generar la función de distribución de pérdidas para un horizonte temporal determinado.

Para el cálculo del VaR Operacional se utilizan tres métodos: Simulación, algoritmo recursivo Panjer o aproximación computacional. Estos métodos son bien conocidos por la ciencia actuarial pero a la hora de aplicarlos para la cuantificación de pérdidas operacionales tiene que ser evaluados y comparados con objeto de tomar las mejores decisiones asociadas a la situación concreta. (Fabozzi, 2007)



Por último dentro de esta fase conviene destacar la teoría Delta-ETV, es una combinación de la teoría de valores extremos y la Metodología Delta. En la metodología Delta se plantea un modelo para la gestión de ORM en el que se asocia las ganancias de la entidad a determinados factores causales. Esta metodología tiene la cualidad de asociar dichos factores causales a diferentes unidades de negocio, con lo que es útil en el ámbito de ORM. Llevan a cabo la clasificación de pérdidas fijando un límite de pérdidas máximo. Las pérdidas por debajo del límite, serán tratadas siguiendo metodología Delta, mientras que las consideradas grandes pérdidas serán tratadas según la teoría de valores extremos (King, 2001).

e. Determinación de los indicadores de riesgo, KRI (Key Risk Indicators)

Los KRI son parámetros o indicadores que van a permitir predecir los cambios en el perfil de riesgos de la compañía de seguros y van a permitir llevar a cabo las adecuadas correcciones favoreciendo el proceso de realimentación y control.

Los componentes de un KRI deben estar constituidos por una determinada variable de riesgo a controlar, una unidad de medida y un intervalo que permita mostrar la posición de alarma o no frente a un determinado riesgo. Para todo ello será básico un adecuado reporting de los riesgos con el objetivo de medir, controlar y solucionar posibles desviaciones en los márgenes fijados.

Los indicadores de riesgo pueden ser clasificados en dos categorías:

- Indicadores específicos que son aquellos asociados directamente con un proceso dentro de un área de actividad en concreto.
- Indicadores generales aquellos que afectan a la entidad en su conjunto y se refleja por ejemplo en el volumen de negocio.

Para la construcción de un indicador de riesgo se puede partir de datos históricos de pérdidas operacionales, resultados obtenidos de procesos de autoevaluación de riesgos o de auditorías internas o externas entre otras opciones.



Fuente: SAS Business Intelligence

f. Planes de acción: Un plan de acción describe las responsabilidades y acciones que la compañía de seguros debería desarrollar en relación a los riesgos a los que está expuesta. Consiste principalmente en las siguientes medidas:

- Reducir: Para ello la entidad podrá optar por la reducción de la frecuencia de la pérdida o/y intensidad de la misma.
- Evitarlo estableciendo las medidas necesarias para reducir la ocurrencia del mismo, llevando a cabo una óptima prevención y reduciendo su frecuencia a cero.
- Retener: Respecto a los tipos de retenciones destacamos la total o la parcial. La retención total está basada en la reposición del valor intrínseco de la pérdida producida. Por ello la entidad aseguradora asumirá las posibles pérdidas imputando dichas pérdidas directamente a la cuenta de resultados, provisión contable, establecimiento de una o varias líneas de crédito, establecimiento un fondo interno o externo a la empresa. Respecto a la retención parcial o transferencia se puede acudir directamente al reaseguro con las diferentes modalidades que éste ofrece.

- e. Stress testing y escenarios test: Permiten a la organización comprender mejor sus riesgos y poder actuar en situaciones potenciales extremas. El stress testing hace referencia a la variación o cambio de los parámetros individuales que pueden afectar a la posición financiera de la entidad, por ejemplo alta rotación en los empleados.

Respecto al escenario test hace referencia a el rango que el citado parámetro puede variar. El escenario test examina el impacto financiero u operacional de una catástrofe o evento extremo en la entidad, como por ejemplo, la malversación de fondos de la empresa que provoque incluso una pérdida reputacional de la entidad.

Es importante desarrollar estas medidas ya que permiten llevar a cabo una evaluación del impacto financiero y no financiero asociado a elevadas pérdidas no esperadas pero posibles. Ayudan a determinar el perfil de riesgo global de toda la organización facilitando la determinación del apetito de la entidad respecto al riesgo. Es un input adicional para el cálculo de los requerimientos de capital económico.

Será necesario llevarlo a cabo en un horizonte temporal de un año una identificación realista antes circunstancias adversas, así como estimar los recursos financieros que necesitaría la entidad ante estos eventos

Y por último para cerrar este apartado, se va comentar las líneas generales de un plan director para la implantación del proceso ORM en el marco de Solvencia II.

En plan director se dividirá en tres fases, una primera introductoria centrada en el modelo estándar en la construcción del marco general, una segunda centrada en la implementación y el desarrollo de modelos internos y una última orientada a un enfoque avanzado y dinámico.

El proceso ORM va a estar localizado principalmente en el Pilar II, aunque será necesario que la información obtenida a raíz del mis-

mo sea utilizada en los modelos internos y en el cálculo del capital económico.

En la primera fase del Pilar II haciendo referencia al ORM serán establecidos los objetivos, estrategias, asignación de responsabilidades, estudio de las relaciones causa-efecto y en donde la dinámica de sistemas tendrá una especial relevancia. Para todo ello la entidad analizará sus procesos y procedimientos de forma detallada las posibles fuentes de riesgo. Se construirá en mapa de riesgos inherente o puro y fijados o analizados los controles existentes se procederá a la obtención del mapa de riesgos residual. En esta primera fase se habrá determinado la política de retención y transferencia de la entidad frente al riesgo.

Respecto a la fase segunda correspondiente al Pilar II, se finalizará el diseño del proceso ORM y se comenzarán a aplicar modelos avanzados para la gestión y cuantificación del riesgo operacional, stress testing, planes de continuidad de negocio, gobierno corporativo. En la tercera fase del Pilar III el proceso ORM es ejecutado, y se concentra el modelo general en la creación de valor y la optimización de la política de reaseguro.

#### **4. CONCLUSIONES Y VISIÓN GENERAL DE LA GESTIÓN DEL RIESGO OPERACIONAL FRENTE A SOLVENCIA II**

En el presente artículo se ha intentado plasmar un marco ampliado y dinámico para la gestión y cuantificación del riesgo operacional frente al reto de Solvencia II. Una de las principales aportaciones es la inclusión de la dinámica de sistemas y la metodología Delta-EVT para desarrollar un ORM efectivo. La aplicación de la dinámica de sistemas incrementará la transparencia del proceso de negocio detectando nuevos aspectos o puntos de vista sobre él y permitirá integrar el riesgo operacional con aspectos como riesgo de crédito y de mercado. Por otra parte, la metodología Delta-ETV permitirá una desarrollar un proceso claro de relación entre las ganancias y los factores de causales (teniendo en cuenta los riesgos) que minoren dichas ganancias provocando pérdidas.

Por otra parte, se ha prestado un especial interés sobre la recogida de datos de pérdidas operacionales, destacando la importancia de una adecuada categorización de datos basada en el criterio causa-evento.

Se ha intentado plasmar de forma clara los componentes y pasos para la creación de KRIs efectivos que insertados dentro del sistema puedan establecer las diferentes alertas y favorecer el establecimiento de medidas correspondientes a dicho proceso ORM.

Por otra parte, los riesgos operacionales abarcan una tremenda diversidad de tipos de riesgo cuya cuantificación no resulta fácil. La escasez de datos es una característica fundamental. La confección de una base de datos de mantenimiento permanente es un requisito ineludible del subsistema de información. En ella habrá datos de captación interna, como se ha comentado, pero también, por su escasez, habrá que recurrir a datos externos, como ORIC (sectoriales, por ejemplo los fraudes, los robos, etc.)

Asociado a este problema, las compañías están teniendo problemas a la hora de extraer la información asociada al riesgo operacional ya que no tienen un por no tienen un data mart único sino diferentes extracciones del operacional para diferentes aplicaciones de nicho (siniestros, actuarial, comercial) etc. Por lo que uno de los ejes en los que hay que enfatizar son la integración y la construcción de un repositorio único de información. Las compañías tienen muy definidos mapas de riesgos y procesos de auditoría pero algunas les falta un circuito efectivo, con lo que la aplicación del enfoque sistémico ayudara en dicho proceso

Para terminar, se concluye que existe una clara necesidad de un sistema de IT que permita un gestión integral de riesgos que permita el establecimiento de controles efectivos que van a ser imprescindibles para el cumplimiento del Pilar II.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CEA, Solvency Assessment Models Compared, essential groundwork for the Solvency II, 2005

CEIOPS, Lesson learned from the crisis, Solvency II and beyond, 2009

CEIOPS, Processing Quantitative Impact Study 4 groups resultant an EU level, Operational Risk Questionnaire, 2008

Fabozzi Chernobai, Svetlozar, Operational Risk. A guide to Basel II Capital Requirements, Models and Analysis. New Jersey: WILEY FINANCE, 2007

King, Jack.L Operational Risk. West Sussex: WILEY & SONS, 2001

Klugman, S. A. Panjer H. A. Willmot, G. E., Loss Models – From Data To Decisions, New York: WILEY & SONS, 1998

Real Decreto 1318/2008 de 24 julio modificación del ROSSP

Shah, S. Operational Risk Management. Casualty Actuarial Society, Tillinghast-Towers Perrin, San Francisco, 2001

Shimpi, P, Integrating Corporate Risk Management, New York: TEXERE, London, 2001

Sterman, John, Business Dynamics, Cambridge: Irvin- Mc Graw-Hill, 2000

### Web Pages:

[http://ec.europa.eu/internal\\_market/insurance/solvency/index\\_en.htm](http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/solvency/index_en.htm)

<http://www.ceiops.org/>

<http://www.actuaries.org/index.cfm?DSP=MENU&ACT=HOME&LANG=EN>

<http://www.sas.com/offices/europe/uk/solutions/riskmgmt/pdf/oric.pdf>

<http://www.iasb.org/Home.htm>

<http://www.sas.com>

## **IV. DEPENDENCIA Y ENVEJECIMIENTO**



## Ponencia 32

### **ANÁLISIS POR COMUNIDADES AUTÓNOMAS DE LA POBLACIÓN INMIGRANTE QUE COTIZA EN 2005 AL SISTEMA DE PENSIONES ESPAÑOL**

J.E. Devesa, M.M. Devesa, I. Domínguez, B. Encinas, y R. Meneu

El objetivo de este trabajo es doble: por un lado describir la estructura de la población inmigrante que cotiza al sistema público de pensiones español, según la información recogida en la Muestra Continua de Vidas Laborales, en términos de procedencia, edad actual, sexo, edad de entrada en el sistema, días cotizados y bases de cotización. Por otro lado, analizar en términos de tanto interno de rendimiento la relación entre las cotizaciones y prestaciones que, respectivamente, aportan y percibirán, del sistema de pensiones público español, la población inmigrante. El resultado del tanto interno de rendimiento del sistema actual para la población inmigrante nos permitirá estudiar la solvencia financiero-actuarial del subsistema de inmigrantes en términos de Samuelson-Aaron y su comparación con el sistema público de pensiones en su conjunto. Los resultados se muestran desagregados por Comunidades Autónomas.

## **INTRODUCCIÓN**

Múltiples son los estudios sobre inmigración, como muestran los autores Díez y Ramírez (2001) y Bardají (2006) en “Literatura sobre inmigrantes en España” donde se recoge, en más de 350 páginas, la bibliografía referente a inmigración en España desde los años 80, agrupándola en apartados tan distintos como vivienda, salud, trabajo,

economía, derecho, demografía, racismo y un largo etcétera, en un intento de agrupar la enorme diversidad de textos, teorías y metodologías que conviven en el estudio de la inmigración.

Diversos autores, León (2004), Carrasco y Ortega (2005), Feldstein (2006), Izquierdo y Jimeno (2005), Conde, Jimeno y Valera (2008), Domínguez y Encinas (2008), analizan el efecto de la inmigración sobre el sistema público de pensiones español, confirmando que los inmigrantes se benefician de la redistribución intrageneracional que contienen las fórmulas de cálculo de la pensión actualmente vigentes. Dicha redistribución es tan fuerte que en términos de valor actual, los inmigrantes empeoran la solvencia del sistema español de pensiones contributivas. Ello no contradice que la inmigración mejore los flujos de caja en una fase inicial, ni que una inmigración masiva postergue los problemas financieros, pero no se hace cargo de las consecuencias financieras completas, ni de las demás consecuencias sociales de la inmigración masiva. En suma, un aumento de los flujos migratorios no es capaz de añadir los suficientes recursos para evitar el deterioro financiero-actuarial previsto por los demás estudios, sobre todo, si no se aborda el problema fundamental del sistema de pensiones contributivo: la mala relación actuarial entre pensiones y cotizaciones que provoca que el coste de ventas (pensiones) sea superior al precio de venta (cotizaciones).

Varios son también los trabajos que analizan la inmigración a nivel autonómico, Pajares (2008), García y Sánchez, (2005), Caparrós y otros (2008) así como aquellos que recogen indicadores autonómicos como los que publican las Cámaras de Comercio (2006), o el propio Ministerio de Trabajo e Inmigración.

Hasta el momento, la mayoría de los trabajos sobre pensiones han sido realizados con simulaciones, estimaciones y datos “virtuales” sobre las cotizaciones y pensiones de la población española, puesto que los datos sobre historias laborales individuales no estaban disponibles para los investigadores externos al Instituto Nacional de la Seguridad Social. Con la publicación por parte del Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales de, la esperada por muchos, Muestra Continua de

Vidas Laborales (en adelante MCVL), se pone a disposición de los investigadores las trayectorias laborales de más de un millón de personas anónimas de la población española. Esta muestra va a permitir evaluar y analizar la influencia de la inmigración en el sistema de pensiones, presente y futuro, desde una óptica que hasta este momento era impensable.

El Reglamento de desarrollo de la Ley de Extranjería, aprobado el 30 de diciembre de 2004, supone la apertura de un proceso extraordinario de regularización de inmigrantes sin precedentes. La MCVL 2005 permite analizar tanto a los inmigrantes anteriores a este proceso de regularización, como a los que se integraron en el sistema entre el 7 de febrero y 7 de mayo de 2005 acogándose al proceso de normalización documental de trabajadores extranjeros puesto en marcha por dicha ley.

El trabajo que se presenta supone una ampliación del llevado a cabo por Domínguez y Encinas (2008). La metodología que se aplicará es la misma, siendo su principal aportación que, en este caso, el análisis se presenta desagregado por Comunidades Autónomas. En este trabajo se realiza un análisis dinámico de la inmigración, teniendo en cuenta tanto el flujo de cotizaciones como de prestaciones futuras, y considerando no sólo el número de individuos sino la estructura de sus cotizaciones al sistema público de pensiones de jubilación de la Seguridad Social. Una vez calculados estos flujos se analiza el rendimiento entre las cotizaciones y pensiones esperadas. Con el análisis del tanto interno de rendimiento (en adelante TIR) se valora y evalúa el efecto de la inmigración en el sistema público de pensiones de jubilación español. Se determina si el TIR de la población inmigrante, cotizante en 2005, supera o no el crecimiento de su base fiscal. Los resultados obtenidos nos permitirán concluir si la inmigración solventa o alivia el problema de las pensiones o si por el contrario generará, en el futuro, un mayor déficit en el sistema. Los resultados serán desagregados por Comunidades Autónomas.

La estructura del trabajo es la siguiente: Tras esta introducción, se muestra un análisis descriptivo de los principales parámetros de la

población inmigrante que cotiza en el 2005 al sistema público de pensiones español, en base a la submuestra obtenida de la MCVL 2005 y desagregada por Comunidades Autónomas. En un segundo epígrafe se exponen los cálculos y las hipótesis a tener en cuenta para calcular las pensiones que percibirán, llegada la edad de jubilación, esta población. En el tercer epígrafe se describen los conceptos y metodología para analizar la solvencia y viabilidad financiera de un sistema de pensiones. A continuación, en el cuarto epígrafe, se calcula el TIR obtenido por la población objeto de análisis. Finaliza el trabajo con las principales conclusiones obtenidas, junto con las referencias bibliográficas.

## **1. POBLACIÓN INMIGRANTE QUE COTIZA AL SISTEMA PÚBLICO DE PENSIONES DE JUBILACIÓN ESPAÑOL POR COMUNIDADES AUTÓNOMAS, SEGÚN LA MCVL 2005**

Como ya se ha indicado en la introducción, son múltiples los trabajos que analizan la inmigración, asimismo también son muchas las estadísticas descriptivas que existen sobre este colectivo en relación a su procedencia, sexo y edad (como son el Anuario Estadístico de Inmigración elaborado por el Ministerio de Trabajo e Inmigración y las publicaciones del INE: el Censo de Población y Viviendas y el Padrón Municipal de Habitantes). Pero no es hasta que se publica la MCVL cuando se van a conocer variables tales como la edad de entrada en el sistema de Seguridad Social, bases de cotización, días cotizados cada año y régimen de cotización<sup>150</sup>.

Para realizar este trabajo se utilizará la MCVL 2005<sup>151</sup>, ya que ello permitirá analizar las diferencias existentes entre la población inmigrante que estaba en el sistema con anterioridad al proceso de regularización de 2005 y la que entró beneficiándose de éste, todo ello desagregado por Comunidades Autónomas (CC.AA).

<sup>150</sup> Para un análisis detallado de la MCVL consultar Durán y Sevilla (2006) y el Monográfico "Mercado de Trabajo. Muestra Continua de Vidas Laborales" publicado por la Revista de Economía Aplicada en su número extraordinario del año 2008.

<sup>151</sup> Hasta el momento se han realizado cuatro ediciones de la MCVL con información referente al año 2004, 2005, 2006 y 2007.

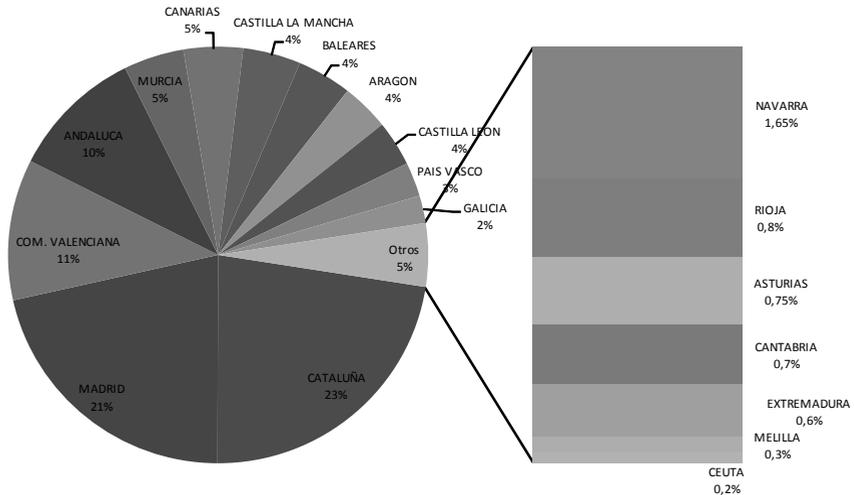
La MCVL 2005 ofrece información sobre el colectivo de inmigrantes que a lo largo del año 2005 tuvieron alguna relación, como cotizantes o pensionistas, con la Seguridad Social. Sin embargo, no todos ellos han sido considerados en este trabajo. En efecto, a partir del total de inmigrantes incluidos en la MCVL 2005 se han aplicado una serie de filtros para depurar la muestra, eliminando aquellos individuos que en ese mismo año perciben una pensión contributiva, los que han fallecido, los que figuran sin fecha de nacimiento, los menores de 16 años y los que tienen bases de cotización incongruentes. La submuestra obtenida, que se analiza a continuación, está compuesta por un total de 77.745 individuos.

Hay inmigrantes que han obtenido la nacionalidad española, pero en este trabajo únicamente se analiza a los inmigrantes con nacionalidad diferente a la española. Dentro de los inmigrantes, se distinguen dos grupos, aquellos que proceden de países con un Índice de Desarrollo Humano superior al español, como son Estados Unidos, Canadá y los países que integraban la Europa de los 15, que son denominados inmigrantes no económicos, y los del resto del mundo que se califican como inmigrantes de carácter económico [(Carrasco, (1999), Cebrián y otros, (2007)].

En el gráfico 1, se muestra la población inmigrante que cotiza al sistema de Seguridad Social español por Comunidades Autónomas. Como puede apreciarse las Comunidades de Cataluña, Madrid, Andalucía y Valencia son las que captan mayor porcentaje de inmigración, un 65% del total. Comunidades como Navarra, La Rioja, Asturias, Cantabria, Extremadura, Ceuta y Melilla tienen una participación mínima.

## Gráfico 1

Distribución de la población inmigrante que cotiza en 2005 por Comunidades Autónomas

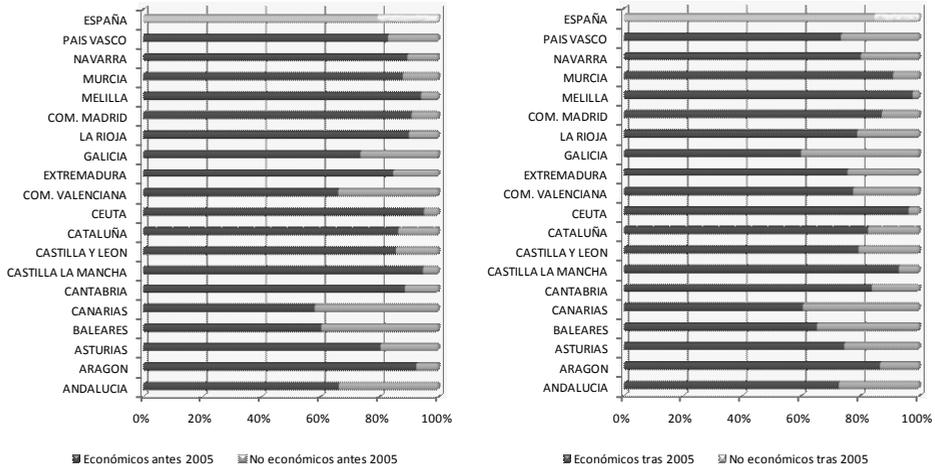


Fuente. Elaboración propia a partir de datos de la MCVL 2005

En el gráfico 2, se muestra la población inmigrante, por razones económicas y no económicas, antes y después de la regularización de 2005 para toda España y por Comunidades Autónomas. Como puede observarse, en todos los casos el mayor porcentaje de inmigrantes es por razones económicas, el 84,57% de los regularizados en 2005 y 79,27% de los que estaban en el sistema con anterioridad. A nivel autonómico Canarias, Baleares y Andalucía son las comunidades que tienen el menor porcentaje de estos inmigrantes.

## Gráfico 2

Distribución de la población inmigrante que cotiza en 2005, en España y por CC.AA., en función de su origen y según el período de entrada



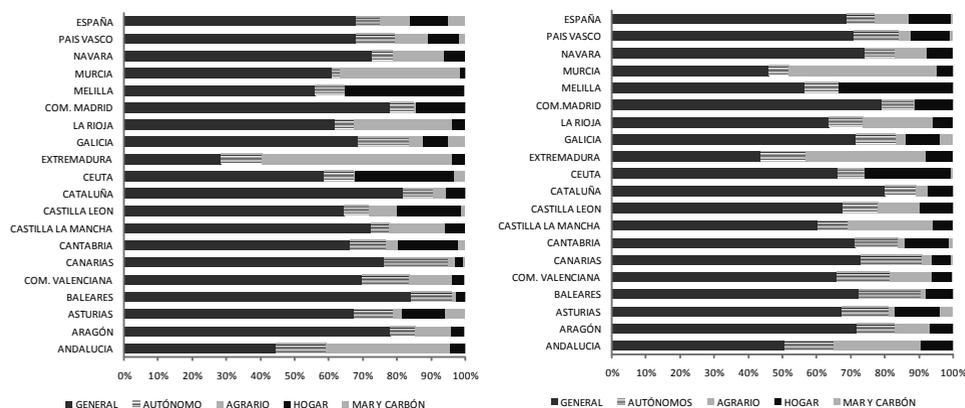
Fuente. Elaboración propia a partir de datos de la MCVL 2005

En relación a los regímenes de la Seguridad Social, el gráfico 3 muestra la distribución de la población inmigrante, anterior y posterior al proceso de regularización de 2005, por regímenes de afiliación para toda España y para cada una de las Comunidades Autónomas. En España, los inmigrantes concentran el mayor número de cotizaciones en el Régimen General, seguidos por el Régimen Agrario, Empleado de Hogar, Autónomos, Mar y Carbón. En todas las comunidades se observa un mayor número de afiliados en el Régimen General. En algunas, como Extremadura, Andalucía y Murcia, el Régimen Agrario tiene un peso considerable, claramente diferenciado sobre los demás (Hogar, Autónomos, Mar y Carbón). Aquellos inmigrantes que se acogen al proceso extraordinario de regularización hacen que se incremente de forma significativa el número de cotizantes en el Régimen del Hogar en el total de España y en todas las comunidades, excepto en Madrid, Cantabria, Castilla León, Ceuta y Melilla. También, se ha incrementado el porcentaje de participación del Régimen de Autónomos excepto en Canarias, Ceuta y Galicia. El porcentaje del Régimen Agrario se reduce en todas las comunidades salvo Murcia. El mayor

incremento en peso porcentual del Régimen General, tras la regularización, se produce en Extremadura, seguido por Ceuta y Andalucía. En Cataluña y en la Comunidad Valenciana la estructura es muy similar antes y después de la regularización.

**Gráfico 3**

Distribución por régimen de afiliación de la población inmigrante que cotiza en 2005, en España y por CC. AA. y según el período de entrada<sup>152</sup>.



Fuente. Elaboración propia a partir de datos de la MCVL 2005

Además del régimen al que pertenece la población inmigrante que cotiza a la Seguridad Social, otra información relevante es conocer a qué edad entran en el sistema. En el gráfico 4 se muestra la edad de entrada de los inmigrantes, como cotizantes del sistema de Seguridad Social, por Comunidades Autónomas. Los resultados se presentan desagregados en función de que el inmigrante estuviera en el sistema con anterioridad a 2005 o entrara en virtud del proceso extraordinario de regularización. La edad promedio de entrada, para aquellos que estaban en el sistema con anterioridad a 2005, era en torno a los 29 años, resultando ligeramente superior para los inmigrantes que se incorporan al sistema después del proceso de regularización, cuya edad de entrada es de 31,5 años. Las Comunidades Autónomas con

<sup>152</sup> El gráfico de la izquierda analiza la población inmigrante que estaba en el sistema con anterioridad a la regularización y el gráfico de la derecha la población inmigrante tras la regularización.



ese mismo año, hace que los inmigrantes regularizados en 2005 no puedan cotizar el año natural completo, y ello conlleva que se utilice la variable “duración relativa”. Esta variable consiste, Cebrián y otros (2007), en dividir la duración efectivamente observada entre la duración máxima posible, como se muestra en la siguiente formulación.

$$DR_x = \frac{DO_x}{DMP_x} \quad [1]$$

Siendo:

$DR_x$ : Duración relativa en el año  $x$ .

$DO_x$ : Duración observada en el año  $x$ .

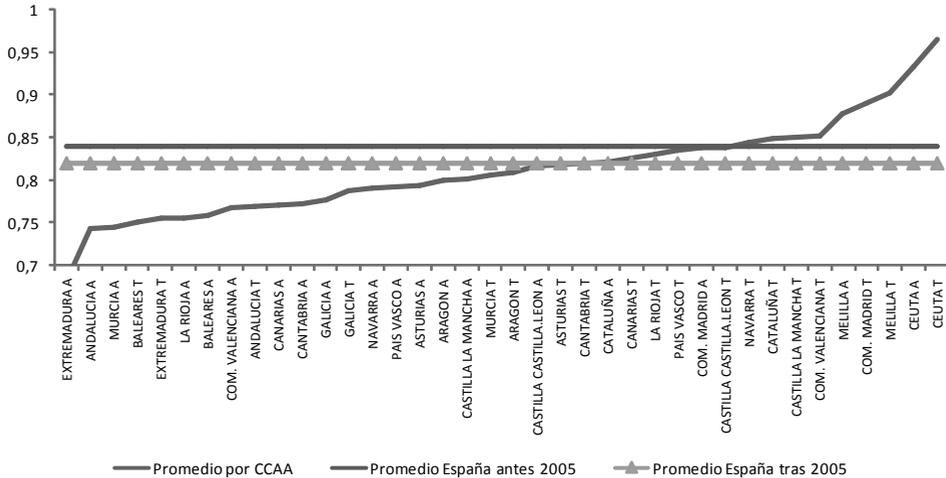
$DMP_x$ : Duración máxima posible en el año  $x$ .

$\forall x > 2005 \quad DMP_x = 365$ .

Así, por ejemplo, un inmigrante que acceda al sistema, tras el proceso de normalización documental de trabajadores extranjeros, el 1 de mayo de 2005 y permanezca en el sistema, ininterrumpidamente, hasta el 31 de diciembre de 2005, tendrá una duración relativa de 1 aunque su duración observada, en 2005, sea inferior a 365 días. Para los años posteriores al 2005, la duración máxima posible en el sistema será de 365 días y, por lo tanto, solo tendrán duración relativa igual a la unidad aquellos que efectivamente estén en alta, o en situaciones asimiladas al alta, durante el año completo, y por tanto tenga una duración observada de 365 días. El gráfico 5 muestra, de menor a mayor, la duración relativa promedio de cada CC. AA. Los inmigrantes que residen en Extremadura, Andalucía y Murcia son los que menos tiempo cotizan en el año al sistema, tanto antes como tras la regularización. Por el contrario, los afincados en Ceuta, Melilla, Cataluña y Madrid son los que tienen duraciones relativas mayores. No obstante, en todos los casos el tiempo de cotización es claramente inferior al año.

### Gráfico 5

Duración relativa de la población inmigrante que cotiza en 2005, para España y por CC. AA<sup>5</sup>, y según el período de entrada



Fuente. Elaboración propia a partir de datos de la MCVL 2005

Si se analiza de forma conjunta la información sobre la edad de entrada y la duración relativa, se puede concluir que, por término medio y aún cuando el cotizante se jubile con 65 años, si se mantiene su estructura de cotizaciones pasada, no alcanzará el número de años cotizados necesarios (35) para obtener el 100% de su base reguladora como pensión<sup>155</sup>. Los inmigrantes afincados en Melilla y Ceuta lograrán unas carreras laborales de 33 y 31 años respectivamente. Los residentes en Valencia, Madrid y Cataluña cotizarán durante 28 años, mientras que los de Andalucía y Extremadura tendrán carreras laborales de 24 y 23 años, respectivamente.

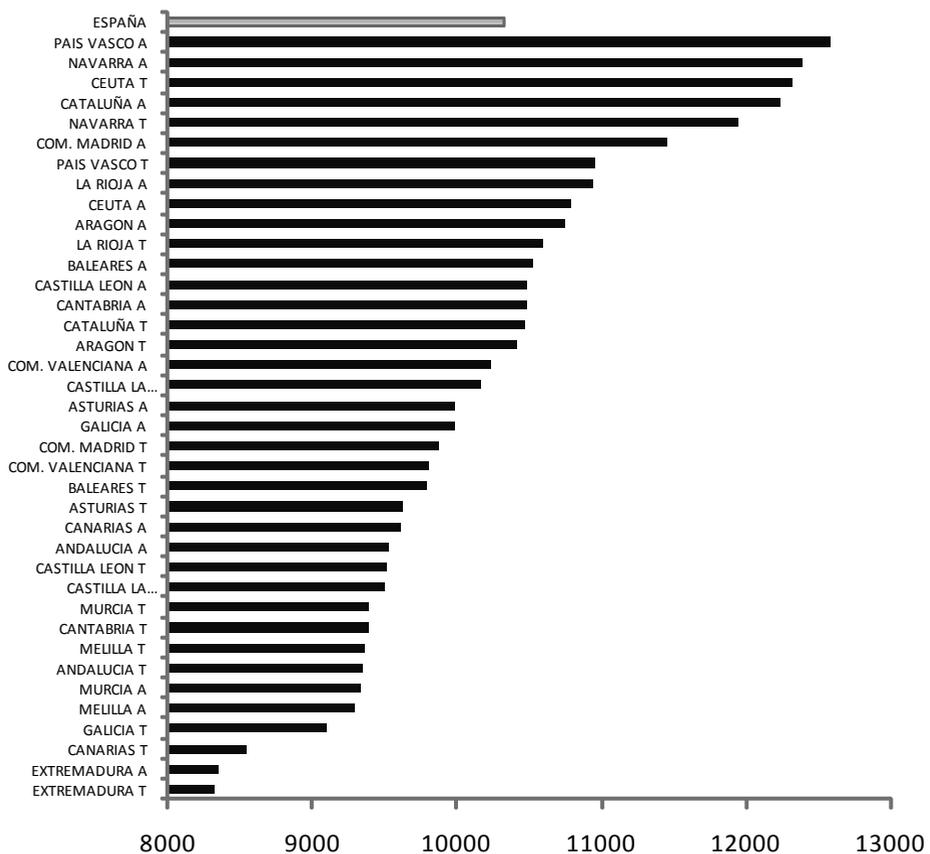
Otra información necesaria a la hora de analizar la contribución de los inmigrantes al sistema, es su base de cotización. La base de cotización anual promedio, de los inmigrantes que cotizan en 2005, según MCVL 2005, es de 10.030 euros. En el gráfico 6 se muestra la base anual promedio, tanto para el total de inmigrantes del territorio español

<sup>155</sup> Es posible que la estructura futura de cotizaciones sea muy diferente de la pasada. Además, si la fórmula para el cálculo de la pensión inicial estuviera bien diseñada, sería indiferente el número de años cotizados, en términos de TIR.

como desagregado por CC. AA. y en función al momento de entrada en el sistema. Como puede comprobarse las comunidades del País Vasco, Cataluña, Navarra, Ceuta y Madrid son las que tienen unas bases de cotización superiores, mientras que las menores se dan en Andalucía, Galicia y Extremadura.

### Gráfico 6

Base de cotización promedio anual, de la población inmigrante que cotiza en 2005, para el total de España y por CC. AA<sup>5</sup> y según el periodo de entrada



Fuente. Elaboración propia a partir de datos de la MCVL 2005

Los datos analizados, aún cuando muestran una edad de entrada promedio en el sistema que permitiría tener carreras de cotización promedio de 35 años, sugieren que una parte importante de la población inmigrante no cotizará el tiempo suficiente para percibir una pensión contributiva, que es de 15 años. Esta conclusión está justificada por la duración relativa de las cotizaciones realizadas, que está lejos de ser el año completo. Esta observación se ratifica y reafirma para el caso de los inmigrantes que se acogen al proceso de regularización extraordinario de 2005. Se podría pensar que aquellos individuos que cotizan, pero que no lo hacen durante el tiempo suficiente, se marcharán del sistema y renunciarán a su pensión, pero teniendo en cuenta que los inmigrantes son racionales es ingenuo pensar que adopten esa decisión, sobre todo cuando los europeos tienen garantizado el cobro de la pensión por la Unión Europea y la mayoría de los países latinoamericanos tienen convenios de Seguridad Social que permiten el cómputo recíproco de cotizaciones a efectos del reconocimiento de prestaciones. No obstante, la mejor forma de contrastar estas observaciones, es profundizar en el estudio y analizar el flujo de cotizaciones y prestaciones previsto de esta población.

En el siguiente epígrafe se calculan las prestaciones de jubilación que percibirán los inmigrantes que cotizan en 2005, según la legislación actual, en el territorio de España y desagregados por Comunidades Autónomas.

## **2. PENSIONES DE JUBILACIÓN DE LA POBLACIÓN INMIGRANTE QUE COTIZA EN 2005 POR COMUNIDADES AUTÓNOMAS**

Las hipótesis de trabajo que se han considerado para obtener la cuantía de las pensiones futuras de la población inmigrante, que cotiza en 2005, han sido las siguientes:

1. Se ha trabajado con la población inmigrante que ha cotizado al Sistema de Seguridad Social durante el año 2005 según la información recogida en la MCVL 2005.

2. Se han utilizado las historias laborales de estos trabajadores, en virtud de las cuales se han obtenido sus bases de cotización desde su edad de entrada en el sistema hasta su edad en el 2005. A partir de este dato, se ha proyectado, para cada uno de los trabajadores, las bases de cotización hasta la edad de jubilación de 65 años, edad que se ha supuesto igual para todos los trabajadores. La edad de jubilación de 65 años es una hipótesis de trabajo optimista, puesto que la edad promedio de jubilación de la población española se sitúa en los 62 años.
3. Tipo de cotización: Se utiliza un tipo de cotización para la contingencia de jubilación, en base a los datos obtenidos de los gastos destinados a esta contingencia en los presupuestos de la Seguridad Social 2005, según el Boletín de Estadísticas Laborales. Se ha supuesto constante para todo el período de cálculo<sup>156</sup>.
4. Se ha trabajado con las cuantías de base de cotización máxima y mínima, así como de pensión contributiva mínima y máxima y la pensión no contributiva de 2005. Para cada uno de los inmigrantes cotizantes en 2005, según la MCVL 2005, se calcula la primera pensión de jubilación, según las reglas del sistema actual de pensiones<sup>157</sup>.
5. Para realizar las proyecciones futuras de las bases de cotización se ha utilizado el Índice de Revalorización Salarial y el Índice de Precios al Consumo (para la base de cotización mínima y máxima) que se proyecta en el trabajo de Alonso y Herce (2003)<sup>158</sup>. Estos

---

<sup>156</sup> Como se recoge en Devesa y Devesa (2007), dada la complejidad y las continuas modificaciones legales que sufrió el sistema de Seguridad Social entre los años 1959 y 2004, la reconstrucción de los tipos de cotización y de las bases de cotización pasados es una tarea casi imposible. Sin embargo, la utilización de un tipo de cotización constante (28,30% en el Régimen General, para contingencias comunes), puede interpretarse como el tipo de cotización de equilibrio del sistema de pensiones español. No obstante, los inmigrantes que aparecen en la MCVL 2005, tienen unas historias laborales medias de 4 años, con lo que los cambios en la tasa de cotización no les afectan.

<sup>157</sup> Disponibles en [www.seguridadsocial.es](http://www.seguridadsocial.es).

<sup>158</sup> Las proyecciones de Alonso y Herce (2003) son para toda la población española. Se han utilizado estas previsiones, aún intuyendo que el crecimiento de estas variables macroeconómicas será menor, para el caso de la población inmigrante, ante la falta de estas proyecciones para la submuestra analizada.

autores trabajan con la hipótesis de que la tasa de crecimiento de los salarios reales es coincidente con la productividad, que suponen aumenta progresivamente hasta situarse en el 2% en 2020 de forma permanente. El crecimiento de los precios se ha supuesto que descenderá gradualmente hasta el 2,5 por ciento en 2010 para mantenerse en este nivel hasta el final de la proyección. Estas hipótesis pueden calificarse de optimistas, por lo que habrá de tenerse en cuenta que las conclusiones obtenidas en el trabajo se realizan con supuestos optimistas en relación al crecimiento de la economía.

6. Se ha considerado que la duración relativa, desde el año 2005 hasta la edad de jubilación, es la duración relativa observada en 2005.
7. En relación al incremento de las bases de cotización se ha utilizado el Índice de Revalorización Salarial que se proyecta en el trabajo de Alonso y Herce (2003).

La Seguridad Social concede dos tipos de pensiones de jubilación, las pensiones contributivas y las no contributivas<sup>159</sup>. Estas últimas se financian, a partir del año 2000, con cargo a impuestos generales como aplicación del Pacto de Toledo sobre pensiones de 1995. Por tanto, este tipo de pensiones no afectarán a la solvencia del sistema de pensiones, puesto que no suponen un gasto para él. Únicamente se considerarán en este trabajo el número de pensiones no contributivas que previsiblemente percibirá la población objeto de estudio, sin entrar en mayor detalle sobre las mismas. Dentro de las pensiones contributivas, se garantizan cuantías mínimas mensuales, que variarán en función de que el pensionista haya cumplido determinada edad y de que tenga o no familiares a su cargo, siempre que no supere el límite de ingresos establecido<sup>160</sup>. Las cotizaciones sociales, del total de la población, han pasado de financiar el 97,37% del gasto en com-

---

<sup>159</sup> Puede solicitar una pensión de jubilación “no contributiva” toda persona de más de 65 años de edad que reúna los siguientes requisitos: a) Haber residido en España durante diez años, entre la edad de 16 y 65 años. De ellos obligatoriamente los dos últimos con relación a la fecha de solicitud de la pensión. b) Demostrar insuficiencia de recursos con arreglo a un baremo variable, que contempla diversas situaciones, dependiendo si vive sólo o con su cónyuge o con descendientes en primer grado (hijos).

<sup>160</sup> En este trabajo se ha considerado edad de 65 años, con familiares a cargo.

plemento a mínimos en el año 1997, al 85,33% en 2003 y al 72,07% en el año 2005. Además, según los compromisos del Pacto de Toledo, esta disminución seguirá aplicándose hasta que todo sea financiado por los impuestos generales (Devesa, 2007). Esto supone que, en el futuro, las pensiones con complemento a mínimos afectarán al sistema impositivo general y no al sistema de Seguridad Social. Con todo esto, y aun cuando en este trabajo se analizan los dos tipos de pensiones contributivas, las que realmente afectarán a la solvencia del sistema de Seguridad Social serán las pensiones contributivas sin complementos a mínimos.

Como se muestra en la tabla 1, el número de pensiones no contributivas de la población inmigrante que cotiza en 2005 supone cerca de un 18% de las pensiones para el total de España. Los inmigrantes afincados en las Comunidades de Extremadura, Andalucía y Baleares son los que mayores porcentajes de pensiones no contributivas percibirán, si se cumplen las hipótesis de trabajo consideradas. El porcentaje de pensiones no contributivas disminuye en el caso de los inmigrantes que entran en el sistema tras el proceso extraordinario de regularización de 2005. Los que cotizan en las regiones de Canarias, Melilla y Extremadura son los que perciben mayor porcentaje de pensiones contributivas complementadas con mínimos. También en este caso se observa una disminución en el porcentaje para aquellos que entran en el sistema tras la regularización. Cataluña, Madrid, Ceuta y Castilla la Mancha son las comunidades con mayor porcentaje de pensiones contributivas sin complemento a mínimos. Estos porcentajes se incrementan en aquellos inmigrantes que entran tras el proceso de regularización.

**Tabla 1**

Tipo de pensión que generará la población inmigrante que cotiza en 2005, para España y por CC. AA. y según el período de entrada

		Contributivas		No contributivas
		Complemento a mínimos	Sin complemento a mínimos	
ANDALUCIA	Antes 2005	9,20%	65,71%	25,09%
ANDALUCIA	Tras 2005	8,15%	68,62%	23,23%
ARAGON	Antes 2005	6,29%	76,12%	17,59%
ARAGON	Tras 2005	6,03%	77,01%	16,96%
ASTURIAS	Antes 2005	6,54%	73,84%	19,62%
ASTURIAS	Tras 2005	3,76%	77,44%	18,80%
BALEARES	Antes 2005	7,15%	71,92%	20,93%
BALEARES	Tras 2005	6,56%	72,25%	21,19%
CANARIAS	Antes 2005	10,80%	68,21%	20,99%
CANARIAS	Tras 2005	7,35%	73,00%	19,66%
CANTABRIA	Antes 2005	6,72%	75,89%	17,39%
CANTABRIA	Tras 2005	5,17%	79,31%	15,52%
CASTILLA LA MANCHA	Antes 2005	8,11%	73,48%	18,41%
CASTILLA LA MANCHA	Tras 2005	3,56%	80,83%	15,61%
CASTILLA LEON	Antes 2005	6,44%	77,31%	16,25%
CASTILLA LEON	Tras 2005	3,72%	81,51%	14,77%
CATALUÑA	Antes 2005	5,06%	79,91%	15,03%
CATALUÑA	Tras 2005	4,44%	80,68%	14,89%
CEUTA	Antes 2005	9,38%	87,50%	3,13%
CEUTA	Tras 2005	3,00%	91,00%	6,00%
COM. MADRID	Antes 2005	7,05%	78,14%	14,81%
COM. MADRID	Tras 2005	6,16%	82,46%	11,38%
COM. VALENCIA	Antes 2005	7,78%	70,44%	21,78%
COM. VALENCIA	Tras 2005	5,80%	78,37%	15,83%
EXTREMADURA	Antes 2005	11,29%	53,23%	35,48%
EXTREMADURA	Tras 2005	3,09%	69,07%	27,84%
GALICIA	Antes 2005	7,53%	72,29%	20,18%
GALICIA	Tras 2005	5,77%	70,05%	24,18%
LA RIOJA	Antes 2005	2,35%	74,78%	22,87%
LA RIOJA	Tras 2005	3,14%	80,10%	16,75%
MELILLA	Antes 2005	11,90%	78,57%	9,52%
MELILLA	Tras 2005	2,21%	90,10%	7,69%
MURCIA	Antes 2005	5,24%	73,19%	21,57%
MURCIA	Tras 2005	4,08%	78,00%	17,91%
NAVARRA	Antes 2005	3,67%	77,32%	19,01%
NAVARRA	Tras 2005	1,79%	82,80%	15,41%
PAIS VASCO	Antes 2005	5,12%	76,42%	18,46%
PAIS VASCO	Tras 2005	4,97%	76,60%	18,43%
<b>TOTAL ESPAÑA</b>		<b>12,51%</b>	<b>70,11%</b>	<b>17,38%</b>

Fuente. Elaboración propia a partir de la MCVL 2005

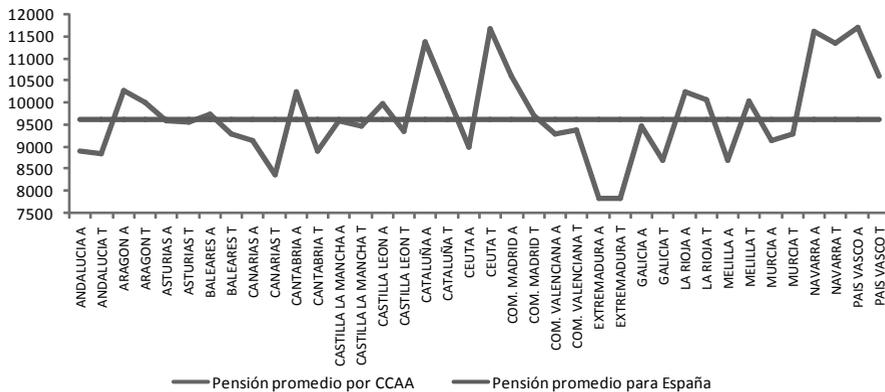
Respecto a la cuantía promedio anual de la primera pensión, que se percibe en el momento de la jubilación, en euros de 2005, para el caso de las contributivas sin complemento a mínimos<sup>161</sup> es de 9.607 euros para el total nacional. En el gráfico 7 se representa la cuantía promedio anual de la primera pensión de jubilación para cada una de las Comunidades Autónomas. Los inmigrantes que residen en Extremadura,

<sup>161</sup> La pensión no contributiva (2005) considerada es de 4.403,06 euros y la pensión mínima es de 7.336,14 euros.

Canarias, Andalucía y Galicia son los que percibirán menor cuantía de pensión, siendo en el País Vasco, Cataluña, Madrid y Navarra donde se obtiene la primera pensión de mayor cuantía.

### Gráfico 7

Cuantía promedio anual de la primera pensión contributiva sin complemento a mínimos, en euros de 2005, de la población inmigrante que cotiza en el 2005, para España y por CC. AA.<sup>5</sup>



Fuente. Elaboración propia a partir de la MCVL 2005

Los resultados mostrados han puesto de manifiesto que las cotizaciones de los inmigrantes, que cotizan en 2005, son insuficientes, en el 30% de los casos, para generar pensiones contributivas sin complemento a mínimos. Como ya se ha indicado se obtiene una pensión con complemento a mínimos, cuando se cotiza al menos 15 años, pero la cuantía de la pensión generada es inferior a la mínima establecida por ley. Esto se debe a un efecto combinado de bajas bases de cotización y de la inestabilidad de las mismas, puesto que no se cotiza durante períodos anuales completos.

No obstante, los datos mostrados pueden considerarse incompletos y sesgados puesto que no relacionan de forma directa las cotizaciones y las pensiones de cada inmigrante, sino que se han considerado de forma global. El análisis del TIR para cada inmigrante, que se realiza en los siguientes epígrafes, compensará este sesgo.

### 3. VIABILIDAD FINANCIERA DE UN SISTEMA DE PENSIONES

La idea básica desarrollada en este epígrafe se basa en los trabajos de Samuelson (1958) y Aaron (1966), según los cuales un sistema de pensiones financiado a través del reparto o de transferencias intergeneracionales sólo será viable en el largo plazo si el TIR del sistema no supera la tasa de crecimiento real de los salarios más la tasa de crecimiento estable de la población cotizante o, lo que es lo mismo, no supera el crecimiento de la base fiscal del sistema. Por tanto, la viabilidad financiera del sistema de reparto estará enlazada con el promedio de crecimiento económico sostenible a largo plazo y éste será el referente para fijar la sostenibilidad del sistema.

Como se recoge en Devesa, Lejárraga y Vidal (2002) esta proposición, en la que Aaron (1966) basó su conocida paradoja sobre la Seguridad Social, es complementada y desarrollada, entre otros, por Keyfitz (1985) que estudia cómo se ve afectado la TIR según sea el tamaño de la cohorte de los individuos que se consideren; Lapkoff (1985, 1988 y 1991) que analiza cómo afecta la inestabilidad demográfica al rendimiento financiero de distintas cohortes, llegando a conclusiones distintas a las de Keyfitz; y Bravo (1996) que desarrolla los elementos demográficos, económicos y las reglas que influyen en el TIR. Algunos investigadores, como Boskin y Puffert (1987) o Leimer (1995), se han inclinado por el estudio de los tantos reales efectivamente proporcionados por el sistema de reparto, concluyendo, en el caso de Estados Unidos y Canadá, que el sistema suele proporcionar valores mucho más elevados en el inicio que en su madurez. Schnabel (1997), en una línea similar, concluye que las generaciones nacidas en los años ochenta en Alemania soportarán tasas negativas. También en España, según Gil y López-Casasnovas (1999), las conclusiones son muy similares.

Según Jimeno y Licandro (1996), si el TIR supera a la suma de la tasa esperada del crecimiento del empleo y la tasa esperada de crecimiento de los salarios, el sistema es financieramente inviable. En la misma línea Jimeno y Licandro (1999), apuntan que en el largo plazo la tasa de crecimiento de los salarios reales viene dada por la tasa

de crecimiento de la productividad del trabajo, de forma que para que el sistema de reparto sea viable, la tasa de crecimiento del Producto Interior Bruto ha de superar el TIR medio del sistema.

En este trabajo se utiliza la metodología del TIR para analizar los efectos de la inmigración sobre la viabilidad financiera del sistema público de pensiones español.

Siguiendo la intuitiva y clara exposición de Devesa, Lejárraga y Vidal (2002) el TIR para un cotizante que se incorpora al mercado laboral a la edad de  $x_a$  años, en un sistema de reparto puro con prestaciones de jubilación, se define como el parámetro  $i$  de la ley de capitalización compuesta que iguala actuarialmente el flujo de cotizaciones con el de prestaciones.

El valor actual actuarial de las cotizaciones de un trabajador a lo largo de su período activo, descontado al tipo de interés  $i$ , queda reflejado en la siguiente ecuación:

$$[2] \quad V_{\text{COT}} = \sum_{t=0}^{x_j-1-x_a} {}_tP_{x_a} \quad c_{x_a+t} \quad W_{x_a} \quad (1+\alpha^*)^t \quad (1+\beta)^{-t} (1+i)^{-t}$$

Donde la notación utilizada es:

$i$  : Tanto interno de rendimiento real<sup>162</sup>.

$x_a$  : Edad del individuo al incorporarse al mercado laboral.

$x_j$  : Edad del individuo al alcanzar la jubilación.

${}_tP_{x_a}$  : Probabilidad de que una persona de edad  $x_a$  años alcance la edad  $x_a+t$  años.

$c_{x_a+t}$  : Porcentaje de cotización a la edad  $x_a+t$  años. Comprende tanto la aportación del empresario como la del trabajador.

<sup>162</sup> El adjetivo real hace referencia a que se obtiene a partir de cotizaciones y pensiones calculadas en términos reales y no en términos nominales.

$W_{x_a}$  : Salario a la edad  $x_a$ , que se supone coincidente con la base de cotización.

$\alpha^*$  : Tanto anual acumulativo de crecimiento nominal de los salarios, que se supone constante.

$W_{x_a+t} = W_{x_a} (1 + \alpha^*)^t$  : Salario a la edad  $x_a + t$ .

$\beta$  : Tanto anual acumulativo de crecimiento de la inflación, que se supone constante.

El valor actual actuarial de las prestaciones por jubilación, descontadas al tipo de interés  $i$  hasta el origen (momento de la entrada en el mercado laboral) y aplicando de manera simplificada la legislación española en vigor, es:

$$[3] \quad V_{\mathbf{R}\mathbf{x}} = \sum_{t=x_j-x_a}^{\omega-1-x_a} \mathbf{R}_{x_j+t} \mathbf{p}_{x_a} (1+\lambda^*)^{t-(x_j-x_a)} (1+\beta)^{-t} (1+i)^{-t}$$

donde:

$\lambda^*$  : Tanto anual acumulativo de crecimiento nominal de las pensiones.

$\omega$  : Edad límite de la tabla de mortalidad utilizada.

$R_{x_j}$  : Pensión de jubilación inicial

#### 4. TIR DE LA POBLACIÓN INMIGRANTE, QUE COTIZA EN 2005, POR COMUNIDADES AUTÓNOMAS

Las hipótesis de trabajo que se han considerado para realizar este cálculo han sido las siguientes:

1. Para cada uno de los inmigrantes cotizantes en 2005, según la MCVL 2005, se calcula la primera pensión de jubilación, según las reglas del sistema actual de pensiones. Una vez obtenida esta pri-

mera pensión, se incrementa con el IPC previsto por Alonso y Herce (2003).

2. Para el cálculo del TIR se trabaja con flujos de cotizaciones y prestaciones afectadas por probabilidad. Las tablas de mortalidad utilizadas han sido las del Instituto Nacional de Estadística 2005.
3. La tasa de crecimiento de la base fiscal del sistema de pensiones español se ha considerado<sup>163</sup> del 3%. Aun suponiendo que el crecimiento de los salarios de la población nativa y la inmigrante fuera el mismo, es lógico prever que las entradas de inmigrantes futuras sean menores a las actuales, por lo que un crecimiento de la base fiscal inmigrante del 3% puede considerarse excesivo. No obstante, en un intento de obtener resultados favorables, y dado que no tenemos información específica de la población analizada, se utiliza el 3%.

El gráfico 8 muestra el TIR obtenido por aquellos inmigrantes que percibirán, según las hipótesis de trabajo consideradas, pensiones de tipo contributivas. Para los inmigrantes cotizantes en la totalidad del territorio español, tanto el TIR de las pensiones complementadas como el de las de sin complementos, superan con diferencia el crecimiento de la base fiscal (del 3%). El sistema de pensiones no mantiene una equivalencia actuarial entre las aportaciones y prestaciones individuales, generando por tanto un desequilibrio actuarial. Este desequilibrio es mayor en el caso de los individuos que perciben pensiones con complemento a mínimos pues la pensión inicialmente calculada, según las reglas del sistema, es inferior a la finalmente percibida. Esto implica que la TIR de las pensiones con complemento a mínimos sea superior a la de las no complementadas.

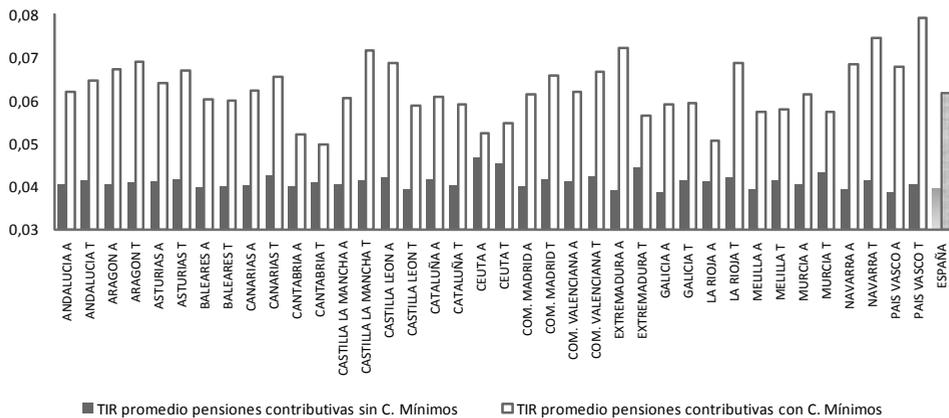
Si se analizan los resultados por CCAA, aquellos que percibirán pensiones complementadas a mínimos, son los que obtienen un TIR mayor, llegando a valores del 7,9% para comunidades como el País Vasco, seguida por Navarra y Aragón. Respecto a las comunidades con mayor porcentaje de inmigrantes, destacar que la Comunidad Valen-

<sup>163</sup> Véase Vidal, Domínguez y Devesa (2006) y Boado y otros (2007).

ciana y Madrid tienen un TIR superior al 6%, cuantía que no se supera en Cataluña. Es reseñable la diferencia en los valores para el caso de Extremadura que disminuyen considerablemente para aquellos inmigrantes que entran en el sistema con la regularización de 2005. Por otro lado, si se analizan los resultados de las contributivas no complementadas, estas cuantías decrecen considerablemente, encuadrándose cercanas al 4%. Las Comunidades con mayor desequilibrio actuarial son Ceuta, Extremadura y Murcia, siendo Baleares y el País Vasco las que tienen menor valor del TIR promedio en este tipo de pensiones.

**Gráfico 8**

TIR promedio de la población inmigrante que cotiza en 2005, por tipo de pensión contributiva, para el total de España y por CC. AA<sup>5</sup>



Fuente. Elaboración propia a partir de la MCVL 2005

En la tabla 2 se muestran los resultados del TIR para aquellos inmigrantes que percibirán pensiones contributivas, para el total de España y por Comunidades Autónomas y según el periodo de entrada. Se observa que, en general, el TIR es superior para aquéllos que entran en el sistema en base al proceso de regularización extraordinaria pero sin que se aprecien diferencias significativas. Comunidades como Extremadura, Ceuta y Murcia son las que obtienen un TIR mayor sobre sus cotizaciones, mientras que el País Vasco, Navarra, Cantabria y

Cataluña perciben un TIR menor. Asimismo, y a pesar de las diferencias comentadas se puede afirmar que el desequilibrio actuarial observado en el sistema se manifiesta en todas las Comunidades Autónomas.

**Tabla 2**

TIR promedio de la población inmigrante con pensiones contributivas, que cotiza en el 2005, para España y por CC. AA <sup>5</sup>

ANTES 2005		TRAS 2005	
0,0404	PAIS VASCO	0,0412	PAIS VASCO
0,0405	CANTABRIA	0,0414	CANTABRIA
0,0405	NAVARRA	0,0417	CATALUÑA
0,0408	CATALUÑA	0,0420	NAVARRA
0,0409	BALEARES	0,0426	BALEARES
0,0414	CASTILLA LA MANCHA	0,0427	CASTILLA LA MANCHA
0,0415	GALICIA	0,0428	GALICIA
0,0416	ARAGON	0,0428	ARAGON
0,0418	ASTURIAS	0,0429	ASTURIAS
0,0419	CASTILLA LEÓN	0,0430	MELILLA
0,0420	LA RIOJA	0,0432	LA RIOJA
0,0426	MELILLA	0,0433	CASTILLA LEÓN
0,0431	COM.MADRID	0,0435	COM.MADRID
0,0432	COM. VALENCIANA	0,0439	ANDALUCIA
0,0432	ANDALUCÍA	0,0439	COM. VALENCIANA
0,0433	CANARIAS	0,0440	MURCIA
0,0450	MURCIA	0,0446	CANARIAS
0,0461	EXTREMADURA	0,0450	CEUTA
0,0481	CEUTA	0,0470	EXTREMADURA
<b>0,0420</b>	<b>ESPAÑA</b>	<b>0,0439</b>	<b>ESPAÑA</b>

Fuente. Elaboración propia a partir de la MCVL 2005

Diversos trabajos [Boado y otros (2007), Devesa (2007), Devesa, Lejarraga y Vidal (2002)] han calculado valores de la TIR del sistema de pensiones, para el total de la población, en torno al 4%. Con estos resultados han puesto de manifiesto que el sistema público español de pensiones presenta un desequilibrio actuarial estructural: la relación

entre las cotizaciones esperadas y las pensiones esperadas “rinde” un TIR para el cotizante que es demasiado alto, para que el sistema sea sostenible. Con los resultados obtenidos de la MCVL 2005, para la población inmigrante, se puede afirmar que el coste de ventas (pensiones y compromisos adquiridos con los cotizantes inmigrantes) es superior al precio de venta (cotizaciones de los inmigrantes), de igual forma que lo es para la población nacional. Asimismo, aunque hay diferencias por Comunidades Autónomas en las características de la población inmigrante cotizante, el desequilibrio actuarial observado en el sistema se manifiesta de forma similar en todas ellas. Además, no se puede olvidar el hecho de que la población inmigrante, al tener menores cotizaciones, tanto en cuantía como en tiempo, se beneficia en mayor medida de la solidaridad, a través de las pensiones no contributivas y las pensiones con complementos a mínimos. La distribución de este tipo de pensiones no es igualitaria por Comunidades Autónomas. Y es en este punto donde habría que incidir para conseguir que se incrementara la estabilidad de las cotizaciones para intentar que la carga impositiva futura sea menor a la que correspondería si se mantienen las duraciones relativas de las cotizaciones pasadas, e igual en todas las Comunidades Autónomas.

## CONCLUSIONES

La conclusión obtenida, tras la realización de este trabajo, es que el sistema de pensiones, si se considera solamente la población inmigrante que cotiza en 2005, es actuarialmente inviable, puesto que concede una rentabilidad a las cotizaciones realizadas superior al crecimiento de la base fiscal de esta población (3%), aun cuando este crecimiento se ha considerado desde planteamientos más que optimistas en las hipótesis de trabajo (crecimiento macroeconómico y edad de jubilación). No obstante, estos resultados son coincidentes con los obtenidos para el total de la población por diversos autores [Boado y otros (2007), Devesa (2007), Devesa, Lejárraga y Vidal (2002)]. Esta conclusión es extrapolable a todas las Comunidades Autónomas, aún cuando las características de la población cotizante son diferentes en cada una de ellas, en relación a edad de entrada, duración relativa y

bases de cotización. Con ello podemos afirmar, que si bien el sistema es actuarialmente inviable, la inmigración no empeora la solvencia del mismo, puesto que obtiene rendimientos de sus cotizaciones similares a los de la población nacional, aún cuando ambos sean superiores al crecimiento de la base fiscal.

Otra cuestión es que un importante porcentaje de la población inmigrante (el 17,38%)<sup>164</sup> realiza cotizaciones insuficientes, en tiempo, para percibir una pensión contributiva. Por Comunidades Autónomas las diferencias son significativas, destacando Extremadura y Andalucía como aquellas con mayor porcentaje de pensiones no contributivas. Estas comunidades son a su vez las que tienen menores duraciones relativas. Si bien las pensiones no contributivas se financian por impuestos, la carga de la población inmigrante, sobre la base fiscal, será muy superior a la de la población nacional. Para evitar este esfuerzo de solidaridad, se ha de perseguir una mayor estabilidad en la duración relativa de las cotizaciones de la población inmigrante, puesto que si ésta tuviera duraciones relativas iguales a 1, el porcentaje de pensiones no contributivas quedaría reducido al 4% [Domínguez y Encinas (2008)].

Los resultados obtenidos de la MCVL 2005, han sido desagregados tanto para los inmigrantes de tipo económico como para los no económicos, dividiendo a ambos entre los que entran en el sistema con anterioridad a 2005 o en virtud del proceso de normalización extraordinaria de ese mismo año. En relación al momento de entrada, las conclusiones obtenidas han sido muy similares, lo que pone de manifiesto que el proceso de regularización extraordinaria ha sacado a la luz a inmigrantes que formaban parte de la economía sumergida, pero que tenían las mismas características de los legales y que debido a las restricciones del proceso de regularización no habían podido entrar en el sistema. La desagregación por Comunidades Autónomas muestra que las Comunidades con mayor proporción de cotizantes en el Régimen Agrario, mayores edades de entrada en el sistema, menores duraciones relativas y bases de cotización son las que obtienen un TIR mayor, mientras que aquellas donde se afincan inmigrantes con

<sup>164</sup> Y superior al nacional del 5,4%.

bases de cotización mayores, menores edades de entrada y mayores duraciones relativas la TIR obtenida del sistema es menor. Las Comunidades Autónomas que agrupan mayor número de inmigrantes, un 65% del total nacional, Cataluña, Comunidad Valenciana, Comunidad de Madrid y Andalucía no se caracterizan por tener los mayores valores de TIR. Por último indicar que, aún cuando hay diferencias significativas entre las Comunidades Autónomas, el desequilibrio actuarial se pone de manifiesto en todas ellas.

Conviene apuntar que estos resultados son muy diferentes a los alcanzados en los trabajos que se fijan sólo en los flujos de caja, ya que, en este caso, la entrada masiva de inmigrantes retrasa la fecha en la que previsiblemente se agota el Fondo de Reserva de la Seguridad Social, pero no modifica substancialmente la sostenibilidad financiero-actuarial del sistema público de pensiones de jubilación español.

Por último, comentar que en todo análisis sobre pensiones e inmigración, puede plantearse la reflexión de qué ocurrirá en el futuro, si esos inmigrantes volverán a sus países de origen cobrando o no pensión de jubilación. Los inmigrantes, son individuos racionales, y sería iluso pensar que van a renunciar a sus derechos de pensión, sobre todo cuando hay convenios de Seguridad Social con la mayoría de los países latinoamericanos y garantía de cobro de pensión para los de origen Europeo. Por lo tanto, la hipótesis, considerada en este trabajo, de que los inmigrantes cobrarán sus pensiones de jubilación resulta más que justificada.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aaron, Henry. "The social insurance Paradox" *Canadian Journal of Economic Review*. 1966. Vol. XXXII, nº 3, p. 371-374.

Alonso, Javier y Herce, José A. "Balance del sistema de pensiones y boom migratorio en España. Proyecciones del modelo MODPENS de FEDEA a 2050", Documento de Trabajo 2003-02, FEDEA, 2003.

Bardají Ruíz, Federico. *Literatura sobre inmigrantes en España*. Madrid: Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales, Colección Observatorio Permanente de la Inmigración, nº 13, 2006.

Boado Penas, Carmen; Domínguez Fabián, Inmaculada; Valdés Prieto, Salvador y Vidal Meliá, Carlos. "Mejora de la equidad y sostenibilidad financiera del sistema público español de pensiones de jubilación mediante el empleo de cuentas nocionales de aportación definida (NDCs)". Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales, FIPROS, 2007.

Boskin, Michael y Puffert, Douglas. "The financial impact of Social Security by cohort under alternative financing Assumptions". Working Paper 2225, National Bureau of Economic Research. 1987.

Bravo, Jorge. "La tasa de retorno de los sistemas de pensiones de reparto". *Estudios de Economía*. 1996, vol. 23, nº 1, Junio. p. 113-135.

Cámaras de Comercio. *La inmigración en España. Análisis por Comunidades Autónomas*. 2005. Disponible en [www.camaras.org](http://www.camaras.org)

Caparrós, Antonio y Navarro, Lucía. *Incidencia de la contratación indefinida según nacionalidad en Andalucía y en el resto de España*. Documento de Trabajo del Centro de Estudios Andaluces. E2008-8, 2008

Carrasco, Concepción. *Mercados de trabajo: los inmigrantes económicos*. Madrid: Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales, Instituto de Migraciones y Servicios Sociales, 1999.

Carrasco, Raquel y Ortega, Carolina. "La inmigración en España: características y efectos sobre la situación laboral de los trabajadores nativos". Documento de Trabajo nº 80, Fundación "Alternativas". 2005.

Cebrián, Inmaculada; Iglesias, Carlos; Llorentes, Raquel y Moreno, Gloria. "Análisis comparativo de las trayectorias laborales de las mujeres nacionales e inmigrantes: un análisis sobre los movimientos de las vidas laborales". *VII Jornadas de Economía Laboral*. Universidad de las Palmas de Gran Canarias. 2007.

Conde, José Ignacio; Jimeno, Juan F. y Valera, Guadalupe. "Inmigración y pensiones: ¿qué sabemos?". *Cuadernos Económicos ICE*. 2008, nº 75, p. 249-270.

Devesa, María del Mar. "El desequilibrio financiero-actuarial del sistema contributivo de pensiones de la Seguridad Social Española". Tesis Doctoral, Universidad de Valencia. 2007.

Devesa, Enrique y Devesa, María del Mar. "¿Existe un verdadero desincentivo a la jubilación anticipada por parte de la Seguridad Social?". *VII. Jornadas de Economía Laboral*. Universidad de las Palmas de Gran Canarias. 2007.

Devesa, Enrique; Lejárraga, Ana y Vidal, Carlos. "El tanto de rendimiento de los sistemas de reparto". *Revista de Economía Aplicada*. 2002, vol. X, nº 30, p. 109-132.

Díez Nicolás, Juan y Ramírez Lafia, María José. *La inmigración en España: una década de investigaciones*. Madrid: Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales, IMSERSO. Colección Inmigración y Refugio, 2001.

Domínguez Fabián, Inmaculada y Encinas Goenechea, Borja. "Inmigración y solvencia financiera del sistema público de pensiones tras la regularización de 2005". *Revista de Economía Aplicada*. 2008, Vol. XVI, nº extraordinario, p. 67-92.

Durán, Almudena y Sevilla, María Ángeles. “Una muestra continua de vidas laborales”. En Marcos, C. (ed). *El papel de los registros administrativos en el análisis social y económico y el desarrollo del sistema estadístico nacional*. Madrid: Instituto de Estudios Fiscales, Colección de Estudios de Hacienda Pública, 2006, p. 241-252

Feldstein, Martin. “The Effects of the Ageing European Population on Economic Growth and Budgets: Implications for Immigration and Other Policies”. Working Paper 12736, *National Bureau of Economics Research*. 2006.

García Pérez, José Ignacio y Sánchez Martín, Alfonso. “Efectos de la inmigración en las cuentas públicas y en el sistema de pensiones en Andalucía: efectos de medio y largo plazo”. *Aportaciones para entender el efecto de la inmigración en Andalucía*. Centro de Estudios Andaluces. 2005.

Gil Joan y López, Guillem. “Redistribution in the spanish pension system: an approach to its life time effects”. Documento de Trabajo nº 99-16, FEDEA. 1999.

Instituto Nacional de Estadística. Tablas de mortalidad.

Izquierdo, Mario y Jimeno, Juan Francisco. “Inmigración: desarrollos recientes y consecuencias económicas”. *Boletín Económico del Banco de España*. 2005, nº 3, p. 39-50.

Jimeno, Juan Francisco y Licandro, Omar. “El equilibrio financiero de un sistema de reparto de pensiones de jubilación: Una aplicación al caso español”. Documento de Trabajo nº 96–21, FEDEA. 1996.

Jimeno, Juan Francisco y Licandro, Omar. “La tasa interna de rentabilidad y el equilibrio financiero del sistema español de pensiones de jubilación”. *Investigaciones Económicas*. 1999, vol. XXIII (1), p. 129-143.

Keyfitz, Nathan. “The demographics of unfunded pensions”. *European Journal of Population*. 1985, vol. 1, p. 2-30.

Lapkoff, Shelley. "Pay-as-you-go Retirement Systems in Nonstable Populations". *Working Paper* nº18, University of California. 1985.

Lapkoff, Shelley. "Population nonstability and cohort lifetime income". Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley. 1988.

Lapkoff, Shelley. "A Research Note on Keyfitz's-The Demographics of Unfunded Pensions". *European Journal of Population*. 1991, vol. 7, p. 159-169.

Leimer, Dean R. "A Guide to Social Security Money's Worth Issues". *Social Security Bulletin*. 1995, vol. 58 (2), p. 3-20.

León, Beatriz. "La inmigración: ¿una opción ante el envejecimiento de la población?". Documento de Trabajo, nº 182, FEDEA. 2004.

Mercado de Trabajo. Muestra Continua de Vidas Laborales. *Revista de Economía Aplicada*, Vol. XVI, nº extraordinario 2008.

Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales. *La Muestra Continua de Vidas Laborales 2005*.

Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales. *Boletín de Estadísticas Laborales 2007*.

Pajares, Miguel. "Inmigración y Mercado de trabajo". Documento del Observatorio Permanente de la Inmigración, Ministerio de Trabajo e Inmigración. 2008.

Samuelson, Paul. "An exact consumption loan model of interest with and without the social contrivance of money". *The Journal of Political Economy*. 1958, vol. 66, nº 6, p. 467-482.

Schnabel, Reinhold. *Internal rates of return of the German Pay as you go public pension system*. University of Mannheim Discussion Paper SFB 504. 1997.

Vidal Meliá, Carlos, Domínguez Fabián, Inmaculada y Devesa Carpio, Enrique. "Subjective Economic Risk to beneficiaries in Notional Defined Contribution Accounts (NDC's)". *The Journal of Risk and Insurance*. 2006, vol. 73 (3), p. 489-515.



## **Ponencia 33**

### **DISEÑO DE SEGUROS PARA LA DEPENDENCIA, CONTROL DE RIESGOS Y CRITERIOS DE SELECCIÓN**

Cruz Ramírez Pérez, Paloma Fernández Giménez  
y Carmen Cuéllar Hervás

#### **RESUMEN**

Consideraciones en torno a la novedad de los productos vinculados al riesgo de Dependencia y la ausencia de experiencias significativas en el mercado asegurador español, aconsejan establecer determinadas restricciones para prevenir siniestralidades adversas anticipadas.

En este sentido, y observando la experiencia de otros mercados, se analizan los distintos factores de riesgo a contemplar en el proceso de definición de coberturas, diseño de productos y elaboración de bases técnicas para la cobertura del riesgo de dependencia, que pueden facilitar el control de la siniestralidad. En concreto, se analizará la aplicación de periodos de carencia, franquicias, limitación de coberturas y prestaciones, así como, criterios especiales de selección de riesgos en el proceso de suscripción como primera medida de control de la antiselección.

Finalmente, se exponen tres productos que, por su diseño, pueden ser una buena opción para iniciar esta línea de negocio.

## PALABRAS CLAVES

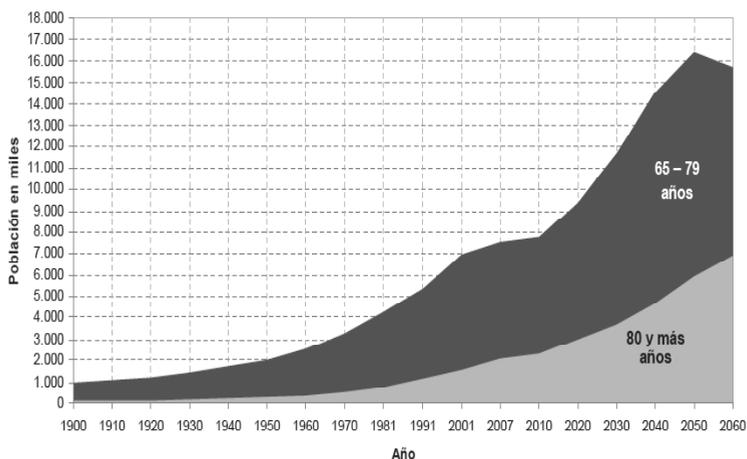
Seguros de Dependencia, Factores de Riesgo, Diseño de productos, Selección de riesgos y Criterios de suscripción, Bases Técnicas

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen diversos informes que describen el proceso de envejecimiento de la población y el aumento del colectivo de edad avanzada como muestra el gráfico adjunto. Este fenómeno junto con el desarrollo de tecnologías médicas para el sostenimiento de la vida, así como el decremento de familias grandes y la mayor participación de la mujer (principal figura de los cuidados a los dependientes en generaciones anteriores) en la vida profesional, tendrán como resultado una mayor demanda de cuidados y servicios especiales para personas que han perdido, en parte o por completo, la capacidad de valerse por sí mismas a consecuencia de enfermedades crónicas o a afecciones propias de la edad avanzada.

**Gráfico 1**

Evolución de la población mayor española, 1900-2060



Fuente: INE. INEBASE.

De 1900 a 2007 los datos son reales; de 2010 a 2060 se trata de proyecciones a partir del censo de 2001.

Estadísticas del EDAD de 2008 muestran que el 26% de las personas con edad superior a 65 años entrarán en una residencia o requerirán servicios de atención especial los últimos años de su vida. En el tramo de 85 años y más, la proporción asciende a cinco de cada ocho.

En este sentido, España aprobó la Ley de Promoción de la Autonomía Personal y Atención a las personas en situación de Dependencia (Ley 39/2006 de 14 de diciembre), que establece el Sistema de Atención y Ayuda a la Dependencia (SAAD) con financiación pública y participación del usuario a través del copago. Los datos disponibles por el momento, sobre el proceso de implantación de esta ley ponen de manifiesto que no se están cumpliendo por el momento las expectativas generadas, ni en el alcance ni en la cuantía de las prestaciones.

Se pone de manifiesto la existencia de una opción para el desarrollo de “instrumentos privados para la cobertura de dependencia” como ya anticipaba la Ley en su disposición transitoria. Este complemento del sector privado, puede ser en el área de prestación de servicios o facilitando instrumentos para financiar esos servicios. En esta última vertiente se centra este artículo, desarrollando las posibles soluciones a través de los seguros.

Este artículo recoge algunos diseños para la cobertura de dependencia desde la óptica privada del mercado asegurador. A pesar de la falta de precedentes en España, existen otros mercados de donde se pueden obtener lecciones interesantes, y está claro que un diseño sensible a las demandas de los clientes y ajustado en el precio será una de las claves para el éxito de esta línea de productos.

## **2. ELEMENTOS DE RIESGO Y DISEÑO DE LA COBERTURA DE DEPENDENCIA**

En este apartado desarrollamos los aspectos del diseño de seguros de dependencia y cómo estos factores pueden influir en el establecimiento de las primas.

Normalmente, es cometido y responsabilidad del actuario el diseño y posterior establecimiento de la prima, pero si tratándose de seguros de vida es importante que estén involucrados los actuarios, selectores de riesgos y tramitadores de siniestros, en el diseño y desarrollo de productos para la Dependencia es aún de mayor importancia.

En el establecimiento de la prima en el seguro de dependencia existen unas áreas que requieren especial interés:

- La definición del riesgo a cubrir condiciona directamente la definición y cómo se corresponden los datos disponibles con el riesgo a cubrir. Son claramente diferentes los conceptos de invalidez y dependencia. Condiciona la amplitud de los datos, especialmente de exposición al riesgo, que tiene que ser valorada.
- Nunca hay un adecuado sustituto de la experiencia cuando se trata de establecer la prima de seguro de un nuevo riesgo. Sin embargo, en el momento inicial de desarrollo de cualquier nueva línea de productos, no hay ninguna clara experiencia a la que volver. Los actuarios pueden salvar el obstáculo combinando datos de otras fuentes y mercados con un cuidadoso diseño de productos basado en una sólida base técnico financiera.
- La diversidad geográfica, especialmente cuando los datos que se pretenden trasladar corresponden a experiencias extranjeras, donde pueden existir diferencias culturales, legales, políticas, económicas y con estructuras demográficas muy diferentes.

Teniendo en mente estas consideraciones vamos a pasar por distintos elementos que tendremos que contemplar a la hora de diseñar un producto.

## **2.1. Definición de la cobertura**

El contrato de seguros obligará al asegurador, en el caso de que se produzca la situación de dependencia, conforme a la cobertura establecida en la póliza, al cumplimiento de la prestación convenida con

la finalidad de atender total o parcialmente, directa o indirectamente las consecuencias perjudiciales para el asegurado que deriven de la situación de dependencia.

Si el producto se diseña como complementario al SAAD<sup>165</sup>, es recomendable que exista un cierto paralelismo entre las definiciones de grados o niveles de dependencia. En la actualidad el sector privado se está centrando en la dependencia en los grados de severa y gran dependencia<sup>166</sup>.

Es importante que tanto la descripción del riesgo cubierto, como de la prestación que se va a recibir, estén claramente recogidas en la póliza de seguro. Pocas personas invertirán en el seguro sin una clara definición del riesgo cubierto y los beneficios que van a recibir.

## **2.2 Tasas de dependencia**

Excede el objeto de este artículo entrar en el análisis de los distintos modelos de obtención de tablas para la dependencia. En este sentido, y dado que las aplicaciones prácticas del epígrafe 4 sólo tienen una finalidad ilustrativa. En este punto nos hemos limitado a comentar la utilización del modelo de ratio-incidencia, siguiendo una práctica generalmente aceptada a nivel internacional para productos de rentas por dependencia. Considerando además, la ausencia de experiencias aseguradora en el mercado español.

No obstante, existen ya excelentes aproximaciones teóricas que profundizan en el proceso de elaboración de las tablas biométricas para dependencia, basadas en los modelos de múltiples-estados y su posible aproximación para el mercado español. Véase por ejemplo los estudios de Albarrán, Ayuso, Guillén y Monteverde (2005), Porciello, Varea y Martínez (2001) Porciello y Varea (2004).

---

165 SAAD: Sistema público de Ayuda y Atención a la Dependencia

166 Ley 39/2006: Art 2.2:definición de dependencia y artículo 26.1 definición de grados

### **2.3. Primas garantizadas**

La experiencia internacional aconseja el establecimiento de primas periódicas no garantizadas, o con opción de ser revisadas cada 5 ó 10 años, recogiendo en las pólizas las condiciones o criterios de revisión.

La ausencia de primas garantizadas es normalmente aceptada por los clientes cuando no hay componente de ahorro en las mismas. Pero es importante que el cliente encuentre una relación razonable entre el precio y la prestación, sin olvidar el comportamiento antiselectivo que unas primas muy elevadas pueden producir.

Encontramos dos tipos de primas únicas o periódicas. En el caso de primas periódicas, el período de pago de primas suele coincidir con el período activo, los 65 años de edad. También se puede contemplar la exención de pago de primas en caso de dependencia.

### **2.4. Edad de contratación**

Los más comunes, son productos orientados a personas activas a partir de los 50 años de edad, para el caso de seguros en los que la prestación está enfocada en financiar los gastos adicionales que puede ocasionar una situación de dependencia si ocurre en un futuro.

Por otro lado, están los productos de una renta inmediata para dependientes, que se ofrecen a primas únicas y suele estar abiertos a edades avanzadas.

### **2.5. Prestaciones**

En principio no existe ninguna limitación en el diseño de las prestaciones, pueden ser tanto en forma de capital como rentas, si bien suele predominar el formato de renta, que se puede estimar como complemento a las posibles prestaciones públicas o para facilitar el copago de los servicios requeridos para la dependencia.

Suele ser de periodicidad mensual. En ocasiones se incluye algún tipo de crecimiento o revalorización para protección de la inflación, o un capital a tanto alzado en el primer momento combinado con una renta a favor del dependiente.

La cuantía de la renta variará en función de la edad del asegurado y del capital o prima única que entrega al suscribir la póliza.

## **2.6. Plazo de carencia**

Es este uno de los instrumentos utilizados para el control de la antiselección. Se establece en el contrato unos períodos de carencia diferenciados según el tipo de riesgo y el resultado del proceso de selección.

Como práctica general, se suelen establecer plazos de un año para las coberturas de dependencia por enfermedad, y de dos o tres años para dependencia por causas cognitivas, demencia senil o Alzheimer. No se suele establecer plazo de carencia para siniestros por causas accidentales.

Cuando la pérdida de autonomía ocurre durante el periodo de carencia, en ocasiones, se suelen reembolsar las primas pagadas.

## **2.7. Período de espera o franquicia**

Es considerado como un período de espera desde el momento que comienza la situación de dependencia y se inicia el cobro de la prestación. Se suele justificar por el tiempo que se requiere para llevar a cabo el proceso de tramitación del expediente del siniestro. Sin olvidar que el seguro de dependencia tiene como finalidad el pagar unas prestaciones al asegurado dependiente que permanezca vivo.

## **2.8. Valor de rescate**

El valor de rescate paraliza el seguro. La concesión de esta opción no es recomendable, teniendo en cuenta el comportamiento antiselectivo que puede significar su inclusión.

Sólo en algunos productos como la cobertura vitalicia de fallecimiento y con complemento por dependencia, se puede considerar la opción de rescate sobre una parte de las provisiones del seguro vida entera.

## **2.9. Valores de reducción**

A diferencia del valor de rescate, sí suele ofrecerse la opción de reducción, permitiendo que el asegurado mantenga el derecho a recibir una prestación de dependencia, aunque reducida en caso de dejar de pagar las primas antes del plazo establecido en la póliza.

La reducción se puede materializar en un reducción de capital asegurado o de la duración de la cobertura. Esta última forma se conoce como prolongación de vigencia.

## **3. POSIBLES DISEÑOS**

Con independencia, de la discreta respuesta que el sector asegurador español ha mostrado, por el momento desde la aparición de la Ley en el 2006. Según informe de mercado publicado por INESE, únicamente siete compañías de las 63 consultadas, en el ramo vida y salud (11%) cuentan con productos de dependencia en su cartera, de las cuales cinco son en el ramo de vida y dos en el ramo de enfermedad. El 59% de las consultadas reconocen no comercializar este producto, el resto no respondieron.

Existe un consenso en el mercado entorno a que a medida que se vaya desarrollado la implantación del SAAD se irán manifiestos las parcelas a complementar por el sector privado. Si bien en un primer momento los diseños enfocados a la provisión de fondos para financiar unos cuidados en caso de que se entre en dependencia son los primeros productos en aparecer, y en los que nos hemos centrado.

Observando experiencias de otros mercados del entorno como el francés y el británico, existen básicamente dos tipos de productos:

- Los contratados por personas activas, para cubrir una posible caída en dependencia en el futuro. Como seguros independientes o como complementarios de otros productos: fallecimiento, invalidez, seguros de jubilación o planes de pensiones.
- Seguros de cuidados inmediatos para cubrir personas ya dependientes.

Si bien el conjunto de productos que pueden emerger dependerá de la actuación de los diferentes agentes implicados, a continuación señalamos algunos de sus posibles diseños.

### **3.1. Rentas inmediatas dependientes**

Existe una necesidad inmediata basada en que los individuos acceden a la dependencia. El elemento de riesgo a cubrir ya no es la incidencia sino que la esperanza de vida real sea superior a la esperada. Este tipo de pólizas garantizan normalmente una renta vitalicia inmediata, a cambio de primas únicas que tengan en cuenta la reducción de la esperanza de vida del dependiente.

En ocasiones, se contempla una garantía de duración mínima para la renta, o la devolución de un determinado porcentaje sobre las primas pagadas, si el fallecimiento es prematuro, característica comercial que facilita la contratación.

### **3.2. Dependencia como seguro complemento a seguros de invalidez**

Otra opción de diseño de productos de dependencia, consiste en considerar la cobertura de dependencia como complementaria a seguros de invalidez. Recibiendo una renta o capital adicional al de invalidez, si cumple los criterios de actividad básicas de la vida diaria.

Es importante resaltar la diferencia entre la discapacidad y dependencia, y que esta última tiene su detonante en la necesidad de aten-

ción de otras personas para poder realizar las actividades de la vida diaria y la finalidad de la prestación es diferente. En el control de la suma asegurada, para evitar el sobreseuro, se tendrá en cuenta este aspecto.

Este producto es frecuente en el mercado británico como complementario a sus productos de protección de ingresos por discapacidad.

### **3.3. Seguro de dependencia como complementario a pólizas de Accidentes**

En este caso son las pólizas de accidentes las que incluyen un seguro complementario para la dependencia. Se ofrece una suma asegurada si como consecuencia de un accidente, el asegurado se queda inhábil para realizar un número determinado de las AVD.

El beneficio se conoce como pérdida de la independencia. Las primas son anuales renovables y tienen duración máxima de la cobertura hasta los 65 años de edad.

### **3.4. Complementario del seguro de fallecimiento vitalicio**

El seguro de vida entera, muy común en el mercado americano, se comercializaba tradicionalmente con el complemento de anticipación por graves enfermedades con mucho éxito.

Similar filosofía se argumenta en el seguro de dependencia, se anticipa parte del capital de fallecimiento si el asegurado cumple con los criterios de fallo de determinado número de ABVD.

Una alternativa es anticipar en lugar del importe total del capital, un porcentaje de la suma asegurada, en forma de renta y durante un periodo determinado. Por ejemplo el 2% de la suma asegurada por vida, durante un período de cincuenta meses como máximo. Este es uno de los ejemplos que se desarrolla en el siguiente epígrafe.

### **3.5. Cuidados vinculados a un bono**

Es atractivo para persona que recibe un capital de ahorro por jubilación y deciden reservar una parte para una posible dependencia. Este producto se ha comercializado en los mercados anglosajones, con relativo éxito.

Una prima única se asigna a la compra de un bono, y descuentos anuales se invierten en pagar la prima de riesgo de un seguro de dependencia.

La cuantía asegurada por dependencia dependerá de la edad del propietario del bono y su probabilidad de entrar en dependencia.

En edades jóvenes este producto es interesante, sin embargo a medida que avanza la edad, se incrementa la probabilidad de incapacitarse pero disminuye la cuantía del capital.

Este producto requiere una elaborada comercialización y explicación al cliente. Además, existe el riesgo de incurrir en insuficiencia de prima en caso de que la rentabilidad del bono no genere fondos suficientes, unido a la no garantía de la prima del seguro, que llevaría una disminución de la cobertura de dependencia.

## **4. APLICACIÓN PRÁCTICA**

En este epígrafe se describe la construcción de las primas puras de tres productos con cobertura de dependencia con prestaciones de carácter financiero. Al planteamiento teórico se le añade, la obtención práctica de unas tarifas a efectos meramente ilustrativos, ya que excede el objetivo de este artículo la discusión de las experiencias utilizadas.

### **4.1 Seguro de renta vitalicia con renta adicional por dependencia**

El objeto de este seguro consiste en garantizar al beneficiario una renta mensual vitalicia que recibirá a partir del momento de la contra-

tación y que se verá aumentada por una renta complementaria desde el momento en el que le sea reconocido el estado de dependencia, o, en cualquier caso, desde el vencimiento siguiente a cumplir 85 años.

Este producto está orientado a personas que al jubilarse quieren transformar su capital de jubilación en una renta vitalicia y reservarse una parte para una posible caída en dependencia.

**- Valor actual renta vitalicia inmediata:**

$$\text{VARVIT}_X = \frac{1}{m l_x} \sum_{t=0}^{m(w-x)-1} l_{x+t/m} V^{t/m}$$

**- Valor actual renta temporal de dependencia:**

$$\text{VARTD}_X = \frac{1}{l_x^a} \sum_{t=c}^{f-x-1} l_{x+t}^a d_{x+t} V^{t+1/2} s / \ddot{a}_{x+t:f-x-t-s}^{d(m)}$$

siendo:

$$s / \ddot{a}_{x:n}^{d(m)} = \frac{V^s}{m l_x^d} \sum_{h=0}^{n.m} V^{t/m} l_{x+h/m}^d f(h)$$

donde:

$$f(h) = 0 \quad \text{si } x + s \geq z$$

$$f(h) = 1 \quad \text{si } h \leq n.m$$

**- Valor actual renta vitalicia diferida:**

$$\text{VARVD}_X = {}_{f-x} / \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m l_x} \sum_{t=m(f-x)}^{m(w-x)-1} l_{x+t/m} V^{t/m}$$

**- Prima única de la combinación:**

$$\text{PU}_X = \text{VARVIT}_X + \text{VARVD}_X + \text{VARTD}_X$$

Consideraciones particulares:

- modalidad pago prestaciones (m) mensual
- Cuantía renta mensual: 1.000 €
- Edad fin cobertura de dependencia (f): 85 años
- Mortalidad general:  $100\% q_x$  GRM/F-95
- Mortalidad dependientes:  $120\% q_x$  GRM/F-95

Edad contratación	Prima Única
50	260.833
55	238.560
60	215.221
65	191.477
70	166.063
75	139.727

## 4.2 Seguro de renta temporal de dependencia

El objeto de este seguro consiste en garantizar al beneficiario, desde el momento en que se le reconozca un estado de dependencia, una renta mensual durante un período máximo de 10 años (120 meses), siempre y cuando el estado de dependencia sea reconocido antes de los 85 años. Sin embargo, siempre que haya prestaciones en curso de pago, éstas se pagarán hasta finalizar el período máximo de pago establecido de 10 años.

Se ha tenido en cuenta que las primas se pagarán anualmente desde la edad de contratación y hasta una edad máxima (z) establecida al efecto, normalmente los 65 años de edad.



- Edad fin cobertura de dependencia (f): 85 años
- Duración máxima renta dependencia (n): 10 años
- Mortalidad general:  $100\% q_x$  GRM/F-95
- Mortalidad dependientes:  $120\% q_x$  GRM/F-95

Edad Contratación	Prima Única	Prima Nivelada
50	7.612	586
55	8.886	824
60	10.376	1.220
64	11.840	1.770

#### 4.3 Seguro de Vida Entera con anticipo de las prestaciones en caso de dependencia

El objeto de este seguro es garantizar al beneficiario de la póliza el cobro de un capital en caso de fallecimiento y el cobro de una renta en caso de dependencia.

La cobertura de dependencia se establece como una renta de importe igual al 2% del capital asegurado, mientras el asegurado vive, y por un período máximo de 50 meses.

En caso de fallecimiento del asegurado en estado activo, el beneficiario recibirá el importe del capital asegurado en la póliza.

En caso de que el fallecimiento se produzca en estado de dependencia, el beneficiario recibirá el importe del capital asegurado menos las rentas ya percibidas por el asegurado.

Las características de este seguro permiten que pueda diseñarse a primas periódicas, vitalicias o temporales.

- **Valor actual de una renta temporal para un asegurado dependiente:**

$${}_s/\ddot{a}_{x:n}^{d(m)} = \frac{V^s}{m l_x^d} \sum_{h=0}^{50} V^{h/m} l_{x+s+h/m}^d$$

- **Valor actual de un seguro vida entera para un asegurado activo:**

$$A_x^a = \frac{1}{l_x^a} \sum_{h=0}^{w-x-1} V^{h+1/12} \left( l_{x+h}^a - l_{x+h+1}^a - l_{x+h}^a d_{x+h} \right)$$

- **Valor actual de un seguro temporal en caso de muerte, pagadero mensualmente para un asegurado dependiente:**

$${}_s/A_{x:n}^{d(m)} = \frac{1}{l_x^d} \sum_{h=0}^{50} V^{(2h+1)/24} \left( l_{x+s+h/m}^d - l_{x+s+(h+1)/m}^d \right)$$

- **Valor actual de prestaciones en caso de dependencia:**

$$VAPD_x = \frac{1}{l_x^a} \sum_{t=c}^{w-x-1} l_{x+t}^a d_{x+t} V^{t+1/2} \left( r {}_s/a_{x+t:n}^{d(m)} + (k - \sum_{i=1}^{50} i r) {}_s/A_{x+t:n}^{d(m)} \right)$$

- **Valor actual de primas:**

$$VAP_x = \frac{1}{m_p l_x^a} \sum_{t=0}^{m_p(z-x)-1} V^{t/m_p} l_{x+t/m_p}^a$$

- **Prima nivelada:**

$$PA_x = \frac{VAPD_x + A_x^a}{VAP_x}$$

Consideraciones particulares:

- modalidad pago primas (mp) anual
- Edad final periodo pago primas (z): 65 años
- Mortalidad general: 100%  $q_x$  GKM/F-95
- Mortalidad dependientes: 120%  $q_x$  GKM/F-95
- Renta mensual (r): 2 % Capital asegurado
- Capital Asegurado (k): 600.000 €
- Duración máxima prestaciones dependencia: 50 meses

Edad Contratación	Prima Única	Prima Nivelada
50	225.907	19.480
55	251.517	30.410
60	276.899	61.601
64	296.214	-

Los tres ejemplos de tarifas han sido generados considerando las siguientes hipótesis generales:

- Carencia (c): 1 año
- Plazo de espera (s) 30 días
- Tipo de interés anual <sup>167</sup>(1): 2,60%
- Probabilidad entrada en dependencia <sup>168</sup>(2):  $d_x$  NNHS

## 5. SELECCIÓN MÉDICA DE RIESGOS EN EL SEGURO DE COMO CONTROL DE LA ANTISELECCIÓN

Los principios de la selección de riesgos son, en cierto modo, una simple aplicación de normas de sentido común que nos permiten ante todo evitar el intento de especulación o fraude, siendo especialmente importante en los nuevos productos, ya que, la falta de volumen hace que las posibles desviaciones de siniestralidad tengan un mayor impacto en la rentabilidad de la línea de negocio.

<sup>167</sup> Tipo de interés máximo publicado por la DGS para el cálculo de la provisión matemática de vida en 2009.

<sup>168</sup> Tasas de prevalencia dependencia ajustadas partiendo de Tabla National Nursing Home Survey de 1985.

Los seguros privados son contratos aleatorios basados en la buena fe de ambas partes. Que si bien comportan un riesgo para los intervinientes en función de la incertidumbre de la ocurrencia o no del hecho asegurado, supone, en cierto modo que siempre exista una discrepancia entre ambas partes puesto que será el asegurado quien tiene el poder de decisión en cuanto a: cuándo asegurarse, dónde asegurarse, por qué importe, y mediante qué declaraciones.

Así pues, tendremos que evitar la posible antiselección, es decir, que el conjunto de la cartera nos produzca una siniestralidad superior a la prevista, ya sea por un número anormalmente alto de siniestros prematuros o por un aumento de siniestralidad en los capitales más altos.

Como en todo seguro la selección de riesgos resulta imprescindible como primera medida de control del riesgo y de verificación de que los parámetros establecidos en el establecimiento de la prima del producto se mantienen.

Las políticas gubernamentales pueden tener una implicación importante en el desarrollo del seguro, como podrían ser la prohibición de cualquier tipo de exclusión o la exigencia de beneficios mínimos. Así pues, dichas políticas deberán tenerse muy presentes también a la hora de su repercusión en las posibilidades de hacer o no una buena selección de riesgos y ser contempladas en la determinación de la prima.

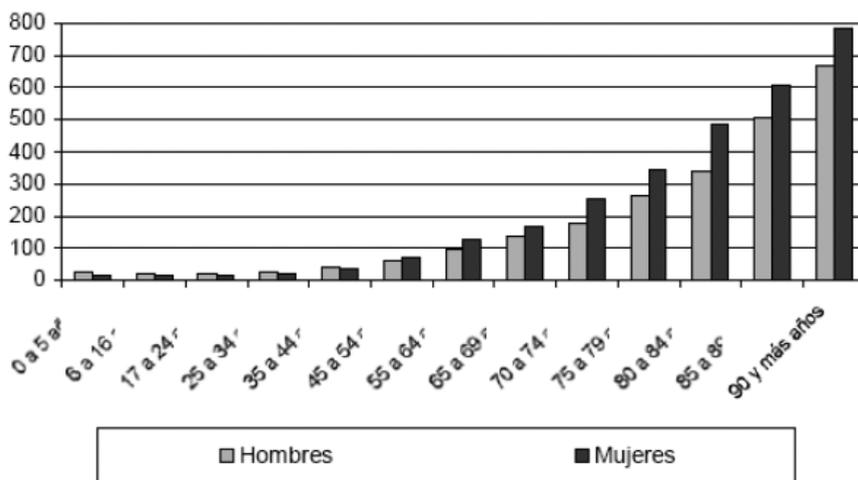
### **5.1. Algunas particularidades técnicas/médicas del seguro de dependencia**

El seguro de dependencia puede adquirir muchas formas y puede ser vendido como póliza individual o colectiva, puede emitirse con póliza independiente o como un contrato complementario a un seguro de vida bajo la forma de un anticipo de capital de dicho seguro pagadero a plazos, y esto también puede influir en las distintas maneras de plantear o realizar la selección de los riesgos a asegurar.

## 5.2. Impacto del estado de salud de los asegurados

### Personas con discapacidad por edad y sexo

Tasas por mil habitantes



Fuente: INE

Teniendo en cuenta que aunque no existen enfermedades propias o exclusivas de las personas mayores, pues en la mayoría de los casos, padecen las mismas patologías que los jóvenes, sí cambia de forma considerable la repercusión que estas ocasionan y/o el terreno donde se asientan. Como puede comprobarse en el gráfico anterior el número de personas con discapacidad se dispara a partir de los 75 años, siendo la edad media de las personas con discapacidad 64,3 años (Estudio INESE Marzo 2009).

La persona de edad avanzada tiene sus reservas orgánicas disminuidas y por lo tanto, su capacidad de adaptación y los mecanismos de defensa contra los cambios que aparecen con la presencia de una determinada enfermedad están menoscabados. Las mismas patologías producen repercusiones funcionales psíquicas y sociales en el enfermo y su entorno, muy diferentes en una persona mayor que en una joven. Por lo tanto, la manera de realizar el examen de un candidato a un seguro de dependencia será muy diferente de la forma

tradicional que hasta ahora se viene haciendo para un seguro de vida y/o invalidez.

En las personas mayores, la incidencia de enfermedades es mucho más alta que entre las personas jóvenes, como también son mucho más frecuentes las pluripatologías. Las personas mayores padecen una serie de complicaciones que a veces adquieren más importancia incluso que la enfermedad de base que las ha desencadenado, pudiendo acabar en la cronicidad, en la invalidez y finalmente en la dependencia.

Todos estos elementos, enfermedad somática, capacidad funcional y problemática mental y social deben ser valorados para la aceptación de un candidato a un seguro de dependencia.

### **5.3. Impacto de la situación intelectual (cognitiva) de los asegurados**

Debemos diferenciar tres funciones: la función afectiva, la intelectual y la perceptiva. A saber,

#### *- Función afectiva y motivación:*

Es el estado de humor del individuo, y la causa de dos de las alteraciones más frecuentes en las personas mayores: la depresión y la ansiedad. Alteraciones que se pueden presentar ya sea constituyendo en si mismas la enfermedad, ya sea como afecciones somáticas o psíquicas consecuencia de otra afección que esté presente.

#### *- Función cognitiva o intelectual:*

Es la función del individuo gracias a la cual es capaz de entender, recordar, orientarse en el tiempo y en el espacio, calcular, comunicarse, resolver problemas, etc. Esta capacidad se analiza mediante pruebas sencillas predeterminadas por los geriatras y existen muchos modelos de test para su valoración.

- *Función perceptiva:*

Capacidad de ver y oír. Dos de las funciones que generalmente están alteradas en las personas mayores y que, a pesar de ser una circunstancia lógica del envejecimiento, pueden ocasionar, en las fases más extremas, una importante discapacidad repercutiendo de forma muy marcada en la vida social de los afectados y en su estado de ánimo.

#### **5.4. Impacto de la situación funcional de los asegurados**

Debemos diferenciar dos funciones: la física o funcional y los factores biomédicos, siendo

- *Factores biomédicos:*

Sería la valoración de la situación física de una persona, considerando las enfermedades somáticas. Esta valoración se efectúa por medio de una historia clínica clásica: la anamnesis, el examen físico y los exámenes complementarios.

- *Función física o funcional:*

Es la aptitud de la persona para realizar las actividades de la vida diaria, idea sobre la que se basa el seguro de dependencia y la que por tanto, merecerá toda nuestra atención.

Las actividades de la vida diaria comprenden varios actos y vendrán definidos en el producto de dependencia que se esté comercializando. Será por tanto de vital importancia una correcta definición de los mismos, así como una definición de lo que se entiende por incapacidad para realizarlos.

En general se han determinado seis actividades cotidianas o de la vida diaria que son las siguientes:

– **Bañarse:** La capacidad de lavarse en la bañera o en la ducha (incluyendo entrar y salir de la bañera o ducha) o lavarse por otros medios.

- **Vestirse:** La capacidad de ponerse, quitarse, abrocharse y desabrocharse todas las prendas y, cuando proceda, la capacidad de ponerse o/y quitarse tirantes, miembros artificiales o dispositivos ortopédicos.
- **Ir al baño:** La capacidad de usar el inodoro o de controlar la función de micción y defecación a través del uso de ropa íntima o aparatos ortopédicos, si procede.
- **Transferencia:** La capacidad de moverse/trasladarse de una cama a una silla o silla de ruedas y viceversa.
- **Movilidad:** La capacidad para moverse dentro de una habitación o de trasladarse de una habitación a otra en superficies niveladas.
- **Alimentación:** La capacidad de alimentarse por sí mismo una vez que los alimentos se ha preparado y puesto a disposición.

## 5.5. Impacto de la situación medioambiental de los asegurados

La consideración de factores psicosociales es quizás una de las principales diferencias de la selección del seguro de dependencia, respecto a la selección de los seguros de vida, ya que cobran un papel protagonista en la valoración de las personas mayores. Se trata de analizar las actividades que desarrolla y las relaciones con que cuenta el asegurado, estudiando su capacidad de relacionarse en sociedad, de gestionar sus recursos, su vivienda, sus actividades sociales como ir al cine, a la iglesia.

Estas actividades pueden variar enormemente de una persona a otra y de una cultura a otra dependiendo también de su clase social o del sexo, y nos darían a su vez entrada a la valoración de las *actividades instrumentales de la vida diaria (AIVD)* como pueden ser:

- Telefonar
- preparar la comida

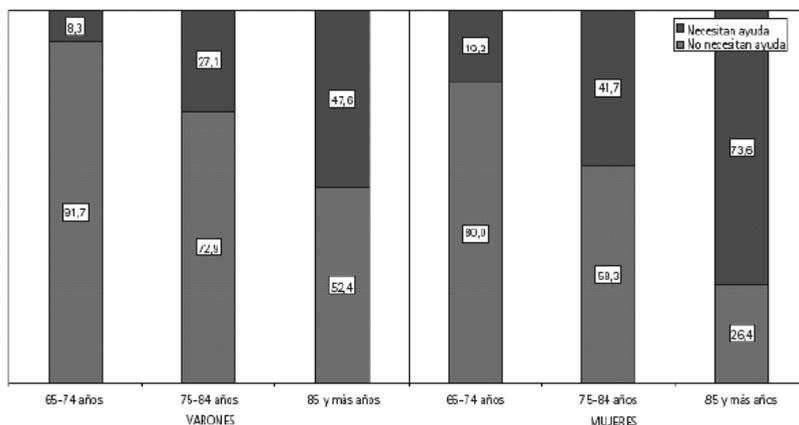
- llevar sus finanzas
- realizar las tareas del hogar
- hacer la colada
- usar el transporte público
- hacer la compra
- tomar las medicinas

## 5.6. Herramientas de suscripción

Según la encuesta de Condiciones de Vida de los mayores de 2004 realizada por el INSERSO, el 26,5% de las personas de 65 años o más necesitan ayuda para realizar una o varias de las actividades de la vida diaria.

En el gráfico siguiente presentamos las personas con alguna dificultad para realizar alguna de las AVD por edad y sexo.

*Personas mayores con alguna dificultad para las actividades de la vida diaria, por edad y sexo, 2004*



1) Una persona puede tener dificultad para unas actividades y no para otras.

Fuente: Observatorio de Mayores-INSERSO, Encuesta sobre Condiciones de Vida de los Mayores, julio 2004.

Los solicitantes de seguros de dependencia serán en su mayoría personas mayores por lo que su suscripción requiere un enfoque que no es el que normalmente se aplica a los seguros tradicionales de vida

y/o salud. Es necesario que el suscriptor de pólizas de dependencia adquiriera unos conocimientos y tenga un perfil diferente al suscriptor tradicional de seguros de vida y/o salud ya que la evaluación biomédica de una persona mayor se aparta en algunos aspectos de la evaluación médica tradicional.

Es por lo tanto imprescindible, para poder comprender los hallazgos médicos, que el evaluador tenga un profundo conocimiento de los cambios normales relacionados con el envejecimiento y unos conocimientos especiales sobre las enfermedades de las personas mayores, y sobre todo y especialmente, una información muy detallada sobre la evaluación de los aspectos biológicos, funcionales, psicológicos y sociales que deben documentarse en una historia clínica.

#### a) Cuestionarios especiales

Las fuentes de información tradicionales no serán suficientes para la dependencia. Por lo tanto, es esencial utilizar métodos e informes diseñados específicamente para este producto a fin de obtener los detalles necesarios. Por ejemplo, cuestionarios de salud especialmente diseñados para mayores donde se haga especial hincapié en las habilidades funcionales; informes médicos que incluyan test mentales y pruebas cognitivas, informes de los médicos de cabecera de los asegurados donde se pueda analizar todo su historial médico. Estos, además, deberán ser revisados periódicamente para garantizar que las mejoras en la calidad de vida y la medicina se incorporan.

#### b) Exámenes de valoración especiales

En el seguro de dependencia y como se ha mencionado anteriormente, cobra vital importancia la valoración de la función cognitiva. Un deterioro prolongado puede dar lugar reclamaciones pero además, las primeras etapas de deterioro cognitivo son difíciles de detectar (los primeros síntomas pueden ser un disparador para la búsqueda de un

seguro) y el diagnóstico suele establecerse en fase posterior. De ahí que algunos productos contemplen periodos de carencia especiales.

Los sistemas utilizados pueden ser diferentes y pasan por: entrevistas personales, conferencias telefónicas, test psicológicos especializados, cuestionarios muy específicos diferentes para personas en activo o pasivos, cuestionarios específicos con información complementaria por patologías.

c) Medida de la capacidad para realizar las actividades de la vida diaria (AVD)

En la actualidad, existen en el mundo de la geriatría muchos exámenes especiales que permiten un diagnóstico biomédico, psíquico, funcional y social como son:

*Test valoración actividades de la vida diaria:*

- Cuestionario del Ministerio de Asuntos Sociales para la determinación del grado de dependencia.
- Índice de KATZ (actividades básicas de la vida diaria).
- Índice de Barthel para la evaluación de las actividades de la vida diaria.
- Test Mental de Folstein (Mini-mental state examination).

*Test valoración actividades instrumentales de la vida diaria:*

- Test de Duke OARS (Older American Resources and Services)
- Test de Lawton para medir nueve actividades instrumentales de la vida diaria.
- El FIM (Functional Independence Measure): mide dieciocho actividades instrumentales de la vida diaria.

## 5.7. Posibilidades de tarificación

Existen distintos Manuales de Tarificación de este riesgo, pero en general debemos pensar que cada afección o patología debe valorarse de forma separada según sus propias características.

En la mayoría de los casos, la tarificación de riesgos agravados se realizarán sobre la base de un diagnóstico confirmado. Sin embargo, puede ocurrir que, sin que exista un diagnóstico cierto, se presenten en el momento del examen una serie de sintomatologías que nos indiquen la presencia de una determinada patología que deberá ser tenida en cuenta.

Las etapas para proceder a una correcta tarificación de un riesgo serán:

- localizar la afección
- revisar toda la información médica disponible
- verificar los criterios de asegurabilidad
- proceder a la aplicación de la correspondiente sobreprima

### Exclusiones

Además de exclusiones propiamente dichas, puede haber otro tipo de salvaguardias o guardianes como pueden ser el requisito de hospitalización previa, o el periodo de carencia y los límites máximos de prestaciones de vida o el copado de alguno de los servicios prestados.

La exclusión de las condiciones preexistentes por un periodo específico después de la emisión de la póliza es también un posible guardián comúnmente utilizado en seguros de enfermedad o invalidez y por lo tanto perfectamente aplicable a los seguros de dependencia.

Puesto que las enfermedades mentales son difíciles de verificar y presentan un potencial de siniestro a largo plazo muchos de los seguros

actuales de dependencia no las cubren, o establecen periodos de carencia especiales.

## 5.8. Siniestros

Debido a la naturaleza médica del evento asegurado, la experiencia en el manejo de los siniestros será de mucho valor en este caso. Cuanto mayor sea la experiencia de la entidad aseguradora en la gestión de siniestros por incapacidad, tanto más sofisticada podrá ser la cobertura ofertada para dependencia.

Además, es clave que en el diseño de la póliza se hayan introducido de forma clara y objetiva la definición de los riesgos cubiertos y las prestaciones a las que dan lugar, así como el procedimiento que se va a seguir en la tramitación y en su caso el procedimiento de arbitraje para resolver posibles desacuerdos.

Como en el caso de la selección de riesgos, la gestión de los siniestros de dependencia también requiere una serie de *cuestionarios especiales* destinados a confirmar la existencia o no de dicha situación en cada una de las actividades de la vida diaria.

Será por lo tanto imprescindible valorar cada una de las actividades de forma independiente:

### Bañarse

- Independiente: necesita ayuda para lavarse una sola parte (espalda o una extremidad incapacitada) o se baña sin ayuda.
- Dependiente: necesita ayuda para lavarse más de una parte del cuerpo, para salir o entrar en la bañera o no se lava solo.

### Vestirse

- Independiente: coge la ropa solo, se la pone, se pone adornos y abrigos y usa cremalleras (se excluye atarse los zapatos).
- Dependiente: no se viste solo o permanece vestido parcialmente.

### Ir al baño

- Independiente: accede al retrete, entra y sale de él, se limpia los órganos excretores y se arregla la ropa (puede usar o no soportes mecánicos). Control completo de micción y defecación.
- Dependiente: usa orinal o cuña o precisa ayuda para acceder al retrete y utilizarlo. Sufre de incontinencia urinaria o fecal parcial o total.

### Transferencia

- Independiente: entra y sale de la cama y se sienta y levanta de la silla solo (puede usar o no soportes mecánicos).
- Dependiente: precisa de ayuda para utilizar la cama y/o silla; no realiza uno o más desplazamientos.

### Movilidad

- Independiente: Se puede trasladar por sí mismo o con pequeñas ayudas.
- Dependiente: Precisa de aparatos o sujeciones para su traslado

### Alimentarse

- Independiente: lleva la comida desde el plato o su equivalente a la boca (se excluyen cortar la carne y untar la mantequilla o similar).
- Dependiente: precisa ayuda para la acción de alimentarse o necesita de alimentación enteral o parenteral. Donde *independiente* significa sin supervisión, dirección o ayuda personal activa.

## 6. CONCLUSION

En este artículo se ha hecho un recorrido detallado por los diversos elementos a considerar en el proceso de diseño de productos para la cobertura de la dependencia, desde la óptica del ramo de vida, que ofrecen financiación para afrontar los servicios de dependencia.

Conscientes del reto y oportunidades que un nuevo riesgo representa para el sector de seguros, y la ausencia de experiencias significativas

en el mercado español, hemos sugerido alternativas en base a experiencias de países de nuestro entorno.

Hemos analizado tres productos, que ante situaciones de dependencia, establecen una prestación económica que puede facilitar el copago que establece el SAAD. Con una definición simple y objetiva del producto, facilitando así una primera aproximación a la cobertura del riesgo de dependencia para las compañías.

Y por último, conscientes de la importancia que en el resultado de estas líneas de negocio tienen el proceso de suscripción y de tramitación de siniestros, hemos tratado de describir de forma muy general los diversos aspectos del proceso de selección de riesgos y la gestión del siniestro en el seguro de dependencia.

El objetivo principal ha sido no tanto profundizar o transmitir unos conocimientos fundamentales, sino más bien despertar el interés en este producto a pesar de las muchas incertidumbres que le rodean.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Pociello García, Enrique; Varea Soler, Javier. Seguro de Dependencia una visión General. Cuadernos de la Fundación Mapfre N°18. Madrid: FUNDACION MAPFRE, 2004.

Dullaway, David; Elliott Susan. Long Term Care Insurance: A Guide to Product Design and Pricing. Presented to the Staple Inn. Actuarial Society, UK. 1998.

Blay Berrueta, Daniel. Sistemas de cofinanciación de la dependencia: seguro privado frente a la hipoteca inversa. Instituto de Ciencias del Seguro. FUNDACION MAPFRE, 2007.

Herranz Peinado, P.; Guerrero Casas, F; Segovia González, M.M. *Modelización financiero-actuarial de un seguro de dependencia*. Revista de métodos cuantitativos para la economía y la empresa. Págs. 42-73. Diciembre 2008.

Boladeras i Vallés, Joan. *Una primera aproximación a las bases biométricas para el seguro de dependencia en España*. Anales del Instituto de Actuarios.2004

Artís, Manuel; Ayuso, M. ; Guillén, M.; Monteverde, M. *Una estimación actual del coste individual de la dependencia en la población de mayor edad en España*. ESTADISTICA ESPAÑOLA. Vol. 49. Núm.165, 2007, Págs. 373 a 402.

Albarrán, I.; Alonso, P.; Bolance, C. Población Dependiente española según la edad: Análisis y clasificación. Anales IAE. 2006

Mercantile& General. Long Term Care Product Development Issues. M&G 1995

Long Term Care Experience Committee. Intercompany Study 1984-2004. Society of Actuaries. USA. 2007. <http://www.soa.org>

Long-Term Care Insurance Valuation Methods. Transactions of Society of Actuaries 1995 Vol. 47.

Long Term Care Opportunity. Swiss Re Life & Health. London 1998  
[http:// www.life.swissre.com](http://www.life.swissre.com)

Chan, P.Y. El Seguro de Cuidados a largo Plazo - Servicio de publicaciones de Swiss Re 1999.

Dr. Villanueva, Víctor. *Evaluación del paciente anciano .Publicaciones UNNE 2000 .*

Swiss Re. Long Term Care Underwriting Seattle Spring Meeting. Swiss Re June 1999.

INESE. DEPARTAMENTO DE INVESTIGACION. Dependencia y Servicios Socio sanitarios en el Sector Asegurador. INESE. MADRID, Marzo 2009.

IMSERSO. *Indicadores Estadísticos básicos 2008*. Informes portal de mayores. Nº 89. Publicación: 04/02/2009.  
[www.imsersomayores.csic.es](http://www.imsersomayores.csic.es)



## Ponencia 34

### EL BALANCE ACTUARIAL DEL SISTEMA DE REPARTO. MODELO “SUECO” VERSUS “AMERICANO”<sup>169</sup>

Carlos Vidal-Meliá y María del Carmen Boado-Penas

#### RESUMEN

El objetivo de este trabajo es mostrar la conveniencia de incorporar al sistema de pensiones de reparto la obligatoriedad de elaborar un balance actuarial anual, con el fin de mejorar su transparencia y solvencia, lo que enlaza con la tendencia que se aprecia en algunos países desarrollados que intenta implantar metodología típica del análisis actuarial al campo de la gestión pública de los sistemas de reparto. Asimismo, se pretende arrojar luz sobre los dos métodos principales que aplican las administraciones públicas de la S.S. para formular el balance actuarial realizando especial hincapié en sus enfoques metodológicos y aspectos actuariales aplicados. La principal conclusión alcanzada es que la obligación de formular anualmente el balance actuarial obliga a los políticos a ser mucho más cuidadosos en sus manifestaciones y a renunciar al ejercicio del populismo en pensiones, mientras que los cotizantes y pensionistas tienen una estimación fundada de cuál puede ser el grado de cumplimiento de las promesas que se les realizan respecto al pago de sus pensiones. (JEL: H55, J26, M49).

---

<sup>169</sup> Los autores agradecen a Juan Francisco Jimeno y a Cio Patxot las discusiones que han desembocado en el nacimiento de este trabajo. Esta versión forma parte de un trabajo de mayor alcance que los autores están realizando junto con Ole Settergren y Junichi Sakamoto a los que reconocen expresamente la ayuda proporcionada. Carlos Vidal-Meliá agradece la ayuda financiera recibida del proyecto SEJ2006-0505 del Ministerio de Ciencia e Innovación. María del Carmen Boado-Penas agradece la financiación del Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco (IT-313-07).

# THE ACTUARIAL BALANCE OF THE PAY-AS-YOU-GO PENSION SYSTEM: “AMERICAN” MODEL VERSUS “SWEDISH” MODEL

## ABSTRACT

The aim of this paper is to show the advisability of making it compulsory to draw up an actuarial balance in pay-as-you-go pension systems so as to improve their transparency and solvency. This is in line with the trend seen in some developed countries of trying to introduce actuarial analysis methodology into the field of public pay-as-you-go pension system management. The paper also aims to shed some light on the two main methods used by government Social Security departments to draw up the actuarial balance, focusing especially on their methodology and actuarial issues. The main conclusion reached is that making it mandatory for the actuarial balance to be drawn up every year would force politicians to be a lot more careful about what they say and encourage them to avoid the use of populism in pensions. Contributors and pensioners, on the other hand, would have a reliable way of measuring to what degree the promises made to them regarding payment of their pensions are actually kept.

## 1. INTRODUCCIÓN

La mayor exigencia social de transparencia en el ámbito de la gestión financiera pública, la necesidad de proteger el sistema de reparto del riesgo político al que está sometido y el deseo de transmitir credibilidad a los cotizantes y pensionistas, en el sentido de que las promesas de pago de pensiones tengan expectativas razonables de ser cumplidas, invitan a que se apliquen al sistema de pensiones vigente nuevos instrumentos de gestión.

El denominado balance actuarial del sistema de reparto, Boado-Penas (2008) y Vidal-Meliá et al (2009b), proporciona cumplida respuesta a las cuestiones planteadas y además provee de incentivos positivos,

para la mejora de la gestión, al minimizar la tradicional divergencia entre el horizonte de planificación de los electores y de los políticos y el del propio sistema en sí. En este trabajo se realiza exclusiva referencia a lo que se describirá como balance actuarial del sistema de reparto, prestando especial interés a los denominados modelos “sueco” y “americano”.

Según BOT (2008), en EE.UU. desde 1941 se realiza un balance actuarial anual muy detallado que incluye a partir de 2002 metodología estocástica. El denominado balance actuarial “americano”, formulado por la Seguridad Social de los Estados Unidos, que es similar al que presentan las administraciones de Japón cada cinco años (Sakamoto (2005)) y Canadá cada tres años (OSFIC (2005 y 2007)), no es un balance en el sentido contable clásico del término, con un listado de activos y pasivos que consideran un horizonte indefinido.

La formulación del balance actuarial de forma oficial es una práctica que se realiza en Suecia desde el año 2001. Este balance actuarial, tal y como se elabora en Suecia, ha recibido hasta el momento una escasa atención por parte de los académicos. Este hecho parece sorprendente dado que en la literatura existe una gran cantidad de metodologías que se aplican para analizar la viabilidad o sostenibilidad de los sistemas de pensiones o para proyectar su gasto agregado, y este campo de investigación es de especial interés para numerosos investigadores. Hasta donde alcanza nuestro conocimiento, sólo para el caso de Japón<sup>170</sup> y España<sup>171</sup> el balance actuarial en su estructura típica de activos y pasivos ha sido utilizado por investigadores, mientras que en el plano oficial su aplicación no ha salido fuera del ámbito de Suecia.

---

<sup>170</sup> Takayama (2005) utiliza el balance actuarial como elemento de análisis de las propuestas de reforma del sistema de pensiones, aunque el detalle que presenta de las partidas que lo forman no está muy desarrollado.

<sup>171</sup> Boado et al. (2008) construyen el balance actuarial para evaluar la solvencia del sistema español y lo comparan con el de Suecia. Asimismo, desarrollan el concepto de activo por cotizaciones y el de período medio de maduración para los sistemas de reparto de prestación definida. Vidal-Meliá et al (2009a) utilizan el balance actuarial del sistema español para proponer la aplicación de un mecanismo de ajuste automático (MFA).

Sin ánimo de ser exhaustivos, las metodologías más utilizadas para realizar proyecciones agregadas del gasto en pensiones y/o analizar la viabilidad o solvencia del sistema de reparto de acuerdo con la información extractada básicamente de Lefebvre (2007), TEPC (2007) y Jimeno et al. (2008), son:

- 1) Modelos contables agregados: Según Domenech y Melguizo (2008), este enfoque se apoya en diferentes hipótesis sobre la economía en su conjunto, en especial las futuras tendencias en la demografía (tasas de fertilidad, flujos migratorios y evolución de la esperanza de vida), en las condiciones económicas (tasa de actividad y empleo, salarios, productividad y tipos de interés) y en los denominados factores institucionales (nivel de cobertura del sistema y cuantía de las pensiones). Se utilizan fundamentalmente para realizar proyecciones agregadas del gasto en pensiones. Pese a que estos modelos van evolucionando hacia una creciente complejidad mediante la introducción de heterogeneidad, su principal ventaja es la sencillez de aplicación y su facilidad para reproducir la realidad del sistema de pensiones. Se suelen denominar por algunos autores modelos actuariales. Son también muy utilizados por organismos y administraciones públicas, el Ageing Working Group, grupo técnico de trabajo del comité de política económica de la Unión Europea, responsable de las proyecciones de gasto sigue este enfoque fundamentalmente determinista, aunque no todos los países lo aplican.
- 2) Modelos de micro simulación: Por medio de la trayectoria laboral de un conjunto de individuos se proyecta la evolución de sus pensiones. Existen variantes, Zaidi y Rake (2001), microsimulación dinámica, estática, con comportamiento, etc... Conexiónados con los modelos de microsimulación aparecen los modelos de contabilidad generacional, como el que se aplica en Eslovenia. En muchas ocasiones es difícil distinguir algunos modelos híbridos que presentan características de este modelo y de los modelos contables agregados. Francia y Suecia<sup>172</sup> utilizan modelos de micro simulación.

---

<sup>172</sup> En el informe anual del sistema de pensiones de Suecia se realizan proyecciones de la posible evolución futura del sistema, aunque sus resultados no influyen en la toma de decisiones. El balance actuarial es, véase en el siguiente epígrafe, el elemento fundamental informativo del sistema de pensiones sueco.

- 3) Modelos de equilibrio general: El sistema de pensiones se inserta dentro de un entorno económico de equilibrio general con precios endógenos que genera modelos explícitos de la evolución demográfica y macroeconómica. Los principales inconvenientes de estos modelos son: complejidad computacional, sensibilidad respecto a las hipótesis y alejamiento manifiesto de la realidad del sistema de pensiones, lo que hace que se apliquen de manera muy escasa por organismos oficiales, aunque la excepción puede encontrarse en Holanda, donde se aplica un modelo de este tipo.
- 4) Modelos indirectos: Basados principalmente en el tanto interno de rendimiento o el componente de transferencia, y que se aplican mayormente para estudiar la equidad.

El objetivo de este trabajo es mostrar la conveniencia de incorporar al sistema de pensiones de reparto la obligatoriedad de elaborar un balance actuarial anual, con el fin de mejorar su transparencia y solvencia, lo que enlaza con la tendencia que se aprecia en algunos países avanzados que intenta implantar metodología típica del análisis actuarial al campo de la gestión pública de los sistemas de reparto. Asimismo, se pretende arrojar luz sobre los dos principales métodos que aplican las administraciones públicas de la S.S. para formular el balance actuarial, realizando especial hincapié en sus enfoques metodológicos y aspectos actuariales aplicados.

Con el fin de cumplir con el objetivo establecido, después de esta breve introducción, en el epígrafe segundo se define y conceptualiza el denominado modelo “sueco”, prestando especial atención al balance y a la cuenta de resultados actuarial, hipótesis fundamentales y aspectos actuariales de formulación. En el tercer epígrafe se describen, definen y presentan los aspectos fundamentales del denominado balance actuarial “americano”, y se realiza una comparación con el modelo “sueco”. El trabajo finaliza con las principales conclusiones alcanzadas, y tres apéndices en los que se desarrollan analíticamente las principales fórmulas aplicadas para el para el cálculo del activo por cotizaciones y el pasivo del sistema en el balance actuarial de Suecia, y una expresión simplificada del balance actuarial de EE.UU.

## 2. EL BALANCE ACTUARIAL DEL SISTEMA DE REPARTO: EL MODELO “SUECO”

Tal y como se elabora en Suecia, el balance actuarial del sistema de pensiones de reparto no se encuadra dentro de ninguno de los métodos brevemente descritos en la introducción, y se puede definir como el estado financiero que relaciona las obligaciones con los cotizantes y pensionistas del sistema de pensiones a una fecha determinada, con las magnitudes de los diferentes activos (financieros, reales y por cotizaciones) que respaldan esas obligaciones.

El balance actuarial tiene como misión principal ser la imagen fiel del patrimonio del sistema al principio y al final del ejercicio económico, y por comparación determinar el resultado. En cualquier caso, es un modelo de gestión y de información externa, pues no sólo es de utilidad para la autoridad que gobierna el sistema sino también para el conjunto de los cotizantes y pensionistas, y para quién garantiza los pagos, es decir para el Estado y los contribuyentes que él representa.

Básicamente las grandes partidas que integran el balance actuarial son las que figuran en la tabla 1:

**Tabla 1**  
**Partidas principales del balance actuarial del sistema de reparto**

ACTIVO	PASIVO
Activo Financiero y Real	Pasivo con los pensionistas
Activo por Cotizaciones	Pasivo con los cotizantes
Déficit Acumulado	Superávit Acumulado
Pérdida anual	Beneficio anual
<b>Total Activo</b>	<b>Total Pasivo</b>

En general se puede afirmar que un sistema de pensiones de reparto es razonablemente *solvente*, siempre que:  $(\text{Activo Financiero y Real} + \text{Activo por Cotizaciones}) \geq (\text{Pasivo con los pensionistas} + \text{Pasivo con los cotizantes})$  lo que implica que el déficit acumulado tiene que ser nulo. Bajo este sistema, los cotizantes y pensionistas a la fecha de referencia del balance actuarial, tienen expectativas fundadas de cobrar

lo prometido sin necesidad de que el promotor del sistema (el Estado) haga contribuciones. Parece claro que la solvencia nunca está completamente asegurada en el largo plazo ya que tanto los activos como los pasivos no se conocen en toda su amplitud.

En este epígrafe la solvencia del sistema de pensiones se define como la capacidad razonable del sistema de cumplir sus compromisos sin que el promotor tenga que aportar recursos extraordinarios para cubrir el déficit actuarial, y/o la aptitud de poder desarrollar su actividad (recaudar cotizaciones y pagar pensiones) sin tener que modificar su parámetros básicos o lo que es lo mismo sus bases técnicas.

Es relevante destacar que la identificación entre los conceptos de solvencia y sostenibilidad no es inmediata. De acuerdo con Knell et al. (2006), el término sostenibilidad tiene muchas definiciones, casi siempre referidas a la política fiscal del sector público, del gobierno o del sistema público de pensiones. Uno de lo más aceptados en el ámbito de las pensiones se define como “la situación en la que no se considera elevar la tasa de cotización en el futuro”. Esta definición sería plenamente aplicable a los sistemas de cuentas nocionales (NDC), pero no a los sistemas de prestación definida (DB).

El elemento más novedoso del balance del sistema de reparto es una de las partidas del activo, denominado “Activo por Cotizaciones”; “Contribution Asset” en nomenclatura anglosajona. Deriva de enlazar activos y pasivos, y es el resultado de una fórmula que indica la magnitud tanto del activo como del pasivo cuando el sistema de pensiones está en equilibrio actuarial y es financiado por reparto puro, bajo un escenario simplificado. Intuitivamente se puede interpretar como el máximo pasivo que puede ser respaldado en el largo plazo para la tasa de cotización determinada sin requerir contribuciones extraordinarias del promotor, bajo supuestos de estado estacionario.

Los activos y pasivos se valoran sobre la base de hechos verificables, a la fecha de efecto, es decir, no se realizan proyecciones. Por ejemplo, se considera la mortalidad actual, aunque se espere que la longevidad aumente. A medida que la expectativa se materialice en las nue-

vas tablas de mortalidad, ello se va incorporando a la información del balance año a año. Tampoco se considera para el cálculo del Activo por Cotizaciones, que las cotizaciones (de)crecerán de acuerdo con el crecimiento económico previsto. Esto no debe interpretarse como una creencia de que todos los parámetros fundamentales que determinan las partidas del balance permanecerán constantes en el tiempo, sino como la consecuencia de la política de no incluir los cambios hasta que se produzcan y se puedan verificar. Se sostiene que otra ventaja de este método es evitar las manipulaciones y sesgos que se pudieran dar en las proyecciones.

La experiencia de Suecia, Försäkringskassan (2002), indica que las previsiones económicas y demográficas a realizar para predecir el TIR (tanto interno de rendimiento) del sistema y la variación del salario promedio futuro no son muy ajustadas (fiables). Ni siquiera para el corto plazo se consideran capaces de realizar este tipo de predicciones con un grado de certeza o acierto alto. La capacidad para realizar este tipo de predicciones para el largo plazo, con un mínimo grado de confianza, necesarias para el sistema de pensiones, es incluso más limitada, según su criterio.

Tal y como se ha mencionado, el balance actuarial es una práctica que se realiza en Suecia desde el año 2001, su evolución para el período 2001-2007 es la que a continuación se presenta en la tabla 2. El sistema de pensiones de Suecia para la contingencia de jubilación es mixto, se destina un 86,49 % de las cotizaciones al sistema de reparto, modalidad nocional de aportación definida, y el resto, 13,51 %, al sistema de capitalización de aportación definida. El balance que se presenta se refiere exclusivamente a la parte de reparto, modalidad nocional (Inkomstpension), y a los compromisos derivados del antiguo sistema de pensiones (ATP).

El activo financiero es el valor de los activos financieros de propiedad del sistema de pensiones sueco, a la fecha de referencia del balance. La valoración se realiza de acuerdo con principios internacionalmente aceptados. Es una magnitud realmente importante para ser un sistema de reparto, alcanza el 29,3% del PIB de 2007.

El Activo por Cotizaciones se calcula de la forma descrita en el apéndice I, es decir, es el producto de las cotizaciones anuales por el “Turnover Duration” (TD). El período de maduración del sistema o TD, es el tiempo que se espera que transcurra desde que una unidad monetaria entra en el sistema en forma de cotización hasta que sale en forma de pensión, que a su vez es la suma de la permanencia de una unidad monetaria en cotización (pay in duration) y en jubilación (pay out duration)<sup>173</sup>. En Suecia, con el fin de suavizar las variaciones en el resultado anual, tanto las cotizaciones anuales, como el TD, no son estrictamente los del año en curso, sino que se promedian con los dos años anteriores. En contextos de población decreciente (creciente) el TD quedaría “ligeramente” sobreestimado (infraestimado) y consecuentemente también lo estaría el Activo por Cotizaciones en relación con los pasivos. Pero como cada año se formula el balance sobre la base de los datos y hechos verificables, el balance tiende a proporcionar con rapidez la imagen fiel. El estado estacionario demográfico y económico no es real, pero debido a que los cambios son muy lentos y que se van recogiendo gradualmente en los sucesivos balances actuariales, el indicador de solvencia conserva plena validez.

---

<sup>173</sup> Véanse los detalles de cálculo en el apéndice I.

**Tabla 2**  
**Balance actuarial a 31-12 de cada año del sistema de pensiones de Suecia**  
**(ATP y Inkomstpension) para el período 2001-2007**  
**en millones de coronas suecas**

Fecha	2007	2006	2005	2004	2003	2002	2001
<b>ACTIVO</b>							
<b>Activos Financieros (F)</b>	898.472	857.937	769.190	646.200	576.937	487.539	565.171
<b>Activo por Cotizaciones (AC)</b>	6.115.970	5.944.638	5.720.678	5.606.592	5.465.074	5.292.764	5.085.252
<b>Pérdidas actuariales (Tabla 3)</b>	81.607	-----	-----	49.029	-----	166.762	-----
<b>Total Activo</b>	<b>7.096.049</b>	<b>6.802.575</b>	<b>6.489.868</b>	<b>6.301.821</b>	<b>6.042.011</b>	<b>5.947.065</b>	<b>5.650.423</b>
<b>PASIVO</b>							
<b>Pasivo por cotizaciones (AD)</b>	4.909.569	4.750.749	4.612.959	4.486.030	4.313.706	4.157.021	3.942.873
<b>Pasivo por pensiones (DD)</b>	2.086.915	1.952.261	1.848.517	1.757.979	1.670.493	1.571.637	1.489.143
<b>Superávit acumulado</b>	99.565	28.392	8.783	57.812	51.645	218.407	218.407
<b>Beneficio actuarial</b>	-----	71.173	19.609	-----	6.167	-----	
<b>Total Pasivo</b>	<b>7.096.049</b>	<b>6.802.575</b>	<b>6.489.868</b>	<b>6.301.821</b>	<b>6.042.011</b>	<b>5.947.065</b>	<b>5.650.423</b>
<b>PIB (millones de coronas)</b>							
<b>PIB a precios de mercado<sup>174</sup></b>	<b>3.070.591</b>	<b>2.899.653</b>	<b>2.735.218</b>	<b>2.624.964</b>	<b>2.515.150</b>	<b>2.420.761</b>	<b>2.326.176</b>
<b>INDICADORES DE CAPITALIZACIÓN Y SOLVENCIA</b>							
<b>Ratio de solvencia</b>	<b>1,0026</b>	<b>1,0149</b>	<b>1,0044</b>	<b>1,0014</b>	<b>1,0097</b>	<b>1,0090</b>	<b>1,0402</b>
<b>Grado de capitalización %</b>	<b>12,84</b>	<b>12,80</b>	<b>11,90</b>	<b>10,35</b>	<b>9,64</b>	<b>8,51</b>	<b>10,40</b>
<b>(Pasivo por cotizaciones/ Total Pasivo)%</b>	<b>70,2</b>	<b>70,9</b>	<b>71,4</b>	<b>71,8</b>	<b>72,1</b>	<b>72,6</b>	<b>72,6</b>

Fuente: Försäkringskassan (2008), (2007), (2006), (2005), (2004), (2003), (2002) y elaboración propia. Los totales no necesariamente coinciden con las sumas de las cantidades redondeadas

<sup>174</sup> Se introduce esta magnitud con el fin de que el lector tenga una referencia del tamaño del sistema de pensiones de jubilación en relación al de la economía de Suecia.

El pasivo por cotizaciones es el capital nocional acumulado en las cuentas de los cotizantes y el derivado de los compromisos con cotizantes por el antiguo sistema (véase apéndice II), y el pasivo por pensiones es el valor actualizado de las pensiones a pagar a los actuales pensionistas teniendo en cuenta la esperanza de vida actual y el tipo de interés técnico real a aplicar<sup>175</sup> (1,6%, que es tipo de interés real que se considera para el cálculo de la cuantía de la pensión inicial, y es coincidente con el crecimiento previsto real del salario promedio en el futuro). El pasivo por cotizaciones representa el 70,2% sobre el pasivo total.

Tal y como se puede apreciar en el balance (tabla 2), el grado de capitalización ( $F/(AD+DD)$ ) del sistema sueco es notable, alcanza el 12,84% de los pasivos para 2007. Esto permite afrontar los posibles desajustes anuales entre ingresos y gastos del sistema con venta de activos financieros, resultando improbable tener que recurrir a financiación ajena, sea al Estado o al mercado financiero.

El superávit acumulado es el “beneficio acumulado” o patrimonio neto del sistema de pensiones, que es de propiedad del patrocinador del sistema, en este caso el Estado. Según se muestra en la Tabla 3, el beneficio o pérdida actuarial del sistema en un ejercicio, es la diferencia entre el incremento de los activos y el incremento de los pasivos durante el período. La pérdida también es idéntica al incremento en el Déficit Acumulado, o a la reducción del “Superávit Acumulado”, según el caso. Es muy importante no confundir este beneficio o pérdida con el déficit o superávit anual de caja. En la tabla 3, el déficit o superávit ordinario de caja es la diferencia entre las cotizaciones recaudadas y las pensiones pagadas. Para el año 2007, el superávit de tesorería ascendió a  $(190.416-185.653)$  4.763 millones de coronas suecas, aproximadamente el 0,16% del PIB del año. El sistema ha tenido “pérdidas” en los años 2002, 2004 y 2007, y “beneficios” durante los años

---

<sup>175</sup> No se utiliza el factor de descuento actuarial clásico, se aplica, Forsakringskassan (2002), lo que se denomina el “divisor económico” que tiene en cuenta la cuantía de las pensiones a pagar a cada edad por cada individuo, y que para el caso sueco proporciona un valor ligeramente diferente al del factor de descuento actuarial clásico. El divisor económico es coherente con la definición del TD, en el que las edades de los activos y pasivos se ponderan por sus cuantías económicas (cotizaciones y pensiones). Véase apéndice II.

2003, 2005 y 2006. El dato inicial de superávit acumulado de 2001 se obtuvo por diferencia entre la totalidad de los activos y pasivos.

**Tabla 3**  
**Cuenta de resultados actuarial a 31-12-2007 del sistema de pensiones de Suecia (ATP y Inkomstpension) en millones de coronas suecas**

ACTIVOS FINANCIEROS (variaciones)		40.535	293.474	PASIVOS FINANCIEROS (variaciones)	
Cotizaciones	190.416			194.062	Derechos devengados (cotizaciones) <sup>176</sup>
Pensiones (pagadas)	-185.653			268.334	Derechos devengados (Indexación) <sup>177</sup>
Rendimientos financieros	37.544			17.391	Derechos devengados (longevidad) <sup>178</sup>
Costes de administración	-1.772			1.008	Derechos devengados (fallecimiento) <sup>179</sup>
<b>ACTIVO POR COTIZACIONES (variaciones)</b>		<b>171.332</b>		-1.701	Costes de administración
Cotizaciones	192.905			-185.620	Pensiones (devengadas) <sup>180</sup>
T.D.	-21.573				
<b>PERDIDAS ACTUARIALES</b>		<b>81.607</b>	<b>0,0</b>	<b>BENEFICIOS ACTUARIALES</b>	
<b>Total</b>		<b>293.474</b>	<b>293.474</b>	<b>Total</b>	

Fuente: Elaboración propia basada en Försäkringskassan (2008).

Los totales no necesariamente coinciden con las sumas de las cantidades redondeadas

Por otro lado, la principal razón que se argumenta para valorar los activos y pasivos, sin contemplar el futuro, es que la posición de solvencia financiera del sistema no depende de la cuantía de los activos y pasivos por separado, sino de la relación entre ellos por medio del ratio de solvencia.

<sup>176</sup> No coincide exactamente con las cotizaciones realizadas debido a la existencia de ajustes y de la coexistencia del antiguo sistema (ATP) con el de cuentas nocionales.

<sup>177</sup> Deriva básicamente de la variación de salario medio (tanto nocional para los cotizantes) y del salario medio corregido para los pensionistas.

<sup>178</sup> Deriva de los cambios en la esperanza de vida que interviene en el denominado "divisor económico". Véase apéndice II.

<sup>179</sup> Redistribución de las cuentas nocionales de los fallecidos. Debería tener un valor 0, pero debido a ciertos problemas de periodificación tiene un valor positivo.

<sup>180</sup> El importe de las pensiones devengadas y pagadas debería coincidir exactamente, pero aparecen pequeñas diferencias debido a problemas de periodificación.

El indicador ratio de solvencia (Tabla 2) que se utiliza en Suecia emerge del balance actuarial anual y se expresa como:

$$\text{Ratio de solvencia} = \frac{\text{Activos (financieros + por cotizaciones)}}{\text{Pasivo por pensiones}} = \frac{F_t + AC_t}{AD_t + DD_t} \quad [1]$$

Tiene un doble propósito: medir si el sistema puede hacer frente a las obligaciones contraídas con los pasivos y decidir si se pone en marcha el mecanismo financiero de ajuste automático<sup>181</sup>.

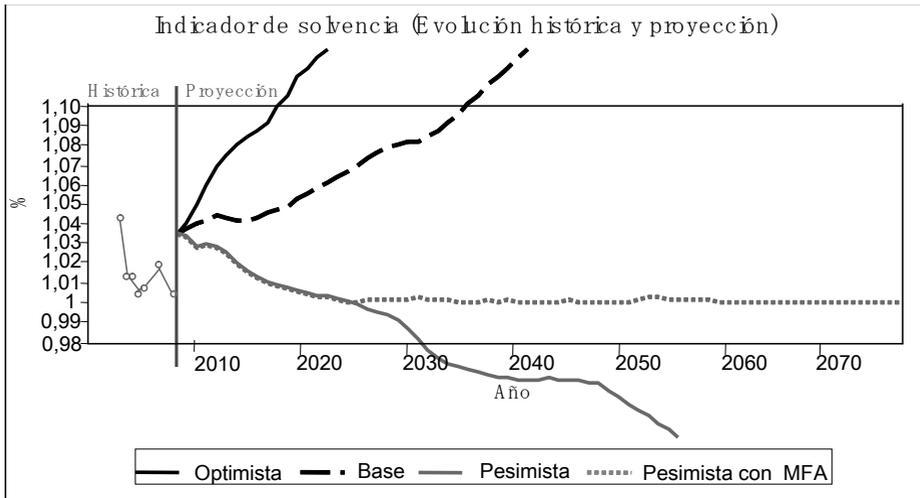
El balance actuarial del sistema de pensiones de Suecia muestra que ese sistema es solvente, dado que, a la fecha de referencia del balance, el pasivo por pensiones puede ser razonablemente sufragado con el flujo de ingresos proveniente de las cotizaciones y del stock de activos financieros, por lo que está claro que si sólo se hubiesen evaluado las obligaciones el diagnóstico sería bien distinto, sistema quebrado, sistema insolvente<sup>182</sup>. De acuerdo con el balance actuarial los cotizantes y pensionistas tienen expectativas razonables de poder cobrar las pensiones prometidas.

La evolución del ratio de solvencia en los últimos años ha sido levemente negativa, ha empeorado, y de continuar esta tendencia, el mecanismo de ajuste financiero automático podría activarse en los próximos años. Esto significaría una auténtica prueba de la solidez política del sistema.

---

<sup>181</sup> Véase el trabajo de Vidal-Meliá et al (2009a).

<sup>182</sup> De acuerdo con Barr y Diamond (2008), el análisis financiero incompleto de los sistemas de reparto “olvidando” los activos del sistema es un sinsentido.



**Gráfico 1**

Proyección del indicador de Solvencia de Suecia. Período 2008-2082

En el informe anual del sistema de pensiones sí que se realizan proyecciones (deterministas) de la posible evolución futura del sistema, se proyecta el balance actuarial, la cuantía del fondo de reserva o “buffer fund” y el déficit o superávit de caja, incluyéndose tres escenarios –normal, pesimista y optimista-, que proporcionan una información valiosa. No obstante, esta información no se utiliza para la elaboración del balance actuarial anual. Parece muy difícil justificar que la pensión disminuirá en términos reales o que la acreditación de las cotizaciones realizadas será menor de lo que debería ser sobre la base de una proyección (balance proyectado), que puede o no cumplirse.

Tal y como puede apreciarse en el gráfico 1, para el escenario base el ratio de solvencia no está previsto que baje de 1, es más después de 2037 está previsto que supere el 1,1, lo que implicaría tener que distribuir entre cotizantes y pensionistas el superávit acumulado. En el escenario pesimista, el ratio de solvencia caería por debajo de 1 en 2025, lo que obligaría a activar el mecanismo de ajuste financiero y estabilizaría el ratio en valores cercanos a la unidad.

### **3. EL BALANCE ACTUARIAL DEL SISTEMA DE REPARTO: EL MODELO “AMERICANO”**

La metodología que se utiliza para su elaboración estaría encuadrada en lo que se califica como modelo de proyección del gasto en pensiones contable agregado o también modelo actuarial. Básicamente, a partir del escenario demográfico previsto se determina la evolución futura del número de cotizantes y pensionistas de acuerdo con las reglas del sistema de pensiones. El escenario macroeconómico que determina las cuantías de las cotizaciones y pensiones futuras es exógeno.

El balance actuarial del programa de seguridad social de los Estados Unidos Old-Age and Survivors Insurance (OASI) and Disability Insurance (DI), está encaminado a medir la solvencia financiera del sistema con un horizonte temporal de 75 años. Mide la diferencia en valor actual entre el gasto por pensiones y los ingresos por cotizaciones, expresada como porcentaje del valor actual de las bases de cotización para el horizonte temporal considerado, teniendo en cuenta que el nivel de las reservas financieras (trust fund) a la fecha de efecto alcanza un valor mínimo. El valor resume para el horizonte de 75 años el déficit o superávit financiero del sistema, pero sólo para el horizonte de 75 años, por lo que admite un salto brusco de la tasa de cotización o de las prestaciones a pagar al término de los 75 años, y la extinción del trust fund en esa fecha. Si el balance es negativo, la cifra puede interpretarse como el aumento que habría que aplicar en la tasa de cotización, de inmediato desde este momento, para financiar las prestaciones previstas hasta el término de los 75 años. El balance también puede ser expresado como la disminución requerida en las prestaciones, a aplicar de inmediato, para no variar la tasa de cotización hasta dentro de 75 años.

El informe del que nace el balance actuarial descrito, en la realidad es mucho más completo, ya que se realiza un análisis muy detallado de las hipótesis utilizadas, los métodos subyacentes, la sensibilidad en el largo plazo de las principales hipótesis, y se formula el balance actuarial estocástico.

Según el Balance actuarial a 31-12-2007, véase la tabla 4, la solvencia financiera del sistema se podría recuperar en 75 años si se realizase de inmediato un aumento de la tasa de cotización de 1,70 puntos porcentuales, aplicada a las bases imponibles. El balance actuarial, véase apéndice III, se obtiene como cociente entre el resultado del período y la base de cotización del período o por diferencia entre lo que se denomina tasa de ingreso del período y tasa de coste del período. La tasa de ingreso del período (13,94%) se define como el cociente entre el valor de los activos financieros al inicio del período<sup>183</sup> (1-1-2008) más el valor actualizado de los ingresos por cotizaciones para el horizonte considerado y el valor actualizado de todas las bases de cotización del período. De igual manera, la tasa de coste del período (15,63%) se define como el cociente entre el valor actual de los activos financieros mínimos al final del período más el valor actual de los gastos previstos por prestaciones para el horizonte considerado y el valor actual de todas las bases de cotización del período.

---

<sup>183</sup> Representa un 15,49 % del PIB de 2008.

**Tabla 4**

Elementos del balance actuarial de EE.UU. Hipótesis intermedia. (2008-2082).  
Valores actuales a 1 de enero de 2008. Billones de dólares<sup>184</sup>

ELEMENTOS		OASDI (Jubilación + Invalidez)
1	Ingresos por cotizaciones	34.300
2	Impuestos ligados a las prestaciones	2.056
3=1+2	Total ingresos	36.357
4	Total gastos por prestaciones	42.911
5=4+3	Déficit inicial	-6.555
6	Fondo de reserva al inicio del período	2.238
7=5+6	Pasivos sin respaldo <sup>185</sup>	-4.316
8	Fondo de reserva al final del período <sup>186</sup>	387
9=7-8	Resultado del período <sup>187</sup>	-4.703
10	Base de cotización del período	276.946
11=(3+6)/(10)%	Tasa de ingreso del período	13,94%
12=(4+8)/(10)%	Tasa de coste del período	15,63%
13=(9/10)%	Balance actuarial determinista	-1,70%
Detalles en BOT (2008)	Balance actuarial determinista (HT ∞)	-3,14%
	Balance actuarial estocástico (HT 75)	-1,79%
Fuente: BOT (2008) y elaboración propia. Los totales no necesariamente coinciden con las sumas de las cantidades redondeadas		

De igual forma puede cumplirse con las prestaciones previstas hasta el año 2082 si se aplicara actualmente una disminución general en las prestaciones del 11,5%, o si se realizara una aportación al “Trust Fund” de 4,3 trillones (americanos) de dólares. Lógicamente, también se podría realizar una combinación de las medidas anteriores. En términos de déficit o superávit anual está previsto que aparezca déficit de tesorería en 2017, y que el fondo de reserva se agote en 2041.

<sup>184</sup> Un billón de dólares es igual a  $1 * 10^9$  \$, un billón de euros sería  $1 * 10^{12}$  €. Un trillón de dólares es igual a  $1 * 10^{12}$  \$, un trillón de euros sería un número mucho mayor  $1 * 10^{18}$  €.

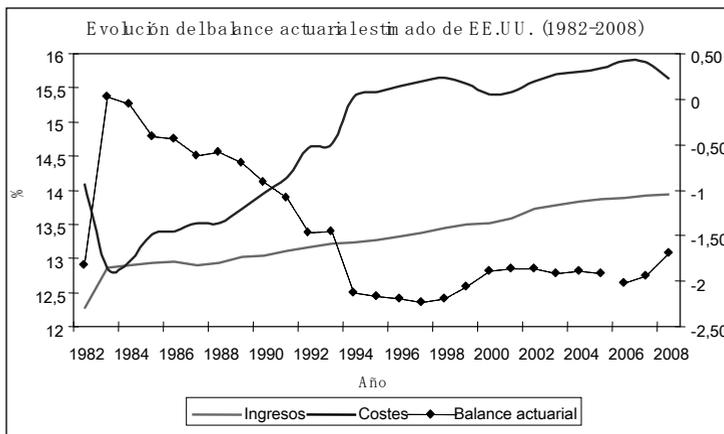
<sup>185</sup> Valor actual de la deuda en la que es necesario incurrir para financiar los pagos comprometidos agotando la totalidad de los activos financieros. No tiene que confundirse con la deuda implícita del sistema a una determinada fecha.

<sup>186</sup> En el cálculo del balance actuarial se considera que el fondo de reserva al final del período (1 de enero de 2082) tiene que ser suficiente para financiar las prestaciones de ese mismo año.

<sup>187</sup> Representa un 32,56% del PIB de 2008 (14.445 billones de dólares), o un 0,61% del valor actualizado de los PIBs del período 2008-2082 (768,4 trillones de dólares).

El resultado del balance actuarial para un horizonte temporal perpetuo es de -3,14%, y el pasivo sin respaldo se estima en 13,6 trillones de dólares. El balance actuarial estimado utilizando metodología estocástica para el horizonte temporal de 75 años proporciona un resultado del -1,79% para el percentil 50, los pasivos sin respaldo ascienden a \$4,6 trillones y está previsto que el fondo de reserva se agote en 2041, es decir todo es muy parecido al resultado del balance actuarial determinista en el caso de la hipótesis intermedia. El intervalo de confianza del 95% indica que el valor del balance actuarial oscila entre (-3,52% y -0,28%), este rango de variación es más reducido que si se utiliza el correspondiente a la mejor y peor hipótesis del informe (-4,66% y +0,52%).

En el gráfico 2, en el segundo eje de ordenadas, se muestra la evolución del balance actuarial en los últimos 26 años. Aunque el valor del balance para 2008 es el mejor de los últimos 15 años, las comparaciones de los valores no acaban de ser homogéneas debido a que prácticamente todos los años se incorporan mejoras metodológicas que impiden una comparación directa, aunque en el informe que fundamenta el balance actuarial se proporcionan detalles de los cambios y sus efectos año a año. Aún así, el gráfico resume muy bien las expectativas de cada año sobre la evolución de la salud financiera del sistema en los siguientes 75 años.



**Gráfico 2**

*Evolución del balance actuarial estimado (1982-2008). Hipótesis intermedia*

En la tabla 5 se muestra la evolución histórica y la proyectada para la hipótesis intermedia de algunos elementos clave que influyen en la determinación del balance actuarial.

**Tabla 5**  
**Datos históricos y evolución prevista (hipótesis intermedia)**  
**de algunos indicadores básicos del OASDI.**

años	Tasa de Ingreso %	Tasa de Coste %	Balance Anual %	Cotizantes /Beneficiarios	Trust Fund ratio (años)
1990	12,49	10,74	1,75	3,4	0,75
1995	12,59	11,67	0,92	3,3	1,28
2000	12,69	10,40	2,29	3,3	2,16
2005	12,71	11,16	1,55	3,3	3,18
2007	12,75	11,26	1,49	3,3	3,45
2010	12,82	11,37	1,45	3,2	3,78
2020	13,04	14,14	-1,10	2,6	3,61
2030	13,23	16,41	-3,18	2,2	2,21
2040	13,23	16,81	-3,58	2,1	0,26
2050	13,23	16,52	-3,29	2,1	---
2060	13,24	16,69	-3,45	2,1	---
2070	13,26	16,99	-3,73	2,1	---
2080	13,29	17,41	-4,12	2,0	---

Fuente. BOT (2008) y elaboración propia

La tasa de ingreso es el cociente entre los ingresos devengados por el sistema en forma de cotizaciones e impuestos ligados a las mismas y la base de cotización del año. La tasa de coste es el cociente entre las prestaciones pagadas en el año y la base de cotización del año. El balance anual es la diferencia entre la tasas de ingresos y de coste, que en la realidad expresa el superávit o déficit de tesorería corriente del año en relación con la base imponible. Como puede verse en la tabla, el balance anual empeora notablemente en la medida de que la relación cotizantes/beneficiarios disminuye debido fundamentalmente a que los miembros de las generaciones denominadas del “baby-boom” está previsto que se jubilen entre 2010 y 2030. A partir de este último año los incrementos en la esperanza de vida previstos y la disminución de la tasa de fertilidad provocan que el nivel de las reservas

financieras acumuladas caiga notablemente hasta quedar agotadas, lo que se manifiesta en el valor del “Trust fund ratio”, definido como la relación entre los activos financieros al principio de cada año y el coste derivado del pago de las prestaciones en ese mismo año. En la realidad indica el número de años de prestaciones que pueden ser pagados con los fondos disponibles al principio del año.

Si todo evolucionara tal y como está previsto y no se tomaran acciones hasta que el fondo de reserva se agotase en 2041, entonces los ajustes a adoptar se tendrían que concentrar en unos pocos años y en pocas cohortes. Por ejemplo, la tasa de cotización se elevaría bruscamente desde el 13,23% previsto en 2040 al 15,94% en el año siguiente, año en el se agota totalmente el fondo de reserva, y se tendría que seguir elevando hasta el 16,60% en 2082. De igual manera, para que el sistema no acumulase deuda<sup>188</sup>, de golpe en 2041 todas las prestaciones se tendrían que reducir un 22%, hasta alcanzar la reducción un 25% en 2082.

Cualquiera de estas medidas, a modo de ejemplo, eliminaría el déficit actuarial del sistema con la eliminación del déficit de tesorería después del agotamiento previsto del fondo de reserva. Asegurar la solvencia del sistema después de 2082 sería más problemático debido al envejecimiento previsto de la población y requeriría ajustes más duros.

En resumen, las principales diferencias entre el balance actuarial “sueco” y el “americano” son las siguientes:

1. En EE.UU. se utilizan proyecciones de las variables demográficas, económicas y financieras a un período de 75 años, mientras que en Suecia se utiliza el principio de valoración basado en hechos verificables a la fecha de efecto del balance.
2. En Suecia se cuantifica el Activo por Cotizaciones en estado estacionario, mientras que en EE.UU. se estiman las cotizaciones de los próximos 75 años.

<sup>188</sup> Está explícitamente prohibido por la legislación americana.

3. El Balance actuarial de EE.UU. es dependiente del tipo de interés de mercado y el de Suecia no depende de él, es independiente.
4. El balance “sueco” sigue la estructura tradicional del balance contable que deriva de la partida doble, presenta un perfil actuarial muy acusado, ya que en el pasivo se recogen tanto los compromisos con los pensionistas como con los cotizantes, mientras que el balance “americano” presenta un perfil más financiero, ya que no se cuantifican los compromisos con los cotizantes hasta que no se convierten en pensionistas.
5. La información que deriva del balance sueco tiene una repercusión anual en la revalorización de las cotizaciones registradas en las cuentas nocionales y en el tanto de variación de las pensiones causadas, mientras que en el americano no es inmediata la repercusión, sirve como elemento de reflexión y análisis para eventuales reformas legislativas del sistema de pensiones.
6. Los indicadores de solvencia del sistema que emergen de ambos balances se pueden considerar como complementarios, aunque su concepción y composición es claramente diferente. El indicador de solvencia “americano” no es más que el sumatorio en valor actual de los déficits o superávits de tesorería para el período temporal considerado a los que se les agrega el valor de los activos financieros en el origen. El indicador “sueco” va más en la línea de evaluar las obligaciones devengadas tanto con los pensionistas como con los cotizantes.

#### **4. CONCLUSIONES**

Existen valiosos instrumentos derivados de la metodología del análisis actuarial, que pueden ser aplicados al campo de la gestión pública de los sistemas de reparto para mejorar su transparencia y solvencia; sin duda, el balance actuarial es uno de ellos.

En el aspecto de la transparencia, lo verdaderamente importante del balance actuarial es el hecho de lo que representa para una buena

gestión del sistema pensiones, la recurrencia de tener que formularlo anualmente, superando el tradicional horizonte de planificación de los políticos. La formulación de los balances actuariales, que además en los dos casos descritos están auditados y cuentan con el respaldo de los especialistas, “obliga” a los políticos a ser mucho más cuidadosos en sus manifestaciones y a renunciar al ejercicio del populismo en pensiones. Asimismo, los cotizantes y pensionistas tienen una estimación fundada de cuál puede ser el grado de cumplimiento de las promesas que se les realizan respecto al pago de sus pensiones, y les hace estar más implicados en la evolución del mismo a través de un mejor conocimiento tanto del sistema como de sus obligaciones y derechos individuales.

En el aspecto de la solvencia, la obligación de formular anualmente el balance actuarial refuerza el interés de los ciudadanos por su evolución, lo que posibilita que se puedan introducir más fácilmente en el sistema mecanismos financieros de ajuste automático (MFAs) que empujen sostenidamente al sistema a la senda de la solvencia financiera en el largo plazo; que de otra forma, serían prácticamente imposibles de introducir.

Parece más adecuado que el balance actuarial “sueco” se aplique al sistema de reparto de cuentas nocionales, especialmente si del indicador de solvencia se pueden derivar medidas que afecten inmediatamente a los pensionistas y los cotizantes actuales, lo que sería mucho más difícil de justificar si se basasen en proyecciones que finalmente se podrían cumplir o no. Nada impide que este balance actuarial se pueda aplicar al sistema de reparto de prestación definida<sup>189</sup>, principalmente si hay una clara separación entre las contingencias de jubilación y el resto; y que paralelamente se realicen proyecciones sobre la evolución del balance actuarial.

El balance actuarial “americano” parece tener una misión diferente al “sueco”, pero que en todo caso es complementaria al explicitar los desafíos futuros del sistema, básicamente el envejecimiento y el au-

---

<sup>189</sup> Boado-Penas et al. (2008) lo aplican al sistema de pensiones contributivo español y revelan los problemas de desequilibrio actuarial estructural que sufre el sistema español.

mento previsto de la longevidad. Su cometido estaría más en la línea de discutir posibles medidas a aplicar en el largo plazo en el supuesto de que las proyecciones vayan convirtiéndose en realidad con el fin de salvaguardar la sostenibilidad del sistema de pensiones.

En el ámbito español, y aunque ya se han elaborado trabajos que han formulado el balance actuarial “sueco” convenientemente adaptado al sistema de pensiones español (Boado-Penas et al (2007, 2008) y Vidal-Meliá et al (2009a)) y también una aproximación al balance actuarial “americano” (Doménech y Melguizo (2008)); parece justificada la elaboración oficial (por la oficina del actuario jefe u organismo similar como existe en algunos países, que habría que crear en España) del balance actuarial anual del sistema español de pensiones contributivas con la finalidad de transmitir a la sociedad la verdadera situación del sistema.

Por último, pero no por ello menos importante, este trabajo, pretende reivindicar el importante papel que los actuarios desempeñan en algunos países avanzados en el ámbito de la mejora de la gestión de las finanzas públicas, especialmente mediante la incorporación de la metodología típica del análisis actuarial al campo de la gestión de los sistemas públicos de pensiones. La relevancia y prestigio social alcanzado por los actuarios de EE.UU., Reino Unido, Canadá, Japón o Suecia, en el ámbito de las finanzas públicas de la Seguridad Social, es, verdaderamente, el ejemplo a seguir por los actuarios españoles.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barr, N; y P. Diamond. Reforming Pensions. Center for Retirement Research at Boston College WP, 2008, n. 26.

Boado-Penas, C. Instruments for Improving the Equity, Transparency and Sustainability of Pay-As-You-Go Pension Systems. European Doctoral Thesis presented to the University of Valencia, Spain, 2008.

Boado-Penas, C; I. Domínguez-Fabián; S. Valdés-Prieto y C. Vidal-Meliá *Mejora de la equidad y sostenibilidad financiera del sistema público español de pensiones de jubilación mediante el empleo de cuentas nocionales de aportación definida (NDCs)*. Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales, FIPROS, 2007.

Boado-Penas, C; S. Valdés-Prieto y C. Vidal-Meliá. *An Actuarial Balance Sheet for Pay-As-You-go Finance: Solvency Indicators for Spain and Sweden*. Fiscal Studies, 2008, vol. 29, 89-134.

Board of Trustees, Federal Old-Age and Survivors Insurance and Disability Insurance Trust Funds (BOT). *2007 Annual Report*. Washington, D.C.: Government Printing Office, 2008.

Doménech, R. y A. Melguizo. *Projecting Pension Expenditures in Spain: On Uncertainty, Communication and Transparency*. IEI. WP, 2008, n. 03.

Jimeno, J.F.; J. A. Rojas y S. Puente. Modelling the impact of aging on social security expenditures. *Economic Modelling*, 2008, vol. 25, 201–224

Knell, M.; W. Köhler-Töglhofer y D. Prammer. *The Austrian Pension System – How Recent Reforms Have Changed Fiscal Sustainability and Pension Benefits*. *Monetary Policy & the Economy*, Q2, 2006, 69–93.

Lefebvre, C. *Projections à long terme des systèmes de retraite: quelques expériences étrangères*. Rapport au Conseil d'orientation des retraites, 2007.

Office of the Superintendent of Financial Institutions Canada (OSFIC) [web] *Optimal Funding of the Canada Pension Plan*. Actuarial Study N. 6 April, Office of the Chief Actuary, 2007. <http://www.osfi-bsif.gc.ca> [Consulta: 23 marzo 2009].

Office of the Superintendent of Financial Institutions Canada (OSFIC) [web]. *Actuarial Report (21<sup>st</sup>) on the CANADA PENSION PLAN*. Office of the Chief Actuary, 2005. <http://www.osfi-bsif.gc.ca> [Consulta: 23 marzo 2009].

Sakamoto, J. *Japan's Pension Reform*. Social Protection Discussion Paper 0541. The World Bank, 2005.

Settergren, O. *Financial and Inter-Generational Balance? An Introduction to How the Swedish Pension System Manages Conflicting Ambitions*. Scandinavian Insurance Quarterly, 2003, vol. 2, 99–114.

Settergren, O. *The Automatic Balance Mechanism of the Swedish Pension System – a non-technical introduction*. Wirtschaftspolitische Blätter, 2001, vol.4, 339-349.

Settergren, O. y B.D. Mikula. *The rate of return of pay-as-you-go pension systems: a more exact consumption-loan model of interest*. The Journal of Pensions Economics and Finance, 2005, vol. 4, 115–138.

Takayama, N. *The balance sheet of social security pensions in Japan*, Proceedings No. 6, "The Balance Sheet of Social Security Pensions", *Institute of Economic Research*, Hitotsubashi University, February, 2005.

The Economic Policy Committee TEPC. *Pensions Schemes and Projection Models in EU-25 Member State*. European Economy, Occasional Paper, 2007, n. 35.

The Swedish Pension System Annual Report 2007. Ed. Ole Settergren, Swedish Social Insurance Agency (Försäkringskassan), Stockholm, 2008.

*The Swedish Pension System Annual Report 2006*. Ed. Ole Settergren, National Social Insurance Board (Försäkringskassan), Stockholm, 2007.

*The Swedish Pension System Annual Report 2005*. Ed. Ole Settergren, National Social Insurance Board (Försäkringskassan), Stockholm, 2006.

*The Swedish Pension System Annual Report 2004*. Ed. Ole Settergren, National Social Insurance Board (Försäkringskassan), Stockholm, 2005.

*The Swedish Pension System Annual Report 2003*. Ed. Ole Settergren, National Social Insurance Board (Försäkringskassan), Stockholm, 2004.

*The Swedish Pension System Annual Report 2002*. Ed. Ole Settergren, National Social Insurance Board (Försäkringskassan), Stockholm, 2003.

*The Swedish Pension System Annual Report 2001*. Ed. Ole Settergren, National Social Insurance Board (Försäkringskassan), Stockholm, 2002.

Vidal-Meliá, C.; M.C. Boado-Penas y O. Settergren. *Automatic Balance Mechanisms in Pay-As-You-Go Pension Systems*. Próximamente en *The Geneva Papers on Risk and Insurance: Issues and Practice*, 2009a, vol.33, n.4.

Vidal-Meliá, C., M.C. Boado-Penas y O. Settergren. Instruments for improving the equity, transparency and solvency of Pay-As-You-Go pension systems: NDCs, ABs and ABMs. Edited by Marco Micocci and Greg N. Gregoriou. Chapman and Hall, 2009b. Próximamente.

Zaidi, A. y K. Rake. *Dynamic Microsimulation Models: A Review and Some Lessons for SAGE*, Discussion Paper, 2, Simulating Social Policy in an Ageing Society (SAGE), The London School of Economics, London, 2001.

**ACTIVO POR COTIZACIONES EN EL CASO SUECO<sup>190</sup>**

$$AC_t = \bar{C}_t \times \overline{TD}_t \quad [2]$$

donde:

t: Año del calendario si la variable utilizada se refiere a un flujo, final del año si la variable a la que se refiere es fondo, stock o acervo; AC: Activo por cotizaciones; C: Cotizaciones del año en valor del año t; TD: “Turnover Duration”;  $\bar{C}$ : Promedio de las cotizaciones agregadas realizadas por los afiliados al sistema de pensiones en los últimos 3 años, en valor del año t;  $\overline{TD}$ : Mediana del TD del sistema de pensiones en los últimos 3 años.

$\bar{C}$  y  $\overline{TD}$  se obtienen:

$$\bar{C}_t = \frac{C_t + C_{t-1} + C_{t-2}}{3} \times \left( \frac{C_t}{C_{t-3}} \times \frac{IPC_{t-3}}{IPC_t} \right)^{1/3} \times \left( \frac{IPC_t}{IPC_{t-1}} \right) \quad [3]$$

$$\overline{TD}_t = \text{mediana} [TD_{t-1}, TD_{t-2}, TD_{t-3}] \quad [4]$$

Donde:

IPC: Índice de precios al consumo desde junio.

El TD se determina mediante dos sumandos, el “pay in duration”,  $p_{t_c, t}$ , y el “pay out duration”,  $p_{t_r, t}$ , la suma de ambos conceptos formaría el promedio temporal ponderado de permanencia de una unidad monetaria cotizada en el sistema, y además es equivalente a la diferencia entre las edades promedio ponderadas de los pensionistas (se pondera la edad por el número de pensionistas y cuantía de la pensión) y los cotizantes (se pondera la edad por el número de cotizantes

<sup>190</sup> Véase Försäkringskassan (2008).

y cuantía de la cotización) al final del año “t”<sup>191</sup> ( $A_{r,t} - A_{c,t}$ ):

$$D_t = p_{c,t} + p_{r,t} = A_{r,t} - A_{c,t} \quad [5]$$

La expresión para  $p_{t,c}$  es:

$$p_{t,c} = \frac{\sum_{i=16}^{\bar{R}_t-1} \bar{E}_i \times L_i \times (\bar{R}_t - i - 0,5)}{\sum_{i=16}^{\bar{R}_t-1} \bar{E}_i \times L_i} \quad [6]$$

Siendo,

$$\bar{R}_t = \frac{\sum_{i=61}^{R_t^*} P_{i,t}^* \times G_{i,t} \times i}{\sum_{i=61}^{R_t^*} P_{i,t}^* \times G_{i,t}} \quad [7]$$

$\bar{R}$ , edad promedio ponderada por la cuantía de la pensión de los pensionistas que alcanzan la jubilación en ese período, se redondea al entero más cercano.

$$\bar{E}_{i,t} = \frac{\frac{E_{i,t}}{N_{i,t}} + \frac{E_{i+1,t}}{N_{i+1,t}}}{2}, \text{ para } i = 16, 17, \dots, \bar{R}_{t-2}, \quad \bar{E}_{\bar{R}(t)-1,t} = \frac{E_{\bar{R}(t)-1,t}}{N_{\bar{R}(t)-1,t}} \quad [8]$$

$$L_{i,t} = L_{i-1,t} \times h_{i,t}, \text{ para } i = 17, 18, \dots, \bar{R}_{t-1}, \text{ con } L_{16,t} = 1 \quad [9]$$

$$h_{i,t} = \frac{N_{i,t}}{N_{i-1,t-1}} \text{ para } i = 17, 18, \dots, \bar{R}_{t-1} \quad [10]$$

<sup>191</sup> Véanse los trabajos de Settegren (2003), Settergren y Mikula (2005) y Boado-Penas et al (2008).

donde,

$i$ : Edad al final del año  $t$  para las personas del mismo grupo;  $R_t^*$ : Edad del grupo de pensionistas de más edad en el año  $t$ ;  $P_{i,t}^*$ : Cuantía de las pensiones del año  $t$  para el grupo con edad  $i$ ;  $E_{i,t}$ : Cuantía de las cotizaciones (16% de las bases de cotización) del año  $t$  para el grupo con edad  $i$ ;  $N_{i,t}$ : Individuos en el grupo de edad  $i$  que en algún momento han cotizado y no han fallecido;  $L_{i,t}$ : Número de individuos asegurados en el grupo de edad  $i$ ;  $h_{i,t}$ : Cambio en el año  $t$  en el número de individuos que pertenecen al grupo de edad  $i$  que han cotizado en cualquier momento del tiempo;  $G_{i,t}$ : Divisor demográfico anual en el año  $t$  para el grupo de pensionistas de edad  $i$ . En el cálculo de la pensión inicial el capital nocional acumulado en las cuentas de los cotizantes se divide por el “divisor demográfico” cuya expresión es la siguiente:

$$G_{i,t} = \frac{1}{12L_i} \sum_{k=i}^{R_t} \sum_{X=0}^{11} \left[ L_k + \frac{L_{k+1} - L_k}{12} X \right] (1,016)^{-(k-i)} (1,016)^{-X/12}$$

para  $i = 61, 62, \dots, R_t$  [11]

con,  $L_i$ : Número de supervivientes a la edad  $i$  según las tablas de mortalidad elaboradas en Suecia con datos reales de los últimos cinco años;  $\frac{L_{k+1} - L_k}{12} X$ : tiene en cuenta el desembolso mensual;  $i$ : Edad de jubilación;  $k - i$ : Número de años que se va a recibir la prestación de jubilación;  $X$ : Meses (0, 1, 2, 3, ..., 11)

Se puede demostrar, Boado-Penas (2008), que dicho “divisor demográfico” es equivalente a una renta actuarial unitaria, constante, prepagable, fraccionada y con un tipo de interés técnico del 1,6%.

La expresión para  $pt_r$  es:

$$pt_{r,t} = \frac{\sum_{i=\bar{R}_t}^{R_t} 1,016^{-(i-\bar{R}_t)+0,5) \times L_{i,t}^* \times (i - \bar{R}_t + 0,5)}{\sum_{i=\bar{R}_t}^{R_t} 1,016^{-(i-\bar{R}_t)+0,5) \times L_{i,t}^*} \quad [12]$$

$$L_{i,t}^* = L_{i-1,t}^* \times he_{i,t}, L_{60,t}^* = 1 \quad [13]$$

$$he_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{P_{i,t} + Pd_{i,t} + 2 \times Pd_{i,t}^*} \quad \text{para } i = 61, 62, \dots, R_t \quad [14]$$

con:  $R_t$ : Pensionista de mayor edad en el año  $t$ ,  $P_{i,t}$ : Cuantía del gasto en pensiones en el año  $t$  para el grupo de edad  $i$ ,  $Pd_{i,t}$ : Cuantía del gasto en pensiones en el año  $t-1$  para el grupo de edad  $i$  que se extingue en el año  $t$ ,  $Pd_{i,t}^*$ : Cuantía del gasto en pensiones en el año  $t$  que se extingue en el año  $t$ ;  $L_{i,t}^*$ : Cuantía de la pensión normalizada para el grupo de edad  $i$ ;  $he_{i,t}$ : Variación del gasto en pensiones para el grupo de edad  $i$  en el año  $t$  debido a los fallecimientos o vuelta a la actividad.

**PASIVO DEL SISTEMA**

$$D_t = AD_t + DD_t \quad [15]$$

$$AD_t = K_t + E_t + ATP_t \quad [16]$$

$$DD_t = \sum_{i=61}^{R_t} P_{i,t} \times 12 \times \left( \frac{Ge_{i,(t)} + Ge_{i,(t-1)} + Ge_{i,(t-2)}}{3} \right) \quad [17]$$

$$Ge_{i,(t)} = \frac{\sum_{j=i}^{R_t} \frac{1}{2} \times (L_{j,t}^* + L_{j+1,t}^*) \cdot 1,016^{-(i-j-1)}}{L_{i,t}^*} \quad \text{para } i = 61, 62, \dots, R_t \quad [18]$$

siendo,

$AD_t$  Pasivo con lo cotizantes, es decir, derechos en curso de adquisición en el año t que derivan del valor acumulado en las cuentas nocionales (K) y de los compromisos adquiridos en el sistema antiguo (E y ATP).

$DD_t$ : Pasivo con los pensionistas.

$Ge_{i,(t)}$ : Divisor económico para el grupo de edad i en el año t. En Suecia, para el cálculo de la deuda con los actuales pensionistas, se multiplica la pensión inicial de cada cohorte por el “divisor económico” de dicha cohorte, el cual se corresponde a una renta actuarial ponderada por el número de pensionistas con sus respectivas pensiones. No hay que confundirlo con el “divisor demográfico” descrito anteriormente.

**EL BALANCE ACTUARIAL AMERICANO**

De una manera simplificada el balance actuarial (AB) se puede expresar como:

$$AB = \frac{\left[ \underbrace{\text{Activos financieros}}_{\widehat{TF}_0} + \underbrace{\text{Valor actual de las cotizaciones}}_{y_0 \sum_{t=0}^{74} \dot{e}_t N_t \prod_{h=1}^t \frac{(1+g_h)}{(1+r_h)}} \right] - \left[ \underbrace{\text{Valor actual de las prestaciones}}_{B_0 \sum_{t=0}^{74} R_t \prod_{h=1}^t \frac{(1+\lambda_h)}{(1+r_h)}} + \underbrace{\text{Activos financieros}}_{\prod_{h=1}^{74} \frac{(\widehat{TF}_{74})}{(1+r_h)}} \right]}{\underbrace{\text{Valor actual de las bases de cotización}}_{y_0 \sum_{t=0}^{74} N_t \prod_{h=1}^t \frac{(1+g_h)}{(1+r_h)}}} \approx 0 \tag{19}$$

Donde:

$\widehat{TF}_0$ : Valor de los activos financieros del “Trust Fund” en el momento inicial,  $\dot{e}_t$ : Tasa de cotización en el año t,  $y_0$ : Base de cotización promedio en el año 0,  $N_t$ : Número de cotizantes en el año t, g: Crecimiento real de los salarios o bases de cotización, r: Tipo de interés real libre de riesgo,  $B_0$ : Pensión promedio en el año 0,  $R_t$ : Número de pensionistas,  $\dot{\epsilon}$ : Tasa de crecimiento real de la pensión media.

Con los datos del numerador de la fórmula [19] es inmediato construir un indicador de solvencia parecido al sueco, que en situación de equilibrio financiero debería dar un valor unitario.

$$AB = \frac{\left[ \underbrace{\text{Activos financieros}}_{\widehat{TF}_0} + \underbrace{\text{Valor actual de las cotizaciones}}_{y_0 \sum_{t=0}^{74} \dot{e}_t N_t \prod_{h=1}^t \frac{(1+g_h)}{(1+r_h)}} \right]}{\left[ \underbrace{\text{Valor actual de las prestaciones}}_{B_0 \sum_{t=0}^{74} R_t \prod_{h=1}^t \frac{(1+\lambda_h)}{(1+r_h)}} + \underbrace{\text{Activos financieros}}_{\prod_{h=1}^{74} \frac{(\widehat{TF}_{74})}{(1+r_h)}} \right]} \approx 1 \tag{20}$$

Tasa de ingreso del periodo

Tasa de coste del periodo

## COLECCIÓN “CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN”

Instituto de Ciencias del Seguro

**Para cualquier información o para adquirir nuestras publicaciones puede encontrarnos en:**

FUNDACIÓN MAPFRE

Publicaciones

Monte del Pilar, s/n – 28023 El Plantío, Madrid – (España)

Tel.: + 34 915 818 768

Fax: +34 913 076 641

publicaciones.ics@mapfre.com

[www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro)

136. Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos. RIESGO 2009.
135. Análisis e interpretación de la gestión del fondo de maniobra en entidades aseguradoras de incendio y lucro cesante en grandes riesgos industriales. 2009
134. Gestión integral de Riesgos Corporativos como fuente de ventaja competitiva: cultura positiva del riesgo y reorganización estructural. 2009
133. La designación de la pareja de hecho como beneficiaria en los seguros de vida. 2009
132. Aproximación a la Responsabilidad Social de la empresa: reflexiones y propuesta de un modelo. 2009
131. La cobertura pública en el seguro de crédito a la exportación en España: cuestiones prácticas-jurídicas. 2009
130. La mediación en seguros privados: análisis de un complejo proceso de cambio legislativo. 2009
129. Temas relevantes del Derecho de Seguros contemporáneo. 2009
128. Cuestiones sobre la cláusula *cut through*. Transferencia y reconstrucción. 2008
127. La responsabilidad derivada de la utilización de organismos genéticamente modificados y la redistribución del riesgo a través del seguro. 2008
126. Ponencias de las Jornadas Internacionales sobre Catástrofes Naturales. 2008

125. La seguridad jurídica de las tecnologías de la información en el sector asegurador. 2008
124. Las compañías aseguradoras en los procesos penal y contencioso-administrativo. 2008
123. Predicción de tablas de mortalidad dinámicas mediante un procedimiento *bootstrap*. 2008
122. Factores de riesgo y cálculo de primas mediante técnicas de aprendizaje. 2008
121. La solicitud de seguro en la Ley 50/1980, de 8 de octubre, de Contrato de Seguro. 2008
120. Propuestas para un sistema de cobertura de enfermedades catastróficas en Argentina. 2008
119. Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: Técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y Bootstrapping. 2008
118. Los planes de pensiones y los planes de previsión asegurados: su inclusión en el caudal hereditario. 2007
117. Evolução de resultados técnicos e financeiros no mercado segurador iberoamericano. 2007
116. Análisis de la Ley 26/2006 de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2007
115. Sistemas de cofinanciación de la dependencia: seguro privado frente a hipoteca inversa. 2007
114. El sector asegurador ante el cambio climático: riesgos y oportunidades. 2007
113. Responsabilidade social empresarial no mercado de seguros brasileiro influências culturais e implicações relacionais. 2007
112. Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras. 2007
111. Fundamentos actuariales de primas y reservas de fianzas. 2007
110. El *Fair Value* de las provisiones técnicas de los seguros de Vida. 2007
109. El Seguro como instrumento de gestión de los M.E.R. (Materiales Especificados de Riesgo). 2006

108. Mercados de absorción de riesgos. 2006
107. La exteriorización de los compromisos por pensiones en la negociación colectiva. 2006
106. La utilización de datos médicos y genéticos en el ámbito de las compañías aseguradoras. 2006
105. Los seguros contra incendios forestales y su aplicación en Galicia. 2006
104. Fiscalidad del seguro en América Latina. 2006
103. Las NIC y su relación con el Plan Contable de Entidades Aseguradoras. 2006
102. Naturaleza jurídica del Seguro de Asistencia en Viaje. 2006
101. El Seguro de Automóviles en Iberoamérica. 2006
100. El nuevo perfil productivo y los seguros agropecuarios en Argentina. 2006
99. Modelos alternativos de transferencia y financiación de riesgos “ART”: situación actual y perspectivas futuras. 2005
98. Disciplina de mercado en la industria de seguros en América Latina. 2005
97. Aplicación de métodos de inteligencia artificial para el análisis de la solvencia en entidades aseguradoras. 2005
96. El Sistema ABC-ABM: su aplicación en las entidades aseguradoras. 2005
95. Papel del docente universitario: ¿enseñar o ayudar a aprender?. 2005
94. La renovación del Pacto de Toledo y la reforma del sistema de pensiones: ¿es suficiente el pacto político?. 2005
92. Medición de la esperanza de vida residual según niveles de dependencia en España y costes de cuidados de larga duración. 2005
91. Problemática de la reforma de la Ley de Contrato de Seguro. 2005
90. Centros de atención telefónica del sector asegurador. 2005
89. Mercados aseguradores en el área mediterránea y cooperación para su desarrollo. 2005

88. Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación. 2004
87. Dependencia en el modelo individual, aplicación al riesgo de crédito. 2004
86. El margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica. 2004
85. La matriz valor-fidelidad en el análisis de los asegurados en el ramo del automóvil. 2004
84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficacia de un Bonus-Malus. 2004
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos. 2004
81. El Seguro de Dependencia: una visión general. 2004
80. Los planes y fondos de pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización. 2004
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos. 2003
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia. 2003
77. El coste de los riesgos en la empresa española: 2001.
76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas. 2003
75. Incidencia de la nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor. 2002
74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español. 2002
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro. 2002
72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones. 2002
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones. 2002

70. El cuadro de mando integral para las entidades aseguradoras. 2002
69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados; métodos estadísticos de cálculo. 2002
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica. 2001
67. Gestión directiva en la internacionalización de la empresa. 2001
65. Ética empresarial y globalización. 2001
64. Fundamentos técnicos de la regulación del margen de solvencia. 2001
63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial. 2001
62. Seguridad Social: temas generales y régimen de clases pasivas del Estado. 2001
61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros. 2001
60. Análisis técnico y económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea. 2001
59. Estudio sobre el euro y el seguro. 2000
58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro. 2000
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España. 2000
54. El corredor de reaseguros y su legislación específica en América y Europa. 2000
53. Habilidades directivas: estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación. 2000
52. La estructura financiera de las entidades de seguros, S.A. 2000
50. Mixturas de distribuciones: aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la empresa aseguradora. 1999
49. Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante. 1999

- 48. Matemática Actuarial no vida con MapleV. 1999
- 47. El fraude en el Seguro de Automóvil: cómo detectarlo. 1999
- 46. Evolución y predicción de las tablas de mortalidad dinámicas para la población española. 1999
- 45. Los Impuestos en una economía global. 1999
- 42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento. 1998
- 41. De Maastricht a Amsterdam: un paso más en la integración europea. 1998

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1997  
Fundación MAPFRE Estudios

- 39. Perspectiva histórica de los documentos estadístico-contables del órgano de control: aspectos jurídicos, formalización y explotación. 1997
- 38. Legislación y estadísticas del mercado de seguros en la comunidad iberoamericana. 1997
- 37. La responsabilidad civil por accidente de circulación. Puntual comparación de los derechos francés y español. 1997
- 36. Cláusulas limitativas de los derechos de los asegurados y cláusulas delimitadoras del riesgo cubierto: las cláusulas de limitación temporal de la cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil. 1997
- 35. El control de riesgos en fraudes informáticos. 1997
- 34. El coste de los riesgos en la empresa española: 1995
- 33. La función del derecho en la economía. 1997

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1996  
Fundación MAPFRE Estudios

- 32. Decisiones racionales en reaseguro. 1996
- 31. Tipos estratégicos, orientación al mercado y resultados económicos: análisis empírico del sector asegurador español. 1996
- 30. El tiempo del directivo. 1996

29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal. 1996

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1995  
Fundación MAPFRE Estudios

28. La naturaleza jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil. 1995

27. La calidad total como factor para elevar la cuota de mercado en empresas de seguros. 1995

26. El coste de los riesgos en la empresa española: 1993

25. El reaseguro financiero. 1995

24. El seguro: expresión de solidaridad desde la perspectiva del derecho. 1995

23. Análisis de la demanda del seguro sanitario privado. 1993

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1994  
Fundación MAPFRE Estudios

22. Rentabilidad y productividad de entidades aseguradoras. 1994

21. La nueva regulación de las provisiones técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E. 1994

20. El Reaseguro en los procesos de integración económica. 1994

19. Una teoría de la educación. 1994

18. El Seguro de Crédito a la exportación en los países de la OCDE (evaluación de los resultados de los aseguradores públicos). 1994

Nº Especial Informe sobre el mercado español de seguros 1993  
FUNDACION MAPFRE ESTUDIOS

16. La legislación española de seguros y su adaptación a la normativa comunitaria. 1993

15. El coste de los riesgos en la empresa española: 1991

14. El Reaseguro de exceso de pérdidas 1993

12. Los seguros de salud y la sanidad privada. 1993

10. Desarrollo directivo: una inversión estratégica. 1992
9. Técnicas de trabajo intelectual. 1992
8. La implantación de un sistema de *controlling* estratégico en la empresa. 1992
7. Los seguros de responsabilidad civil y su obligatoriedad de aseguramiento. 1992
6. Elementos de dirección estratégica de la empresa. 1992
5. La distribución comercial del seguro: sus estrategias y riesgos. 1991
4. Los seguros en una Europa cambiante: 1990-95. 1991
2. Resultados de la encuesta sobre la formación superior para los profesionales de entidades aseguradoras (A.P.S.). 1991
1. Filosofía empresarial: selección de artículos y ejemplos prácticos. 1991



