ESTUDIO

Modelos estocásticos de estimación de pérdidas en la protección financiera a través de la titulización del riesgo de catástrofes naturales. Ajuste mediante técnicas de aprendizaje automático

MARÍA JOSÉ PÉREZ FRUCTUOSO
JOSÉ MANUEL MOLINA LÓPEZ
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

La titulización del riesgo catastrófico a través de opciones negociables en bolsa o emisión de bonos, conlleva la elaboración de una ratio de pérdidas subyacente, a partir de las reclamaciones de siniestros asociadas a la ocurrencia de catástrofes. En este trabajo, se desarrollan tres modelos estocásticos para determinar dicha ratio de siniestralidad definiendo la dinámica del proceso de reclamaciones proporcional a una función denominada tasa de declaración de siniestros específica para cada uno de los modelos considerados. Para cada tipo de catástrofe se realiza, a posteriori, la elección del modelo más apropiado a partir de la estimación, con datos reales de reclamaciones por inundaciones en España, de los valores de la tasa de declaración de siniestros específica para cada modelo propuesto. La técnica empleada para llevar a cabo este ajuste se denomina Estrategias Evolutivas (EE). Este tipo de técnicas se encuadran dentro de las técnicas de aprendizaje automático del campo de la Inteligencia Artificial y son especialmente indicadas para resolver problemas de búsqueda u optimización, cuando se trabaja con números reales. Las EE permiten encontrar el valor de la tasa y la volatilidad que minimiza el error entre los valores reales y los estimados para las distintas series de catástrofes utilizadas, mediante procesos de aprendizaje basados en la adaptación al entorno en el que se desarrollan y no requieren de demasiada información para poder llevarse a cabo. Así, definiendo una función objetivo (error cometido para cada serie), el proceso de aprendizaje consigue minimizar dicha función mediante selección de las mejores soluciones y generación de nuevas soluciones a partir de ellas.

INTRODUCCIÓN

Desde finales de los años 80 las catástrofes naturales han generado en media anual, corregida por la inflación desde 1.590.000 millones de euros en daños sobre bienes asegurados. 2003 y 2004 confirman esta tendencia, imputable a factores de riesgo como el aumento de la densidad urbana, la fuerte concentración de valores y la construcción en zonas con alto riesgo.

El mercado asegurador sufre, por tanto, una mayor carga de siniestralidad que la presentada en periodos anteriores: las catástrofes naturales se han incrementado de manera significativa tanto en frecuencia como en intensidad, y si a esto se le suman los siniestros provocados por la acción humana, como el atentado terrorista del 11 de septiembre, se puede deducir que el riesgo afrontado por dicho mercado es extremadamente alto derivando en un incremento de los costes de cobertura que las aseguradoras no pueden trasladar en su totalidad a los clientes.

La industria del seguro y reaseguro, como la mayoría de los sectores de la economía mundial, ha tenido que adaptarse a la situación cambiante de los negocios, transformando los mecanismos para hacer frente a estos nuevos retos. El reaseguro tradicional, con algunas modificaciones, sigue siendo el medio más utilizado por las compañías aseguradoras para la diversificación del riesgo, pero la aparición de nuevos productos (titulización) y mercados (mercado de capitales) especializados en formas alternativas de tratar dicho riesgo ha empezado a transformar la manera como las empresas de esta industria lo asumen.

Una de las principales fuentes de transferencia alternativa de riesgos es la titulización. La titulización se define como la transferencia del riesgo asegurado a los mercados de capitales a través de la creación y emisión de derivados financieros lo que permite a las aseguradoras trasladar parte de su riesgo a los inversores quienes toman posiciones en la ocurrencia y el coste de las catástrofes.

Existen tres razones fundamentales por las que al sector asegurador le interesa la transferencia del riesgo a través de la titulización. En primer lugar, la titulización del riesgo proporciona fondos que reducen la probabilidad de ruina así como los costes derivados de situaciones financieras desfavorables. Por atraparte, las compañías de seguros y el sector empresarial en general, gestionan el riesgo con el objetivo de minimizar el impacto de la volatilidad de los flujos de caja sobre los planes de inversión financiera. En este sentido, la titulización reduce la volatilidad financiera dando lugar a flujos de caja más estables que evitan la descapitalización de proyectos de inversión que exigen una inyección estable de liquidez. Finalmente, otra motivación para estabilizar los ingresos y beneficios deriva de la diversidad de regímenes fiscales existentes. El tratamiento fiscal asimétrico de las ganancias y las pérdidas aumenta los impuestos de aquellas compañías que presentan beneficios volátiles. La reducción de la volatilidad proporciona beneficios estables que permiten a las compañías aumentar su apalancamiento financiero y alcanzar altas cotizaciones en los mercados bursátiles y elevadas calificaciones crediticias.

Hay que destacar también, la tendencia actual de los tipos de interés de las economías desarrolladas a la baja, que motiva a muchos inversores a buscar alternativas de inversión más rentables pero al mismo tiempo más arriesgadas. La manera tradicional de invertir en riesgos asegurables ha sido mediante participaciones en las empresas aseguradoras, pero esto conlleva el riesgo adicional de las fluctuaciones en los precios de las acciones. Desde el punto de vista del inversor, si tiene el atractivo de tipos superiores, porque asumen más riesgo que en los activos tradicionales, y además con correlaciones (beta) igual a cero con el resto de su cartera (o posibilidades de diversificar mejor las carteras ya que las catástrofes naturales no guardan una alta correlación con los mercados de acciones ni de bonos) la titulización de riesgos catastróficos se convierte en una posibilidad de inversión muy atractiva.

Hasta la fecha, las formas principales de titulización han sido las Opciones negociables en bolsa y los bonos de catástrofes. En esta línea, el Chicago Board of Trade (CBOT) lanzó al mercado, en diciembre de 1992, el primer activo derivado diseñado específicamente para la industria aseguradora: los contratos de futuros y de opciones sobre índices de catástrofes, CAT-futures y opciones CAT. Las deficiencias con las que nacieron estos contratos (falta de liquidez de los mercados al no existir un número suficiente de especuladores, y una escasa representatividad del índice utilizado respecto al conjunto de las pérdidas del sector) motivaron su sustitución, en septiembre de 1995, por las denominadas opciones PCS.

Casi al mismo tiempo (1993) se realiza la primera emisión de catastrophe *bonds, o CAT* bonds con pago de elevadas rentabilidades pero condicionados, en cuanto a la pérdida del total o de una parte del principal y de los intereses, a la ocurrencia de una catástrofe determinada a lo largo de la vida del bono (Mueller, P.; 2002).

Como en el caso de las opciones, la mayor parte de las emisiones actuales de bonos de catástrofes se basan en el uso de índices, que muestran el tamaño de las pérdidas reales de las compañías aseguradoras, como desencadenantes de los pagos que genera el bono.

El subyacente de estos contratos es una ratio de siniestralidad de riesgos catastróficos,

$$LR = \frac{L(T_2)}{\text{cte}};$$

definida a partir de la cuantía total de las pérdidas, $L(T_2)$, asociadas a catastrofes ocurridas durante un determinado periodo, T_1 y declaradas antes de la expiración del periodo siguiente T_2. La naturaleza de LR es aleatoria porque la cuantía total de las pérdidas en las que se incurre, $L(T_2)$, es un valor desconocido a lo largo de toda la vida del contrato. A priori ignoramos el número de catástrofes que llegarán a producirse, su magnitud y los momentos de su ocurrencia; tampoco se conoce el ritmo de declaración de los siniestros asociados.

En una aproximación teórica, una de las facetas principales en el análisis de ambas clases de activos derivados es su valoración a lo largo de un intervalo temporal determinado. Para ello, es preciso desarrollar un modelo que permita calcular la evolución en el tiempo de la suma total de las pérdidas, $L(T_2)$, y, obviamente, de la ratio de siniestralidad subyacente de ambos géneros de contratos.

Diversos autores han abordado el problema de la determinación de la ratio de pérdidas subyacente con el objetivo de valorar estos activos derivados (Alegre, A. et al; 2003). El método habitualmente empleado se asienta sobre el desarrollo de modelos de tarificación basados en la hipótesis de movimiento browniano geométrico, cuyo propósito es sistematizar la evolución de la declaración instantánea de los siniestros, y dar cabida en dichos modelos, a través de procesos de Poisson, a la posibilidad de que sobrevengan grandes catástrofes (Cummins, D.; Geman, H.; 1995) (Geman, H.; Yor, M.; 1997).

En este artículo se formaliza un modelo continuo alternativo que permite determinar la ratio de siniestralidad subyacente de los contratos catastróficos de los mercados de capitales. Dicho sistema de cálculo, parte de la base de que la cuantía total de una determinada catástrofe se obtiene mediante la suma de dos variables; la cuantía declarada de siniestros y la cuantía de los siniestros pendiente de declarar. Para modelar las catástrofes, se considera que pueden clasificarse en tres categorías en función de su intensidad; la primera categoría se supondrá de declaración instantánea (no produciendo por tanto IBNR) mientras que las otras dos representarán sucesos más graves con desarrollo temporal.

La hipótesis central del modelo expuesto viene dada por la definición de una dinámica de declaraciones asentada en un modelo decreciente, a razón de un valor denominado tasa de declaración de siniestros, que aplicamos sobre la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

La aleatoriedad en el modelo se incorpora a través de una perturbación de ruido blanco en la tasa de declaración de siniestros; el propósito: representar mejor el comportamiento irregular en el tiempo de las declaraciones de siniestros. Este modelo estocástico se desarrolla para cualquier definición funcional de la tasa de declaración de siniestros y para tres definiciones particulares de dicha tasa: constante, asintótica y mixta.

Finalmente, a partir de los datos experimentales obtenidos del Consorcio de Compensación de Seguros y que representan el comportamiento de las reclamaciones de siniestros en diversas inundaciones ocurridas en España entre 1991 y 999, se propone encontrar los parámetros que define los modelos propuestos que minimizan el error para cada una de las series de datos (para cada catástrofe). Para llevar a cabo esta búsqueda de los parámetros, se va a aplicar una técnica de aprendizaje automático del área de Inteligencia Artificial. El resultado final permitirá observar la capacidad de cada modelo para obtener valores que se aproximen a los valores reales de las catástrofes (Pérez Fructuoso, M. J.; Molina López, J. M.; 2004).

Dentro del campo del aprendizaje automático existen un conjunto de métodos basados en procesos naturales como la selección natural, el comportamiento social, la genética, los procesos neuronales, etc. En particular, el método utilizado se encuadra en la denominada Computación Evolutiva (Holland, J. H.; 1975). Las técnicas de Computación Evolutiva utilizan el proceso de evolución de las especies propuesto por Darwin como fundamento para el desarrollo de algoritmos de búsqueda y optimización. Existen diversos algoritmos según el problema que debe ser resuelto, en este caso los valores que deben ajustarse son números reales (los parámetros que definen los distintos modelos) por lo que se aplicarán las Estrategias Evolutivas (Schewefel, H. P.; 1988) que trabajan directamente con números reales. Este tipo de estrategias permiten realizar la búsqueda sin incorporar conocimiento del problema, es decir, el algoritmo de búsqueda no necesita conocer como están definidos los modelos, tan sólo necesita conocer los resultados de los mismos (la función de error que se desea minimizar). De esta manera la estrategia evalúa las posibles soluciones (valores concretos para los parámetros del modelo), selecciona aquellas que son mejores (han obtenido un menor valor de error sobre la serie de datos de la catástrofe) y a partir de esta selección genera nuevas posibles soluciones (aplicando operadores propios de la estrategia evolutiva) hasta encontrar la solución que minimiza la función objetivo.

MODELOS MATEMÁTICOS

1. Hipótesis de los Modelos

Las catástrofes se clasifican en tres categorías dependiendo de su cuantía o intensidad,

$$k_j^i, \text{ con } i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, \ldots, N^i(t) \tag{1}$$

donde:

- $i = 1, 2, 3$ indica el tipo de catástrofe ocurrida (pequeña cuantía, (1) cuantía media, (2) y grandes catástrofes, (3), respectivamente).
- k_j^i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas dentro de cada grupo i pero con distribuciones de probabilidad diferentes según el tipo de catástrofe considerado.
- $N^i(t)$ representa el número aleatorio de catástrofes que pueden producirse en el intervalo $[0, T_1]$, modelado a través de distribuciones de Poisson independientes para cada tipo i de catástrofe, con intensidad $\lambda^i T_1$ con $i = 1, 2, 3$, y donde T_1 representa la amplitud del periodo en el cual la ocurrencia de una catástrofe se incluye en la elaboración del índice de pérdidas objeto de estudio.

Finalmente, t_j^i para $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, ..., N^i(t)$ y con $t_j^i \leq T$, son variables aleatorias que representan los momentos en los que pueden producirse las catástrofes, de forma que el tiempo que transcurre entre la ocurrencia de dos catástrofes consecutivas del mismo tipo, $t_j^i - t_{j-1}^i$, se distribuye exponencialmente con parámetro λ^i.

La cuantía total de la catástrofe del tipo i ocurrida en el momento t_j^i, $k_j^i(t)$, se define como la suma de dos variables aleatorias:

$$k_j^i = S_j^i(t) + R_j^i(t) \qquad (2)$$

donde:

- $R_j^i(t)$ es la variable aleatoria que determina la cuantía de los siniestros pendiente de declaración en el momento t, asociada a la catástrofe ocurrida en t_j^i.
- $S_j^i(t)$ es la variable aleatoria cuantía declarada hasta t de los siniestros derivados de la catástrofe ocurrida en t_j^i.

Cuando en el momento t_j^i se produce una catástrofe de cuantía k_j^i se inicia el proceso de declaración de siniestros asociados a la misma hasta el final de un determinado periodo de declaración de siniestros, T_2, definido en las especificaciones del índice. Por hipótesis asumimos que, inmediatamente después de la ocurrencia del evento catastrófico, la intensidad de las declaraciones es elevada decreciendo posteriormente hasta anularse cuando no queda ningún siniestro por declarar. Este proceso instantáneo de declaración de siniestros lo representamos de forma cierta a través de la ecuación diferencial,

$$dS_j^i(t) = \alpha^i(t - t_j^i)\, R_j^i(t)\, dt \qquad (3)$$

donde $\alpha^i(t - t_j^i)$ es una función de valor real.

Diferenciando la ecuación (2) resulta:

$$dS_j^i(t) = -dR_j^i(t) \qquad (4)$$

y sustituyendo en la ecuación (3), $dS_j^i(t)$ por el resultado obtenido en (4), obtenemos la ecuación diferencial determinista que describe el comportamiento en el tiempo de la variable fundamental en la formalización del modelo, $R_j^i(t)$:

$$dR_j^i(t) = -\alpha^i(t - t_j^i)\, R_j^i(t)\, dt \qquad (5)$$

cuya solución resulta:

$$R_j^i(t) = k_j^i e^{-\alpha^i(t - t_j^i)} \qquad (6)$$

La ecuación (5) muestra que la cuantía de siniestros pendiente de declarar decrece con el tiempo a razón de la función $\alpha^i(t - t_j^i)$, llamada *tasa de declaración de siniestros.*

La obtención de esta tasa se realiza a partir del análisis de series históricas de declaraciones siniestrales considerando que las reclamaciones asociadas a las catástrofes de cuantía media ($j = 2$) tienen una velocidad de declaración mayor que las grandes catástrofes ($j = 3$), entonces, $\alpha^2(t - t_j^i) > \alpha^3(t - t_j^i)$.

Por hipótesis, las catástrofes de pequeña cuantía, $i = 1$, se declaran íntegramente en el momento en que se producen, t_j^i, pasando a formar parte del índice de pérdidas instantáneamente, $\alpha^1(t - t_j^i) \to \infty$.

En el modelo general determinista (ecuación 5), incorporamos el comportamiento aleatorio de las reclamaciones en el tiempo a través de un proceso de Wiener que perturba la tasa de declaración de siniestros, $\alpha^i(t - t_j^i)$. De esta forma, la ecuación (5) se transforma en la ecuación diferencial estocástica siguiente:

$$dR_j^i(t) = -\alpha^i(t - t_j^i)\, R_j^i(t)\, dt + \sigma^i R_j^i(t) dw_j^i(t) \qquad (7)$$

con $t_j^i \in [O, T_1]$ y $t \in [t_j^i, T_2]$ y donde:

- $\alpha^i(t - t_j^i)$ es la función tasa de declaración de siniestros que representa la tendencia del proceso.
- σ^i es una constante que representa la volatilidad del proceso.
- $w^i(t - t_j^i)$ es el proceso de Wiener asociado a la catástrofe i que se produce en $t_j^i(t)$.

Empíricamente es fácil constatar que cada catástrofe tiene características propias, tipo, momento y lugar de ocurrencia, que dan lugar a una intensidad de declaración de siniestros distinta para cada una de ellas. Este hecho queda reflejado en el modelo considerando perturbaciones diferentes a través de procesos de Wiener independientes.

Por otra parte, perturbar la tasa de declaración de siniestros con un ruido blanco ampliado por σ^i (proceso de Wiener) puede dar lugar a valores de $\alpha^i\,(t - t_j^i)$ negativos, lo que provocaría un crecimiento en el tiempo de la cuantía de siniestros pendiente de declarar debido a la relación inversa que hemos definido en dicha variable. Para asegurar el comportamiento decreciente en el tiempo de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, se restringe la volatilidad a valores pequeños de la misma que aseguren una probabilidad prácticamente nula de crecimiento de $R_j^i\,(t)$.

2. Solución General del Modelo

Aplicando el Lemma de Itô en (7) obtenemos el valor de $R_j^i\,(t)$:

$$R_j^i\,(t) = k_j^i e^{-\int_0^{t-t_j^i} \alpha^i\,(s)ds - \frac{(\sigma^2)^2}{2}(t-t_j^i) + \sigma^i w_j^i(t-t_j^i)} \qquad (8)$$

con las siguientes condiciones de contorno:

- Si $t = t_j^i$ entonces $R_j^i\,(t_j^i) = k_j^i$. En el momento en el que se produce la catástrofe, la cuantía de siniestros pendiente de declarar coincide con el volumen total de la misma.
- Si $t \to \infty$ entonces $R_j^i\,(\infty) = 0$. A medida que pasa el tiempo, la cuantía de siniestros pendiente de declarar se reduce hasta anularse cuando ya no queda ningún siniestro por declarar.

A partir de la relación definida entre $R_j^i\,(t)$ y S_j^i (t) en la ecuación 2, obtenemos s_j^i (t) como:

$$S_j^i\,(t) = k_j^i\left[1 - e^{-\int_0^{t-t_j^i} \alpha^i\,(s)ds - \frac{(\sigma^2)^2}{2}(t-t_j^i) + \sigma^i w_j^i(t-t_j^i)}\right] \qquad (9)$$

Simétricamente a la cuantía de siniestros pendiente de declarar, las condiciones de contorno para la cuantía de siniestros declarada son:

- Si $t = t_j^i$ entonces $S_j^i\,(t_j^i) = 0$. En el momento en el que se produce la catástrofe todavía no se ha producido ninguna reclamación por lo que la cuantía declarada de siniestros en ese momento es 0.
- Si $t \to \infty$ entonces $S_j^i\,(t_j^i) = k_j^i$. Con el tiempo, el total de reclamaciones se identifica con el volumen total de la catástrofe.

Teniendo en cuenta que cada catástrofe es distinta de las demás en cuanto a intensidad, frecuencia y lugar de ocurrencia, la forma en que se van a declarar los siniestros asociados a la misma dependerá del tipo y características propias de la catástrofe que se produzca. Por ello, se proponen a continuación tres definiciones particulares de la tasa de declaración de siniestros: constante, asintótica y mixta cuyo ajuste a posteriori de los datos sobre declaración de siniestros disponibles determinará el modelo a aplicar para determinar la cuantía total de las pérdidas catastróficas.

3. Solución para el Caso de Tasa de Declaración de Siniestros Constante (Tasa Instantánea de Declaración de Siniestros)

Cuando la tasa de declaración de siniestros es constante, $\alpha^i\,(s) = \alpha^i$, calculamos la integral en la ecuación 8 como:

$$\int_0^{t-t_j^i} \alpha^i\,(s)ds = \int_0^{t-t_j^i} \alpha^i ds = \alpha^i \cdot (t - t_j^i) \qquad (10)$$

y sustituyendo en dicha ecuación el resultado obtenido, la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t resulta[2]:

$$R_j^i\,(t) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ k_j^i e^{-\left(\alpha^i + \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)\cdot(t-t_j^i) + \sigma^i w_j^i(t-t_j^i)} & i = 2{,}3 \end{cases} \qquad (11)$$

[2] Si asignamos un valor nulo a la volatilidad $\sigma^i = 0$ se obtiene la ecuación diferencial que describe la evolución de la cuantía de siniestros pendiente de declarar en eí modelo determinista.

y la cuantía declarada de siniestros hasta t:

$$S_j^i(t) = \begin{cases} k_j^i & i = 1 \\ k_j^i \left[1 - e^{-\left(\alpha^i + \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right) \cdot (t - t_j^i) + \sigma^i w_j^i (t - t_j^i)}\right] & i = 2,3 \end{cases} \tag{12}$$

$R_j^i(t)$ es una variable aleatoria cuya distribución depende de la distribución de la cuantía total de la catástrofe, k_j^i. Si consideramos la hipótesis de que dicha cuantía k_j^i es un valor constante, $R_j^i(t)$ se distribuye lognormalmente, donde los parámetros de la distribución *normal asociada son:*

$$N\left(\ln k_j^i - \left(\alpha^i + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - t_j^i), \sigma^i \sqrt{t - t_j^i}\right) \tag{13}$$

Esto supone que, en promedio, la cuantía de siniestros pendiente de declarar tiene un decrecimiento exponencial asintótico al eje de abcisas y la cuantía declarada de siniestros crece asintóticamente a k_j^i, es decir, la cuantía media de siniestros pendiente de declarar tiene el mismo comportamiento que el modelo cierto:

$$E[R_j^i(t)] = k_j^i e^{-\alpha^i (t - t_j^i)}$$

$$E[S_j^i(t)] = k_j^i \left[1 - e^{-\alpha^i (t - t_j^i)}\right] \tag{14}$$

4. Solución para Tasa de Declaración de Siniestros Asintótica

Cuando la tasa de declaración de siniestros se comporta asintóticamente, $\alpha^i(s) = \alpha^i \cdot (1 - e^{-\beta^i s})$, calculamos la integral de la ecuación 8 como:

$$\int_0^{t - t_j^i} \alpha^i(s) ds = \int_0^{t - t_j^i} \alpha^i \cdot (1 - e^{-\beta^i s}) ds =$$

$$= \alpha^i \cdot (t - t_j^i) - \frac{\alpha^i}{\beta^i} \cdot (1 - e^{-\beta^i (t - t_j^i)}) \tag{15}$$

Sustituyendo el resultado obtenido en dicha ecuación, la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t resulta:

$$R_j^i(t) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ k_j^i e^{-\left(\alpha^i + \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right) \cdot (t - t_j^i) + \sigma^i w_j^i (t - t_j^i)} e^{\frac{\alpha^i}{\beta^i} \cdot \left(1 - e^{\beta^i \cdot (t - t_j^i)}\right)} & i = 2,3 \end{cases} \tag{16}$$

y la cuantía declarada de siniestros hasta t es:

$$S_j^i(t) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ k_j^i \left[1 - e^{-\left(\alpha^i + \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right) \cdot (t - t_j^i) + \sigma^i w_j^i (t - t_j^i)} e^{\frac{\alpha^i}{\beta^i} \cdot \left(1 - e^{\beta^i \cdot (t - t_j^i)}\right)}\right] & i = 2,3 \end{cases} \tag{17}$$

5. Solución para el Caso de Tasa de Declaración de Siniestros Mixta (Constante y Asintótica)

Cuando la tasa de declaración de siniestros es mixta, creciente linealmente hasta el momento s_m^i y constante a partir de ese momento al nivel, $\alpha^i(s) = \alpha^i$.

$$\alpha^i(s) = \begin{cases} \frac{\alpha^i}{s_m^i} s & 0 \leq s \leq s_m^i \\ \alpha^i & s > s_m^i \end{cases} \tag{18}$$

calculamos la integral de la ecuación 8 teniendo en cuenta dos situaciones diferenciadas:

– Si el momento de valoración de pérdidas o de cálculo del índice, t, es anterior al momento de cambio de la tasa de declaración de siniestros, $t_j^i \leq t \leq t_j^i + s_m^i$, entonces

$$\int_0^{t - t_j^i} \alpha^i(s) ds = \int_0^{t - t_j^i} \frac{\alpha^i}{s_m^i} s ds = \frac{\alpha^i \cdot (t - t_j^i)^2}{2 s_m^i} \tag{19}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 8, la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t resulta:

$$R_j^i(t) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ k_j^i e^{-\left(\frac{\alpha^i}{2 s_m^i}(t - t_j^i) + \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right) \cdot (t - t_j^i) + \sigma^i w_j^i (t - t_j^i)} & i = 2,3 \end{cases} \tag{20}$$

y la cuantía declarada de siniestros hasta t es:

$$S_j^i(t) = \begin{cases} k_j^i & i = 1 \\ k_j^i\left[1 - e^{-\left(\frac{\alpha^i}{2s_m^i}(t-t_j^i) + \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)\cdot(t-t_j^i) + \sigma^i w_j^i(t-t_j^i)}\right] & i = 2,3 \end{cases} \quad (21)$$

– Si el momento de valoración de pérdidas o de cálculo del índice, t, es superior al momento en que cambia el ritmo de declaración de los siniestros, $t \leq t_j^i + s_m^i$, entonces,

$$\int_0^{t-t_j^i} \alpha^i(s)ds = \int_0^{s_m^i} \frac{\alpha^i}{s_m^i} sds \int_{s_m^i}^{t-t_j^i} \alpha^i ds =$$

$$= \alpha^i(t-t_j^i) - \frac{\alpha^i s_m^i}{2} \quad (22)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación *8*, la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t resulta:

$$R_j^i(t) = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ k_j^i e^{-\left(\alpha^i + \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)\cdot(t-t_j^i) + \sigma^i w_j^i(t-t_j^i)} e^{\frac{\alpha^i s_m^i}{2}} & i = 2,3 \end{cases} \quad (23)$$

y la cuantía declarada de siniestros hasta t es:

$$S_j^i(t) = \begin{cases} k_j^i & i = 1 \\ k_j^i\left[1 - e^{-\left(\alpha^i + \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)\cdot(t-t_j^i) + \sigma^i w_j^i(t-t_j^i)} e^{\frac{\alpha^i s_m^i}{2}}\right] & i = 2,3 \end{cases} \quad (24)$$

6. Cálculo del índice de Siniestralidad $L(T_2)$

El índice de pérdidas catastróficas considerado se define como:

$$\mathrm{LR} = \frac{L(T_2)}{\mathrm{cte}} \quad (25)$$

donde $L(T_2)$, es la cuantía total declarada de siniestros en T_2 asociada a las catástrofes ocurridas en el periodo $[0, T_1]$. Esta variable está formada por la agregación de tres componentes.

$$L(T_2) = L^1(T_2) + L^2(T_2) + L^3(T_2) = \sum_{i=1}^{3} L^i(T_2) \quad (26)$$

donde $L^i(T_2)$ es la cuantía total declarada de siniestros en T_2 asociada a la catástrofe del tipo i ocurrida en $[0, T_1]$

$$L^i(T_2) = \sum_{j=1}^{N^i(T_1)} k_j^i\left[1 - \mathrm{e}^{-\left.\int_0^{T_2-t_j^i} \alpha^i(s)ds - \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)\cdot(T_2-t_j^i) + \sigma^i w_j^i(T_2-t_j^i)}\right] \quad (27)$$

Entonces, $L(T_2)$ puede expresarse como sigue:

$$L(T_2) = \sum_{i=1}^{3} L^i(T_2) = \sum_{j=1}^{N^1(T_1)} k_j^1 + \sum_{i=2}^{3}\sum_{j=1}^{N^i(T_1)}$$

$$k_j^1\left[1 - \mathrm{e}^{-\left.\int_0^{T_2-t_j^i} \alpha^i(s)ds - \frac{(\sigma^i)^2}{2}\right)\cdot(T_2-t_j^i) + \sigma^i w_j^i(T_2-t_j^i)}\right] \quad (28)$$

OPTIMIZACIÓN MEDIANTE ESTRATEGIAS EVOLUTIVAS

Los modelos expuestos anteriormente representan el proceso de declaración de siniestros asociado a la ocurrencia de catástrofes. En cada uno de ellos, la velocidad con que se lleva a cabo dicha declaración, depende de una función que hemos denominado tasa de declaración de siniestros y que hemos definido de tres formas alternativas: constante asintótica y mixta. Cada una de estas definiciones de la tasa depende de un conjunto de parámetros, que determinan, en definitiva, la forma con que se van a realizar las reclamaciones, y que deben ser calculados para cada uno de los modelos y para cada conjunto de datos disponibles (cada conjunto contiene los datos de las reclamaciones de una catástrofe). En el primer modelo, tasa de declaración de siniestros constante, deben calcularse dos parámetros (α, σ), en el segundo, tasa asintótica, y tercer modelo, tasa mixta, son necesarios tres parámetros, (α, σ, β) y (α, σ, s_m) respectivamente.

Para encontrar dichos parámetros vamos a formular un problema de optimización, con una función objetivo que debe ser minimizada, y aplicaremos las técnicas de computación evolutiva denominadas Estrategias Evolutivas (EE) para realizar el proceso de búsqueda (Fogel, D.B.;1997).

1. El Proceso de Optimización

Siguiendo la formulación previa, el problema global de optimización debe ajustar simultáneamente todos los parámetros de un modelo para cada conjunto de datos, de manera que se minimice la diferencia entre el valor estimado por el modelo y el valor real. Por tanto, la función que debe ser optimizada es la suma del cuadrado de las diferencias entre los valores reales y los estimados.

En general, el proceso de optimización puede definirse como (Torn, A.; Zilinskas, A.; 1991):

Dada una función $f\colon M \subseteq \Re^n \to \Re$, $M \neq \varnothing$, para $x \in M$ *el valor* $f\colon = f(x) > -\infty$ se denomina el mínimo global, iff: $\forall\, x \in M\colon f(x^*) \leq f(x)$

donde x^* es el punto donde se encuentra el mínimo global, f es la función objetivo, y M es el conjunto o dominio de las soluciones posibles.

Aplicando esta definición al problema que nos ocupa, el proceso de optimización sólo debe tener en cuenta una única restricción: *"la tasa de declaración de siniestros debe ser positiva (>0)"*. En este trabajo se incluye la restricción en la propia codificación del problema de forma que todas las soluciones que se vayan generando sean soluciones posibles y no se tenga que descartar ninguna debido al incumplimiento de dicha restricción. Haciéndolo de esta manera el espacio de soluciones, donde se va a buscar aquella que minimiza la función objetivo, no contiene regiones no válidas.

2. Estrategias Evolutivas

El término Computación Evolutiva hace referencia a un conjunto de métodos de aprendizaje automático que, basándose en la imitación de varios procesos naturales que intervienen en la evolución de las especies (selección natural, mutaciones, sobrecruzamientos), tratan de resolver problemas complejos de búsqueda, optimización, aprendizaje, predicción o clasificación.

Las técnicas evolutivas basan su aprendizaje en la adaptación al entorno, por tanto, dicho proceso de aprendizaje no necesita de mucha información y está sesgado por el entorno en el que se desarrolla. El efecto final es la obtención de soluciones más generales independientes de la definición del entorno.

Las principales técnicas de computación evolutiva son los Algoritmos Genéticos (Goldber, 1989), la Programación Evolutiva (Fogel, 1995), las Estrategias Evolutivas (Kurwase, 1992), los sistemas Clasificadores (Holland, 1975) y la Programación Genética (Koza, 1992). Las Estrategias Evolutivas, EE, fueron ideadas para resolver problemas técnicos de optimización y hoy día constituyen, en el sector de la ingeniería, un método de resolución genérico más. Actualmente, se ha ampliado el campo de aplicación de las mismas utilizándose con éxito en dominios tan dispares como la ciencia de los materiales, cristalografía, simulación de sistemas complejos, etc. Ofrecen ventajas prácticas cuando se enfrentan a problemas de optimización complejos [7] que pueden resumirse en: simplicidad conceptual, amplia aplicabilidad, potencialidad para usar el conocimiento y para hibridarlas con otros métodos, paralelismo implícito, robustez frente a cambios dinámicos y la capacidad de autooptimización y resolución de problemas de los que no se sabe si existe solución.

Una estrategia evolutiva se define como una 8-tupla (Back, T.; 1996):

$$EE = (l,\ \Phi,\ \Omega,\ \Psi,\ s,\ \iota,\ \mu,\ \lambda) \qquad (29)$$

donde $I = (\vec{x}, \vec{\sigma}, \vec{\alpha}) = \Re^n \times \Re_+^{n_\sigma} \times [-\pi, \pi]^{n_\sigma}$ es el espacio de individuos, $n_\sigma \in \{1,\ldots, n\}$ indica la dimensión del vector de desviaciones estándar de los parámetros a ajustar, n el número de parámetros a ajustar y $n_\sigma \in \{0,\ (2n\text{-}n_\sigma)\ (n_\sigma\text{-}1)/2\}$ la dimensión del vector de ángulos de rotación[3], $\boldsymbol{\Phi} : I \rightarrow \Re = f$, es la función de fitness, $\boldsymbol{\Omega} = \{m_{\{\tau, \tau', \beta\}}: I^{\lambda} \rightarrow I^{\lambda}\} \cup \{r_{\{rx, r\sigma, r\alpha\}}: I^{\mu} \rightarrow I^{\lambda}\}$ son los operadores genéticos: mutación y recombinación. $\boldsymbol{\Psi}(P) = s(P \cup m_{\{\tau, \tau', \beta\}}(r_{\{rx, r\sigma, r\alpha\}}(P)))$ es el proceso para generar un nuevo conjunto de individuos, s es el operador de selección y ι es el criterio de terminación.

De forma general, las EE trabajan con una población de individuos pertenecientes al dominio de los números reales, que mediante los procesos de mutación y recombinación evolucionan para alcanzar el óptimo de la función objetivo. Cada individuo es un posible óptimo de la función objetivo; la representación de cada individuo de la población consta de dos tipos de variables, las variables objetivo y las variables de estrategia. Las variables objetivo son los posibles valores que hacen que la función objetivo alcance el óptimo global y las variables de estrategia son los parámetros mediante los que se gobierna el proceso evolutivo o, dicho de otro modo, indican de qué manera las variables objetivo son afectadas por la mutación.

Los pasos a realizar para aplicar una Estrategia Evolutiva son, esquemáticamente, los siguientes:

1. Se genera aleatoriamente una población inicial, P, de individuos.
2. Los individuos de esta población son evaluados calculando el valor de adecuación de cada uno de ellos a su entorno.
3. Se verifica si se cumple un determinado criterio de convergencia fijado previamente.
4. Si se ha alcanzado dicho criterio de convergencia, la estrategia ha terminado.
5. Si no es así, de la población generada se eligen una serie de individuos, μ,como padres, que pueden o no sufrir recombinación, dando lugar a los hijos, λ, que sufren mutación, tanto en la parte de parámetros objetivo como en la de parámetros de estrategia.
6. Del conjunto formado por padres e hijos, según el tipo de Estrategia Evolutiva considerada, se seleccionan los individuos que van a sobrevivir y que dan lugar a la nueva población.
7. Se repite el proceso desde el paso (2), es decir la nueva población vuelve a ser evaluada y el proceso se vuelve a repetir hasta que se alcanza el criterio de convergencia.

El proceso de recombinación se lleva a cabo a través del operador de sobrecruzamiento.

Existen dos tipos de sobrecruzamiento: el discreto y el intermedio. En el sobrecruzamiento discreto, el individuo hijo será un vector cuya composición dependerá de los valores aleatorios generados según una distribución uniforme: si el número generado es mayor que un umbral, la componente del vector será la de uno de los padres y, si es menor que el umbral será la del otro. En el caso del sobrecruzamiento intermedio, por el contrario, los valores de las componentes del vector hijo serán la media de los valores de las componentes de los vectores padres.

El operador de mutación es el que realmente guía la búsqueda en las Estrategias Evolutivas de forma que cada parámetro objetivo será mutado en la magnitud indicada por su correspondiente parámetro de estrategia. Sin embargo, sufrirán mutación tanto los parámetros objetivo como los parámetros de estrategia. El proceso de mutación seguido por los parámetros objetivo se basa, para cada individuo, en la aplicación de la siguiente fórmula:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \boldsymbol{\sigma}_i' \cdot \vec{N}(\vec{0}, 1) \qquad (30)$$

donde $\vec{x}'$ es el vector de parámetros objetivo mutado, x el vector de parámetros objetivo sin mutar $\boldsymbol{\sigma}_i' \cdot \vec{N}(\vec{0}, 1)$ una distribución gaussiana de media cero y de desviación estándar $\boldsymbol{\sigma}_i'$.

Los parámetros de estrategia se mutan cada uno de ellos de forma proporcional a un factor generado aleatoriamente según una distribución. Esta distribución puede ser uniforme o gaussiana que depende de un valor constante de varianza definido a priori.

[3] En este trabajo la definición de un individuo se ha simplificado para que los ángulos de rotación n_{α} no se tengan en cuenta, $n_{\alpha} = 0$

En este caso la función utilizada para realizar la mutación de los parámetros de estrategia es:

$$\sigma_i' = \sigma_i \cdot \exp(\tau' \cdot N(0,1) + \tau \cdot N_i(0,1)) \quad (31)$$

La generación de nuevos individuos y la selección de los mismos se puede realizar de dos maneras distintas:

1. (μ, λ)-EE, donde $\lambda > \mu \geq 1$ y (μ, λ) significa que μ-padres generan λ-hijos mediante recombinación y mutación en cada generación. Los mejores μ hijos son seleccionados de forma determinista de los λ hijos y reemplazan a los μ padres.
2. $(\mu + \lambda)$-EE, donde se hace uso del concepto de elitismo, es decir en cada generación los mejores μ-individuos del conjunto formado por los μ-padres y λ-hijos remplazan a los μ-padres. De esta manera las mejores soluciones se mantienen a lo largo de las generaciones.

El coste computacional de cualquiera de las dos formulaciones, (μ, λ)-EE y $(\mu + \lambda)$-EE, es el mismo.

AJUSTE DE LA TASA DE DECLARACIÓN DE SINIESTROS Y DE LA VOLATILIDAD

En este trabajo, se parte de un conjunto de modelos matemáticos aleatorios (definidos en la sección 2) que deben ajustarse a datos reales obtenidos a partir de la ocurrencia de diferentes desastres naturales. Los datos empíricos sobre los que se ha realizado el estudio se corresponden con inundaciones registradas en diversas regiones de España en distintos momentos del tiempo: *Alcira (10/01/1991), San Sebastián (06/23/1992), Barcelona I (09/14/1999), Barcelona 2 (10/20/2000), Zaragoza (10/20/2000), Valencia (10/20/2000) y Murcia (10/20/2000).* Cada catástrofe está representada por una serie temporal de datos de las reclamaciones siniestrales por semana. A cada una de estas series se le aplica el proceso evolutivo para encontrar los parámetros que definen el modelo al que se ajusta dicha serie.

El problema de optimización puede formularse como: *«búsqueda de parámetros que definen la función de distribución (para cada modelo la suya) que minimiza el error para cada dato real del conjunto de ejemplos».* La codificación es directamente los valores buscados, dos para el modelo 1, (α, σ) y tres para los modelos 2 y 3, (α, σ, β) y (α, σ, s_m) respectivamente. La función de fitness (evaluación de cada individuo sobre cada serie) es claramente la suma cuadrática del error sobre el conjunto de datos reales pero, en este caso, debido al carácter estocástico de la función, cada individuo debe ser evaluado mediante el cálculo del valor medio del error en un número elevado de realizaciones del experimento. En este trabajo, el número de evaluaciones considerado ha sido de 10.000, eliminando así la naturaleza aleatoria introducida por el proceso de Wiener.

El tipo de recombinación utilizado para ajustar los distintos parámetros de los modelos matemáticos propuestos es la recombinación discreta y $(\mu + \lambda)$-EE es la estrategia seguida para seleccionar a los nuevos individuos. El resto de parámetros necesarios para la aplicación de la estrategia evolutiva se muestran en la Tabla 1. Además, la EE se ha ejecutado con diferentes valores de inicialización del generador de números aleatorios para asegurar que el valor obtenido como solución no puede ser mejorado.

La Tabla 2, a continuación, muestra los resultados globales para cada serie y para cada modelo, obtenidos tras aplicar el proceso de optimización. Los valores de la misma representan el valor medio del error cometido en 10.000 iteraciones del proceso al fijar el valor de los parámetros. También se encuentran el valor del error cuadrático medio acumulado, y la media y

Tabla 1. Parámetros Definitorios de la Estrategia Evolutiva.

PARÁMETRO	VALOR
Desviaciones Estándar Iniciales $\sigma_i(O)$	Generados aleatoriamente en (0.0,3.0]
Número de ángulos de rotaciones n_α	0
Tamaño de la población de padres μ	20
Tamaño de la población de hijos λ	80
Criterio de terminación	Número de generaciones = 500

Tabla 2. Resultados Globales.

	MODELO 1	MODELO 2	MODELO 3
Alcira	199,05	577,23	1059,89
Barcelona 1	150,18	349,12	537,39
Barcelona 2	383,92	275,10	472,15
San Sebastián	845,19	618,40	1060,43
Murcia	863,12	224,55	687,35
Valencia	904,16	825,99	1147,68
Zaragoza	537,18	1.084,68	624,73
Error Cuadrático Medio Acumulado	3882,801	3955,061	5589,61
Media Error Cuadrático Medio	554,69	565,011	798,52
Desviación Error Cuadrático Medio	321,77	312,981	281,69

la desviación estándar del error cuadrático medio en las 10000 iteraciones.

La Tabla 3 muestra los parámetros obtenidos para cada modelo y para cada serie, tras la aplicación del proceso de optimización basado en estrategias evolutivas.

CONCLUSIONES

En este artículo se propone la formalización de varios modelos matemáticos que permiten determinar el índice de pérdidas desencadenante en el proceso de titulización del riesgo catastrófico realizado mediante la emisión de títulos vinculados a seguros, opciones sobre catástrofes y CAT bonds.

Los modelos propuestos para definir la distribución de probabilidad de la cuantía total de pérdidas catastróficas permiten clasificar las catástrofes y la estimación de sus parámetros asociados. El núcleo central de los modelos es la definición de la dinámica de las declaraciones proporcional a una función denominada tasa de declaración de siniestros que aplicamos sobre la cuantía de los

Tabla 3. Parámetros.

	MODELO 1		MODELO 2			MODELO 3		
	α	σ	α	β	σ	α	s_m	σ
Alcira	0,311	0,003	0,332	0,482	0,058	0,440	0,002	0,096
Barcelona 1	0,227	0,002	0,226	0,462	0,033	0,248	0,042	0,039
Barcelona 2	0,339	0,013	0,440	0,410	0,033	0,317	0,190	0,042
San Sebastián	0,451	0,048	0,447	0,587	0,023	0,241	0,733	0,053
Murcia	0,309	0,024	0,637	0,245	0,006	0,058	0,684	0,018
Valencia	0,221	0,031	0,426	0,274	0,042	0,027	0,658	0,029
Zaragoza	0,271	0,002	0,197	0,554	0,025	0,168	0,530	0,011

siniestros pendiente de declarar. Inicialmente consideramos una tasa de declaración determinista para cada tipo de catástrofe para posteriormente aleatorizarla a través de un proceso de Wiener con el objetivo de representar mejor el comportamiento de las declaraciones de siniestros en el tiempo.

La relativa simplicidad de los modelos presentados facilita la estimación de los parámetros que los definen y su simulación mediante la aplicación de técnicas de aprendizaje automático que optimizan el error cuadrático medio entre los datos reales y los resultantes de la aplicación de cada uno de ellos.

Analizando los resultados mostrados en las tablas 2 y 3 es posible concluir que el modelo 1 es el que muestra un mejor comportamiento en media y por tanto mejor se ajusta a los datos reales de declaración de siniestros. Por tanto, para el conjunto de datos disponibles sobre declaraciones de siniestros asociados a catástrofes, el modelo que representa la mejor definición de la distribución de las reclamaciones en el tiempo es el modelo basado en una tasa de declaración de siniestros constante. Esto quiere decir, que bajo la hipótesis de que la cuantía total de la catástrofe es un valor constante, la variable aleatoria cuantía de los siniestros pendiente de declarar sigue una distribución Log-Normal cuya esperanza matemática coincide con la función de distribución exponencial de la cuantía de siniestros pendiente de declarar del modelo determinista en el que no se considera el proceso de Wiener.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ALEGRE, A., DEVOLDER P., PÉREZ, M.J. (2003): «Modele Discret d'Options sur Risques Catastrophiques», *Belgian Actuarial Bulletin*, vol. 3, pp. 28-32.

[2] BACK, T. (1996): *Evolutionary Algorithms in Theory and Practice*. Oxford University Press, Inc.

[3] CUMMINS, D.; GEMAN, H. (1995): «Pricing catastrophe insurance futures and call spreads: An arbitrage approach», en: *Actuarial approach for financial risk, 5 AFIR International Congress*, Bruxelles, vol. 3, pp.45-80.

[4] FOGEL, D.B. (1997): «The Advantages of Evolutionary Computation», Proc. of BCEC97: *BioComputing and Emergent Computation*, D. LUNDH, B. OLSSON, AND A. NARAYANAN (eds.), World Scientific, Singapore, pp. 1-11.

[5] GEMAN, H.; YOR, M. (1997): «Stochastic time changes in catastrophe option pricing».

Insurance: Mathematics and economics, vol. 21, pp. 185-193.

[6] Holland, J.H. (1975): *Adaptation in natural artificial Systems*, MIT Press, Bradford Books edition, Michigan, MI.

[7] Mueller, P. (2002): «Stock Market reactions to the issue of CAT Bonds». *Thesis for the masters of Science in Banking and Finance*. University of Lausanne.

[8] Pérez Fructuoso, M. J.; Molina López, J. M. (2004): «Modelo de evolución de las reclamaciones derivadas de catástrofes». *Boletín Informativo Semanal del Seguro,* n° 28, pp. 25-34.

[9] Schewefel, H. P. (1988): «Evolutionary learning optimum-seeking on parallel computer architectures». In A. Sydow, S. G. Tzafestas, and R. Vichnevetsky, editors, *Proceedings of the International Symposium on Systems Analysis and Simulation 1988, I: Theory and Foundations*, pp. 217-225. Akademie-Verlag, Berlin.

[10] Torn, A.; Zilinskas, A. (1991): «Global Optimization», vol. 350 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Berlin.