Una aproximación al reaseguro financiero en la modalidad de *«finite risk»*

MARÍA JOSÉ PÉREZ FRUCTUOSO.
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Sí bien el reaseguro tradicional tiene como objeto exclusivo cubrir parte del riesgo de suscripción del asegurador cedente, en el Reaseguro Financiero *Finite Risk* esta cobertura se amplía al riesgo de que se produzcan variaciones en el tipo de interés al que están invertidas las primas y al *timing risk* o riesgo de anticipación de los pagos por siniestros.

En este trabajo planteamos un modelo actuarial basado en la simulación de MonteCarlo que cuantifica la prima del Reaseguro *Finite Risk* en un contrato Cuota-Parte y en un contrato de Exceso de Pérdida.

INTRODUCCIÓN

En el contrato de reaseguro tradicional, bien sea de tipo proporcional o no proporcional, el asegurador cedente transfiere al reasegurador una parte de su *«underwriting risk»* (riesgo de suscripción) y, por tanto, cede una parte de la incertidumbre en cuanto a la siniestralidad real de su cartera.

A cambio de esta cesión, el reasegurador recibe una prima con la que genera unas reservas que le permiten afrontar sus obligaciones futuras, en función de las estimaciones que realice sobre lo que espera pagar por siniestros ocurridos o previsibles, sea cual sea la fecha de ocurrencia de los mismos. El valor de estas reservas proporciona un rendimiento financiero desde el momento en que se dispone de la prima para su inversión, hasta el momento del pago de los siniestros ocurridos. Este rendimiento financiero no se tiene en cuenta en el Reaseguro tradicional, pero si en el Reaseguro Financiero que lo considera de forma actualizada en el momento de provisionar el siniestro, reduciendo de esta forma la inversión inicial exigida y, por tanto, la prima.

El reaseguro tradicional no incluye entre sus ingredientes el factor tiempo ni, por tanto, el valor monetario del mismo; el reaseguro financiero introduce esta nueva dimensión en la cobertura demandada por el asegurador cedente.

DEFINICIÓN DE REASEGURO FINANCIERO

Podemos definir el Reaseguro Financiero como el contrato de reaseguro a través del cual la cedente transfiere, dentro de unos límites establecidos, el valor actual estimado de una deuda futura, cierta o previsible, resultante de la siniestralidad de una póliza o de una cartera de pólizas.

La cedente, en el contrato de Reaseguro Financiero, para determinar la prima cedida y la cobertura demandada al reasegurador, considera en la estimación de la deuda el rendimiento financiero esperado generado por dicha deuda. El Reaseguro Financiero es, por tanto, una transacción de reaseguro en la que los intereses financieros futuros forman parte de la suscripción y en la que el compromiso de los reaseguradores es limitado.

La singularidad de este tipo de reaseguro es que existe una transferencia e igualación del riesgo a lo largo del tiempo con una sola compañía cedente y no sobre un determinado periodo contable con un gran número de cedentes. Además el compromiso del reasegurador está limitado, *«aggregate limit»* y en caso de que se produzcan menos siniestros de los previstos la cedente recibe una compensación por este hecho a través de su participación en los beneficios del reasegurador.

La cedente, al recurrir al reaseguro, pretende estabilizar su resultado técnico a un nivel determinado a través de la diversificación. El problema es que en ocasiones la oferta de reaseguro tradicional es perfectamente inelástica: es fácil constatar que en el mercado clásico de reaseguro, la capacidad de cobertura ofrecida para ciertos riesgos (por ejemplo, para los riesgos catastróficos) es muy limitada e incluso en ocasiones inexistente. El precio exigido, por tanto, para dicha cobertura es poco atractivo para el asegurador directo. Por esta razón, en muchas situaciones concretas, el Reaseguro Financiero puede mejorar el saldo de la cuenta de pérdidas y ganancias de un determinado ramo de seguros debido a un mejor reparto de los riesgos a lo largo del tiempo.

El Reaseguro Financiero es ante todo un contrato de reaseguro en el que además de poder incluir el riesgo de suscripción propio del reaseguro tradicional, considera dos riesgos adicionales:

- Riesgos clásicos ligados a las inversiones, *«investment risk»*, dentro de los que se incluyen el riesgo de tipo de interés y el riesgo de variaciones en los tipos de cambio.
- *«Timing risk»* o incertidumbre respecto al momento en que deberá efectuarse el pago de las indemnizaciones y por tanto respecto al plazo durante el cual las primas podrán estar invertidas.

Además puede diseñarse de forma retrospectiva o prospectiva. El Reaseguro Financiero retrospectivo realiza una cobertura de la evolución de los siniestros que ya se han producido pero que están pendientes de liquidación (es decir, sobre la actividad de suscripción pasada de la cedente) mientras que el prospectivo garantiza la cobertura de los siniestros que todavía no han ocurrido (se refiere a la actividad futura de la cedente, considerando primas y siniestros futuros).

En los dos casos, el principio básico subyacente es el reparto del riesgo a lo largo de un periodo de tiempo determinado.

CATEGORÍAS DE RIESGOS CUBIERTOS

Según la aversión a asumir un determinado tipo de riesgo, los reaseguradores financieros ofrecen productos en tres categorías muy distintas:

- ***Structured Settlements*** (plan estructurado de pagos): A partir de un perfil estimado de reparto de los pagos por siniestros en el tiempo, las partes establecen un plan estructurado según el cual el reasegurador pagará unas cuantías determinadas en unas fechas también fijadas.

  El reasegurador, en el momento de suscribir el contrato, se cubre mediante inversiones proporcionales, iguales, en cada momento, al valor actual de los pagos futuros. La prima cedida por el asegurador directo es la suma de estos valores actuales más un recargo destinado a la cobertura de los gastos administrativos y el margen de beneficios del reasegurador.

  En este caso, el reasegurador no cubre ni el riesgo de pagos anticipados de siniestros ni el riesgo de tener que soportar una agravación de la siniestralidad de la cedente, sólo cubre parte del riesgo de inversión de la cedente asegurándole un determinado rendimiento financiero por las primas invertidas; el reasegurador sigue estrictamente el plan de financiación preestablecido sin tener en cuenta las indemnizaciones reales realizadas como consecuencia de los siniestros realmente ocurridos. Si estos últimos tienen unas cuantías superiores a las estimadas, la diferencia va a cargo de la cedente.

- ***Timing risk:*** En una cobertura de este tipo, el reasegurador financia, a lo largo de varios años, los pagos por siniestros de la cedente hasta que éstos alcanzan un límite global determinado.
  La prima cedida en este caso se paga en intervalos de tiempo regulares y corresponde al valor actual de todos los pagos sucesivos de siniestros estimados que sumados dan lugar al límite global del tratado de reaseguro a lo largo del tiempo.
  En este tipo de cobertura, el reasegurador se expone al riesgo de que la velocidad de los pagos se acelere y sobrepase la carencia estimada en el contrato (timing risk) lo que le obligaría a desinvertir las primas antes de lo previsto perdiendo una parte importante de los rendimientos financieros esperados (riesgo de inversión).
  Al igual que en el caso anterior si los siniestros reales superan a los estimados la diferencia va a cargo de la cedente, por tanto tampoco se cubre el riesgo de suscripción.
- ***Finite risk:*** En las dos categorías anteriores, el reasegurador no participa en el riesgo de suscripción de la cedente, es decir, no cubre las desviaciones entre la siniestralidad real y la estimada. Sin embargo, en el Reaseguro Financiero *Finite Risk*, el reasegurador además de cubrir el riesgo de inversión y el *timing risk*, se compromete a asumir, hasta un determinado límite, la parte de los siniestros que excedan de la siniestralidad estimada. Por tanto, participa del riesgo de suscripción o riesgo técnico como un reasegurador tradicional.
  La prima cedida, en un contrato Finite Risk, tiene, por tanto, dos componentes:
  - Una prima por la cobertura del timing risk, equivalente al valor actual de todos los pagos futuros de los siniestros que constituyen el límite del contrato.
  - Una prima de riesgo ligada a la cobertura clásica de exceso de siniestralidad.

OBJETIVOS Y CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DEL REASEGURO FINANCIERO

Los objetivos del Reaseguro Financiero son los mismos que los del reaseguro tradicional:

- Oferta de Capacidad de cobertura o capacidad adicional de suscripción.
- Reducción de la probabilidad de ruina a través de la suscripción de riesgos de naturaleza catastrófica.
- Homogeneización de la cartera del asegurador directo reasegurando los riesgos de grandes sumas o de un elevado grado de exposición.
- Estabilización de resultados a través de la nivelación de las fluctuaciones que se producen en los mismos.
- Oferta de una fuente de financiación, entre otros.

Entre las características principales del contrato de Reaseguro Financiero podemos destacar las siguientes:

1. *Límite global de garantía:* Los contratos de Reaseguro Financiero se basan en un límite global de garantía que supuestamente se ab-

sorbe en el momento del vencimiento del contrato mediante el pago de los siniestros. En ocasiones, se incorporan una cobertura adicional clásica, como en el caso del Reaseguro Financiero *Finite Risk*.

2. *Primas bastante elevadas:* La prima cedida en estos contratos es, en principio, el valor actual de todos los pagos por siniestralidad futuros esperados a lo largo de un periodo de tiempo bastante superior al cubierto en un contrato de reaseguro tradicional (tres o cinco años) y se aproxima al límite global establecido mediante un recargo por tasas administrativas y participación en beneficios del reasegurador.
3. *Reparto de beneficios:* En la mayoría de los contratos de Reaseguro Financiero se incluye una cláusula de participación de la cedente en los beneficios del reasegurador ya que el límite global de garantía puede no absorberse completamente si la siniestralidad real ha sido inferior a la prevista. De esta forma, si la prima cedida inicialmente excede a los pagos a cargo del reasegurador financiero este se obliga a devolver parte de la misma al asegurador cedente en concepto de bonificación.
   Un ejemplo de esta participación en los beneficios del reasegurador es la cuenta de *«commutation»*. En esta cuenta se deposita la prima, reducida en el margen de beneficios del reasegurador, y es abonada periódicamente a un tipo de interés previamente determinado y cargada, también de forma periódica, por el importe de las indemnizaciones pagadas. En caso de que la cedente decida establecer un plazo al límite global de garantía o modificarlo ésta se verá compensada con la restitución del saldo restante en la cuenta en ese momento.
4. *Contratos de larga duración:* Muchos de los contratos de Reaseguro Financiero cubren periodos plurianuales (de tres a cinco años), lo que posibilita la continuidad de las relaciones, a veces truncadas, con los reaseguradores tradicionales.

CÁLCULO DE LA PRIMA DE REASEGURO

En este apartado calculamos la prima de reaseguro en las modalidades cuota-parte y exceso de pérdida *(excess of loss)* considerando tanto el enfoque tradicional como el enfoque financiero en la modalidad *Finite Risk* bajo dos supuestos:

- Ley financiera cierta: En el momento del cálculo de la prima suponemos conocida la ley financiera que rige la operación dentro del horizonte temporal considerado.
- Ley financiera aleatoria: En este caso la ley financiera que rige la operación viene perturbada por una componente aleatoria.

1. Reaseguro tradicional

En el reaseguro tradicional no se considera el tipo de interés en el cálculo de la prima de reaseguro ya que ésta, al referirse generalmente a periodos cortos de tiempo (anuales), no tiene en cuenta el momento en el que se produce el siniestro.

Por tanto, las variables aleatorias que intervienen en el proceso de riesgo asegurado son:

$$(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_N, N)$$

donde:

X_i es la variable aleatoria coste del *i-ésimo* siniestro.

N es la variable aleatoria número de siniestros ocurridos en el intervalo $[0,t]$ (t expresado en años).

A partir de estas variables aleatorias obtenemos la variable aleatoria coste total Z asociado al intervalo $[0,t]$ como la suma aleatoria de las cuantías de cada uno de los N siniestros, X_i, que se producen en dicho intervalo:

$$Z = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad [1]$$

Suponemos que las variables N y X_i son independientes y que las variables X_i además de ser independientes entre sí están idénticamente distribuidas. Bajo estas hipótesis, la prima pura total o prima de riesgo, de la operación, puede calcularse como la esperanza matemática de la variable coste total, $E[Z]$, esto es:

$$E[Z] = E[N]E[X] \qquad [2]$$

siendo su variancia:

$$V[Z] = E[N]V[X] + V[N]E[X]^2 \qquad [3]$$

La consideración del reaseguro permite descomponer el coste total, Z, en la suma de dos variables aleatorias:

$$Z = Z_c + Z_r \qquad [4]$$

donde Z_c es la variable aleatoria coste total retenido por la cedente en el intervalo $[0,t]$ y Z_r es la variable aleatoria coste total cedido al reasegurador en el mismo intervalo.

En este caso, la prima total de la operación, $E[Z]$, se obtiene como la suma de la prima retenida por la cedente $E[Z_c]$, y la prima que cobra el reasegurador $E[Z_r]$:

$$E[Z] = E[Z_c] + E[Z_r] \qquad [5]$$

Determinamos, a continuación, la prima de la cedente y la prima de reaseguro para las modalidades de reaseguro cuota-parte y exceso de pérdida.

- **Modalidad Cuota-Parte**: El reaseguro cuota-parte es una modalidad de reaseguro proporcional mediante la cual la cedente transfiere al reasegurador, durante un determinado ejercicio económico, un coeficiente preestablecido de toda la cartera o bien de un determinado ramo de la misma. Este coeficiente sirve para establecer la participación del reaseguro en la prima y en las indemnizaciones. Los contratos de reaseguro cuota-parte tienen sus aplicaciones principalmente en compañías jóvenes o que se inician en un nuevo ramo de seguros, ya que todavía carecen de experiencia y tienen dificultades a la hora de determinar la prima correcta a aplicar a cada tipo de seguro. Con el reaseguro cuota-parte, el reasegurador asume el riesgo de una posible estimación errónea de dichas primas. También se aplica cuando se quieren controlar los riesgos de fluctuaciones inesperadas y riesgo de cambios.

  Este tipo de reaseguro sólo afecta a la variable aleatoria coste individual del siniestro, que se descompone en la suma de las variables aleatorias coste del siniestro *i-ésimo* a cargo de la cedente, $X_{i,c}$, y coste del siniestro *i-ésimo* a cargo del reaseguro, $X_{i,r}$, dadas por la siguiente transformación de la variable aleatoria X_i:

$$X_{i,c} = k\,X_i$$
$$X_{i,r} = (1-k)\,X_i \qquad [6]$$

  donde k es el coeficiente de retención expresado en tanto por uno y $(1-k)$ el coeficiente de cesión al reaseguro.

  Los procesos de riesgo asociados a la cedente y al reaseguro dados por las variables aleatorias Z_c y Z_r, tienen las siguientes expresiones:

$$Zc = \sum_{i=1}^{N} X_{i,c} = \sum_{i=1}^{N} kX_i$$

$$Zr = \sum_{i=1}^{N} X_{i,r} = \sum_{i=1}^{N} (1-k)X_i \qquad [7]$$

  siendo, por tanto, la prima pura de la cedente y la prima pura de reaseguro:

$$E[Z_c] = k\,E[Z]$$
$$E[Z_r] = (1-k)\,E[Z] \qquad [8]$$

  y sus correspondientes variancias:

$$V[Z_c] = k^2V[Z] \quad V[Z_r] = (1-k)^2V[Z] \qquad [9]$$

- **Modalidad de Exceso de Pérdida**: Se trata de una modalidad de reaseguro no proporcional en la que el reasegurador indemniza a la cedente individualmente de aquellos siniestros cuyo importe supere el pleno de retención, M, fijado por ella. Supondremos el caso particular que el reasegurador se hace cargo del exceso del siniestro respecto al pleno de forma ilimitada.

Si el asegurador directo desea con este tipo de reaseguro limitar, por ejemplo, el siniestro por riesgo, la cobertura ha de ser concebida por riesgo. Se habla entonces del reaseguro *«working excess of loss cover per risk»* (WXL/R) y es la modalidad más indicada en la cobertura del ramo de incendios. Para ramos de daños, el reasegurador concibe contratos de exceso de pérdida por sucesos que ofrecen protección especialmente contra cúmulos. En este caso hablamos del reaseguro de exceso de pérdida catastrófico (*catastrophe excess of loss cover*, CatXL).

Al igual que en la modalidad cuota-parte, la variable aleatoria que se ve modificada como consecuencia de la introducción del reaseguro es la cuantía individual del siniestro, X_i. Respecto al número de siniestros suponemos que es el mismo para la cedente y para el reasegurador, teniendo en cuenta que para este último, aquellos siniestros cuyo importe no supere el pleno tienen coste cero.

En este caso las variables coste del *i-ésimo* siniestro a cargo de la cedente, $X_{i,c}$, y coste del i-ésimo siniestro a cargo del reasegurador, $X_{i,r}$ vienen dadas por las siguientes transformaciones de la variable aleatoria X_i:

$$X_{i,c} = \begin{cases} X_i & X_i < M \\ M & X_i \geq M \end{cases}$$

$$X_{i,r} = \begin{cases} 0 & X_i < M \\ X_i - M & X_i \geq M \end{cases} \qquad [10]$$

siendo los correspondientes procesos de riesgo:

$$Z_c = \sum_{i=1}^{N} X_{i,c} \quad Z_r = \sum_{i=1}^{N} X_{i,r} \qquad [11]$$

La prima pura de la cedente y del reasegurador son, en el reaseguro de exceso de pérdida:

$$E[Z_c] = E[N]\int_0^M (1 - F(x))dx$$

$$E[Z_r] = E[N]\int_0^M (1 - F(x))dx \qquad [12]$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de la variable aleatoria cuantía individual del siniestro. En cuanto a la variancia, tenemos:

$$V(X_c) = E(N)V(X_c) + V(N)E(X_c)^2 = $$
$$= E(N)[E(X_c^2) - E(X_c)^2] + V(N)E(X_c)^2 \qquad [13]$$

donde:

$$E(X_c) = \int_0^M (1 - F(x))dx$$

$$E(X_c^2) = 2\int_0^M x(1 - F(x))dx$$

y,

$$V(X_r) = E(N)V(X_r) + V(N)E(X_r)^2 = $$
$$= E(N)[E(X_c^2) - E(X_c)^2] + V(N)E(X_c)^2 \qquad [14]$$

donde:

$$E(X_r) = \int_0^M (x - M)(1 - F(x))dx$$

$$E(X_r^2) = 2\int_0^M (x - M)(1 - F(x))dx$$

2. Reaseguro *Finite Risk*

El Reaseguro *Finit Risk* tiene en cuenta no sólo el riesgo de suscripción de la cedente, sino también el riesgo de inversión derivado del rendimiento financiero que generan las primas cobradas y el riesgo de que se produzca una aceleración en el pago de las indemnizaciones y por tanto en el plazo en el que dichas primas pueden estar invertidas *(timing risk)*. Además, la cedente busca una cierta estabilidad contractual en el tiempo formalizando contratos de reaseguro *finite risk* para plazos de tres, cuatro o incluso cinco años.

La consideración de estos nuevos riesgos tiene su reflejo en el cálculo de la prima que ahora deberá considerar por un lado el rendimiento financiero que ésta genera tanto a la cedente como al reasegurador y, por otro, el momento de pago de las indemnizaciones por siniestros.

En consecuencia el proceso de riesgo en este caso vendrá definido por las siguientes variables aleatorias:

$$(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_N, T_1, T_2, \ldots\ldots\ldots, T_N, N)$$

siendo T_i con $i = 1,2,\ldots,N$ la variable aleatoria momento de pago, en años, del siniestro *i-ésimo*.

Como en el cálculo de la prima se considera el rendimiento de las inversiones de la cedente y del reasegurador, las variables aleatorias Z_c y Z_r vendrán ahora definidas como los valores actuales de las cuantías de los siniestros individuales a cargo de cada uno de ellos, es decir:

$$Z_c = \sum_{i=1}^{N} X_{i,c} f_c(T_i,0) \quad Z_r = \sum_{i=1}^{N} X_{i,r} f_r(T_i,0) \quad [15]$$

siendo $f_c(T_i,0)$ el factor financiero de actualización de la cedente que considera como interés el rendimiento financiero que la cedente obtiene con la inversión de la prima retenida y $f_r(T_i,0)$ el factor de actualización financiera del reasegurador que considera como interés el rendimiento financiero que el reasegurador obtiene con la inversión de la prima cobrada.

Al introducir en el reaseguro financiero la modalidad contractual de reaseguro cuota-parte o de exceso de pérdida las expresiones de la esperanza y de la variancia de las variables aleatorias Z_c y Z_r empleadas en el reaseguro tradicional ya no son válidas debido a la incorporación de la variable aleatoria T_i. Por tanto, en este caso, para determinar los momentos de dichas variables, conocidas las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias N, X_i y T_i, utilizaremos el método de simulación de MonteCarlo, que nos permitirá obtener directamente las diferentes realizaciones o trayectorias de Z_c y Z_r.

Estas realizaciones, que simbolizamos como $Z_{c,s}$ y $Z_{r,s}$, dada la simulación s-ésima, las obtenemos como sigue:

$$Z_{c,s} = \sum_{i=1}^{N_s} X_{i,c,s} f_c(T_{i,s},0) \qquad s = 1, \ldots, NSIM$$

$$Z_{r,s} = \sum_{i=1}^{N_s} X_{i,r,s} f_c(T_{i,r},0) \qquad s = 1, \ldots, NSIM \quad [16]$$

siendo $NSIM$ el número de simulaciones realizadas, N_s la realización de la variable aleatoria N dada la simulación *s-ésima*; $T_{i,s}$ la realización de la variable aleatoria T_i dada la simulación s-ésima; $X_{i,s}$ la realización de la variable aleatoria X_i dada la simulación *s-ésima*; $X_{i,c,s}$ la realización de la variable aleatoria $X_{i,c}$ dada la simulación *s-ésima*; $X_{i,r,s}$ la realización de la variable aleatoria $X_{i,r}$ dada la simulación *s-ésima*.

Teniendo en cuenta que las realizaciones obtenidas por simulación son equiprobables:

$$P[Z_c = Z_{c,s}] = P[Z_r = Z_{r,s}] \; \frac{1}{NSIM} \; s = 1, \ldots, NSIM$$

podemos, entonces, caracterizar totalmente la distribución de probabilidad de Z_c y Z_r, y, por tanto, calcular cualquier momento de estas variables aleatorias, en nuestro caso, la esperanza, la variancia o la desviación estandar:

$$E[Z_c] = \sum_{S=1}^{NSIM} Z_{c,s} \frac{1}{NSIM}$$

$$V[Z_c] = E[Z_c^2] - E[Z_c]^2 \quad D[Z_c] = V[Z_c]^{0,5}$$

$$E[Z_r] = \sum_{S=1}^{NSIM} Z_{r,s} \frac{1}{NSIM}$$

$$V[Z_r] = E[Z_r^2] - E[Z_r]^2 \quad D[Z_r] = V[Z_r]^{0,5} \quad [17]$$

Resulta evidente de lo expuesto anteriormente que para poder obtener por simulación las realizaciones $Z_{c,s}$ y $Z_{r,s}$, es clave determinar la naturaleza del factor financiero, que con carácter general lo simbolizaremos como $f(T_{i,s},0)$.

A continuación consideramos la posibilidad de trabajar con una ley financiera cierta y, por tanto, conocida en el intervalo *[0,t]* lo que dará lugar a un factor financiero cierto o bien con una ley financiera perturbada a través de un proceso de Wiener que deriva en la utilización de un factor financiero aleatorio.

- ***Factor financiero cierto***

En este caso suponemos que la ley financiera que rige en el periodo $[0,t]$ es conocida en el origen de la operación, por tanto, podemos obtener el precio de la operación, o, en nuestro caso, el rendimiento financiero que generan las primas invertidas tanto para la cedente como para el reasegurador, en todos los instantes que configuran el horizonte temporal, dando lugar al factor financiero $f(T_{i,s},0)$ cierto:

$$f(T_{i,s},0) = e^{-\int_0^{T_{i,s}} \rho(\tau)d\tau} \quad [18]$$

siendo $\rho(\tau)$ la ley financiera que rige en el instante r o el rendimiento financiero que proporciona en ese instante la prima de la cedente o del reasegurador, según el caso. Si la ley financiera es constante, $\rho(\tau) = \rho$ $\forall \tau \in [0,T_{i,s}]$, entonces el factor financiero toma la siguiente expresión:

$$f(T_{i,s},0) = e^{-\rho T_{i,s}} \quad [19]$$

- ***Factor financiero aleatorio***

En este caso suponemos desconocida la evolución futura del rendimiento financiero de las inversiones dentro del intervalo temporal considerado, lo que dará lugar a una evolución estocástica de la ley financiera en el tiempo. Según este planteamiento, para un instante dado, τ, la ley financiera asociada a dicho instante, $\rho(\tau)$, es una variable aleatoria. (En adelante la expresiones en negrita representarán variables aleatorias).

Consideramos, sin embargo, conocido el comportamiento medio de la ley financiera en el plazo $[0,t]$, que suponemos constante y lo perturbamos con un ruido blanco ampliado por una volatilidad también constante.

Bajo esta hipótesis, existen diferentes enfoques para determinar el factor de actualización que ahora será estocástico. En particular consideramos dos de estos enfoques.

En el primero de ellos propuesto por P. Devolder (1993) se obtiene el factor de actualización estocástico como el recíproco del factor financiero de capitalización, viniendo éste último dado por la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$d\boldsymbol{C}_s = \boldsymbol{C}_s\rho ds + \boldsymbol{C}_s\sigma d\boldsymbol{W}(s) \quad [20]$$

siendo $\boldsymbol{C}_s$ la variable aleatoria cuantía del capital equivalente en s, C_0 la cuantía conocida del capital en el origen de la operación, ρ el valor medio de la ley financiera en $[0,t]$, σ el parámetro de volatilidad de la ley financiera en $[0,t]$, y $\boldsymbol{W}(s)$ un proceso de Wiener estandar. La solución de la ecuación diferencial estocástica [20] se obtiene mediante la aplicación del lema de Itô y con la condición de contorno inicial $\boldsymbol{C}_0 = C_0$, resultando:

$$f(0,s) = e^{\left[\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma \boldsymbol{W}(s)\right]} \quad [21]$$

donde $f(0,s)$, el factor de capitalización estocática, es una variable aleatoria que sigue una distribución lognormal siendo los parámetros de la distribución normal asociada:

$$N\left(\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)s, \sigma\sqrt{s}\right)$$

Por tanto, el factor de actualización estocástica obtenido como reciproco de $\boldsymbol{f}(0,s)$ es:

$$\boldsymbol{f}(s,0) = \frac{1}{\boldsymbol{f}(0,s)} = e^{-\left[\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma \boldsymbol{W}(s)\right]} \quad [22]$$

Si consideramos para efectuar la valoración el criterio de la esperanza matemática del factor, entonces se llega a la siguiente expresión:

$$E[\boldsymbol{f}(s,0)] = e^{-(\rho - \sigma^2)s}$$

Para Devolder (1993) la esperanza matemática del factor de actualización depende de la volatilidad de la ley financiera σ, de tal forma que si $\sigma = 0$, la esperanza de dicho factor coincidirá con el factor financiero cierto de ley financiera constante.

Por tanto, bajo este criterio, el factor financiero $f(T_{i,s},0)$, tomará la siguiente expresión:

$$f(T_{i,s},0) = e^{-(\rho - \sigma^2)T_{i,s}} \qquad [23]$$

En el segundo enfoque, A. Alegre y R. Mayoral (2000) calculan directamente el factor de actualización estocástico resolviendo la ecuación diferencial [20] pero aplicando la condición de contorno en el final del proceso, $C_n = C_n$, siendo la expresión del factor de actualización obtenida:

$$f(s,0) = e^{-\left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma W(s)} \qquad [24]$$

En este caso,

$$E[f(s,0)] = e^{-\rho s}$$

Como podemos observar la esperanza del factor financiero de actualización estocastico, $E[f(s,0)]$, coincide con el factor financiero cierto de ley financiera constante cuando $T = s$, $f(T,0) = e^{-\rho T}$, y en consecuencia, es independiente de la volatilidad σ que perturba la ley financiera.

Por tanto, bajo este criterio:

$$f(T_{i,s},0) = e^{-\rho T_{i,s}} \qquad [25]$$

APLICACIÓN NUMÉRICA

En este apartado desarrollamos numéricamente las primas de Reaseguro Financiero *Finite Risk* tanto en la modalidad de cuota-parte como en la modalidad de exceso de pérdida.

Sea $T_j - T_{j-1}$, el tiempo, en años, que transcurre entre el siniestro j y el siniestro j-1. Si el tiempo de ocurrencia entre siniestros sigue una distribución exponencial de parámetro λ para $j = 1,2,3...,N$ y $\lambda > 0$ y son variables independientes entre sí; entonces la variable aleatoria número de siniestros N asociados al intervalo $[0,t]$ sigue una distribución Poisson de parámetro λt, es decir:

Si $T_j - T_{j-1} \sim \text{Exp}(\lambda)$ para $j = 1,2,3,...,N$ y $\lambda > 0$ entonces $N \sim \text{P}(\lambda t)$

A partir de $T_j - T_{j-1}$ podemos determinar la variable aleatoria T_i por suma:

$$T_i = \sum_{j=1}^{i} T_j - T_{j-1}$$

Como la variable aleatoria número de siniestros, N, sigue una distribución de Poisson su esperanza coincide con el valor del parámetro de la distribución, esto es $E(N) = \lambda t$, pudiendose interpretar λ como el número medio anual de siniestros. El parámetro λ también nos servirá para calcular el tiempo medio entre dos siniestros, dado que $E(T_j - T_{j-1}) = 1/\lambda$.

Los ejemplos numéricos que a continuación desarrollamos consideran las siguientes hipótesis:

$X_i \sim \text{EXp}(\mu)$ para $i = 1,2,3,....,N$ siendo $1/\mu$ el coste medio de los siniestros en el intervalo $[0,t]$

$T_j - T_{j-1} \sim \text{Exp}(\lambda)$, para $i = 1,2,3,....,N$, por tanto $N \sim P(\lambda t)$ siendo λ el número medio anual de siniestros.

Los datos obtenidos han sido calculados generando, por simulación, 100.000 realizaciones de las variables aleatorias Z_c y Z_r.

1. Ley financiera cierta: Suponemos que el rendimiento financiero de las primas invertidas, expresado en tanto efectivo anual I_1, es el mismo

TABLA I.

I_1	$E(Z_c)$	$D(Z_c)$	$E(Z_r)$	$D(Z_r)$	$\frac{D(Z_c)}{E(Z_c)}$	$\frac{D(Z_r)}{E(Z_r)}$
0	150000,00	13387,04	100000,00	8924,69	0,08924	0,08924
0,02	142822,47	12749,32	95214,98	8499,55	0,08926	0,08926
0,04	136215,50	12172,87	90810,33	8115,24	0,08936	0,08936

para el reasegurador y para la cedente y además es conocido y constante para todo el horizonte temporal de la operación.

a. Modalidad de reaseguro cuota-parte:

- Cuota de retención de la cedente $k = 0.6$
- Cuota de cesión al reasegurador $1\text{-}k = 0.4$
- Horizonte temporal de la operación $t = 5$ años
- Número medio anual de siniestro $\lambda = 50$
- Coste medio de los siniestros $1/\mu = 1000$ u.m

b. Reaseguro de exceso de pérdida:

- Pleno de retención $M = 1000$
- Horizonte temporal de la operación $t = 5$ años
- Número medio anual de siniestro $\lambda = 50$
- Coste medio de los siniestros $1/\mu = 1000$ u.m.

En ambas modalidades de reaseguro, la prima *cedida* y la *prima retenida* por el asegurador directo son inversamente proporcionales al tipo de interés de valoración tanto en términos esperados como en términos de desviaciones. Sin embargo, en términos relativos las desviaciones de la prima de la cedente y del reasegurador son proporcionalmente más altas respecto a los valores esperados conforme aumenta el tipo de interés.

Podemos observar también, que si $I_1 = 0$, entonces se da la siguiente relación entre esperanzas:

$$E(Z_C) + E(Z_R) = E(N) * E(X) = 250 * 1000 = 250.000$$

debido a que, en este caso, el proceso de riesgo sólo depende de las variables aleatorias N y X; Sin embargo, al incorporar el tipo de interés en el cálculo de la prima resulta:

$$E(Z_c) + E(Z_r) < E(N) * E(X) = 250.000$$

2. Ley financiera aleatoria: Si consideramos un ambiente aleatorio, los valores obtenidos bajo una ley financiera cierta coincidirán con la valoración estocástica aplicando el criterio de la esperanza matemática del factor de actualización dado por A. Alegre y R. Mayoral; sin embargo, si consideramos el factor de actualización en términos esperados de P. Devolder, deberemos tener en cuenta en la valoración la volatilidad de la ley financiera.

En nuestro caso, supondremos *que la volatilidad* σ de la ley financiera es la misma para la cedente y para el reasegurador.

a. Modalidad de reaseguro cuota-parte:

- Cuota de retención de la cedente $k = 0.6$
- Cuota de cesión al reasegurador $1\text{-}k = 0.4$
- Horizonte temporal de la operación $t = 5$ años
- Número medio anual de siniestro $\lambda = 50$
- Coste medio de los siniestros $1/\mu = 1000$ u.m.
- Tanto efectivo anual *0,04*

b. Reaseguro de exceso de pérdida:

- Pleno de retención $M = 1000$
- Horizonte temporal de la operación $t = 5$ años
- Número medio anual de siniestro $\lambda = 50$
- Coste medio de los siniestros $1/\mu = 1000$ u.m.
- Tanto efectivo anual *0,04*

En ambos casos la volatilidad afecta a la prima de reaseguro y a la prima que retiene la cedente de forma directamente proporcional, tanto en términos esperados como en términos de desviaciones, por tanto cuanto mayor sea la volatilidad de la ley financiera, es decir, cuanto más inestable sea el ambiente financiero, mayor será la prima

TABLA II.

I_1	$E(Z_c)$	$D(Z_c)$	$E(Z_r)$	$D(Z_r)$	$\frac{D(Z_c)}{E(Z_c)}$	$\frac{D(Z_r)}{E(Z_r)}$
0	158039,00	11477,65	91961,00	13523,70	0,07262	0,14705
0,02	150465,80	10931,06	87571,58	12879,13	0,07264	0,14706
0,04	143505,87	10436,94	83519,02	12296,54	0,07272	0,14723

TABLA III.

σ	$E(Z_c)$	$D(Z_c)$	$E(Z_r)$	$D(Z_r)$	$\frac{D(Z_c)}{E(Z_c)}$	$\frac{D(Z_r)}{E(Z_r)}$
0	136215,50	12172,87	90810,33	8115,24	0,08936479	0,08936472
0,002	136216,82	12172,98	90811,21	8115,32	0,08936473	0,08936451
0,004	136220,77	12173,32	90813,85	8115,51	0,08936463	0,08936423

de la operación y en consecuencia mayor será la prima que retiene la cedente y la prima que cobre el reasegurador. La volatilidad está actuando como un recargo sobre las primas de la operación.

En términos relativos respecto a los valores esperados, las desviaciones de las primas de la cedente y del reasegurador son, sin embargo, inversamente proporcionales a la volatilidad del mercado.

Este comportamiento nos permite señalar que el factor de actualización determinado por P. Devolder está asumiendo implícitamente una posición adversa al riesgo por parte del decisor que en este caso es la compañía cedente y por parte de la compañía reaseguradora. De esta forma, ante una espectativa de mayor inestabilidad en el ambiente financiero y por tanto de mayor riesgo, el decisor reacciona subiendo la prima.

CONCLUSIONES

En los últimos años surgen en el mercado nuevas formas de reaseguro con plazos de cobertura superiores al año, que tienen como objetivo no sólo cubrir el riesgo se suscripción de la cedente, sino también otro tipo de riesgos como el riesgo de insolvencia derivado de las fluctuaciones del tipo de interés y el riesgo respecto al momento en el que debe efectuarse el pago de las indemnizaciones y por tanto respecto al plazo en el que las primas pueden estar invertidas. El reaseguro financiero en la modalidad *«Finite Risk»* da cabida a la cobertura de estos nuevos riesgos; debido a ello en el cálculo de la prima de reaseguro y de la prima que retiene la cedente debe de tenerse en cuenta el momento de pago de las indemnizaciones, el rendimiento financiero que genera la prima pagada por la cedente al reasegurador y el rendimiento financiero que genera la prima retenida por la cedente.

En el trabajo planteamos el cálculo de un reaseguro *«Finite Risk»* utilizando la técnica de simulación de MonteCarlo, en las modalidades cuotaparte y exceso de pérdida bajo dos supuestos: ley financiera cierta y ley financiera aleatoria.

Bajo la hipótesis de ley financiera cierta, constatamos que la prima de reaseguro y la prima

TABLA IV.

σ	$E(Z_c)$	$D(Z_c)$	$E(Z_r)$	$D(Z_r)$	$\frac{D(Z_c)}{E(Z_c)}$	$\frac{D(Z_r)}{E(Z_r)}$
0	143505,87	10436,94	83519,00	12296,54	0,07194973	0,1472304
0,002	143507,26	10437,03	83520,78	12296,66	0,07272823	0,1472287
0,004	143511,42	104337,33	83523,20	12297,01	0,07272821	0,1472286

que retiene la cedente son inversamente proporcionales al tipo de interés de valoración .

Bajo la hipótesis de ley financiera aleatoria consideramos dos modelos de valoración, el propuesto por Devolder en 1993 y el propuesto por Mayoral y Alegre en el año 2000. Para el cálculo de la prima de reaseguro en ambos modelos hemos aplicado el criterio de la esperanza matemática, el cual nos ha permitido relacionar en el modelo de Devolder la prima de reaseguro y la prima que retiene la cedente con la volatilidad del tipo de interés, afectándolas de forma directamente proporcional.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alegre, A.; Mayoral, R. (2000). «Leyes estocásticas de capitalización y descuento. Compatibilidad bajo el criterio de la esperanza matemática». Ponencia presentada en el Fourth International congress on *Insurance: Mathematics and Economics.* Barcelona, Julio de 2000.
2. Bughman Christoph (1997). *Propoffional and non-proportional reinsurance.* Swiss Re Publishing.
3. Devolder, Pierre (1993). *Finance Stochastique.* Editions de l'Universitée de Bruxelles.
4. Durá, J. M.; López, J. M. (1988). *Fundamentos de estadística.* Editorial Ariel.
5. Pitacco, E. *«Simulation in Insurance»* In M. Goovaerts (eds.) Insurance and Risk Theory, *1986* D. Reidel Publishing Company.
6. Technical Training, Corporate Comunications and Reinsurance and Risk Division of Swiss Re (1999). *An introduction to reinsurance.* Swiss Re Publishing.
7. Winter.U.; (Swiss Reinsurance Company). Financial Reinsurance-Market perspectives. *International Insurance Report. Junio 1991.*