

Instituto de Ciencias del Seguro

# **Optimización económica del Reaseguro cedido: Modelos de decisión**

Josefina Rodríguez Mondragón

**FUNDACIÓN MAPFRE**

FUNDACIÓN MAPFRE no se hace responsable del contenido de esta obra, ni el hecho de publicarla implica conformidad o identificación con la opinión del autor o autores.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin el permiso escrito del autor o del editor.

© 2009, FUNDACIÓN MAPFRE  
Paseo de Recoletos 23  
28004 Madrid

[www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro)  
[publicaciones.ics@mapfre.com](mailto:publicaciones.ics@mapfre.com)

ISBN: 978-84-9844-160-4  
Depósito Legal:

## PRESENTACIÓN

Desde 1992 FUNDACIÓN MAPFRE realiza anualmente una convocatoria de ayudas destinadas a promover estudios monográficos en materia de Riesgo y Seguro, incluyendo áreas temáticas relacionadas específicamente con el seguro iberoamericano.

Su objetivo es facilitar apoyo económico para la realización de trabajos de investigación en las áreas antes mencionadas y están dirigidas a titulados universitarios y profesionales del mundo del seguro, de cualquier nacionalidad, que deseen desarrollar programas de investigación.

Para la realización de este trabajo, FUNDACIÓN MAPFRE concedió a su autora, una ayuda a la investigación Riesgo y Seguro en la convocatoria 2006/2007.

Josefina Rodríguez Mondragón se tituló con honores como Actuarial por el Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM) en 2001. Tras un período de 3 años trabajando para el Sector Asegurador realizó sus estudios de Doctorado en Estadística e Investigación Operativa en la Universidad de Valencia, España, donde consiguió el título de Doctora en Ciencias Matemáticas en Febrero 2008 mediante la defensa de su tesis "Reaseguro Óptimo: Una Perspectiva Bayesiana". Actualmente trabaja en el área de reaseguro de la aseguradora mexicana "Grupo Nacional Provincial" donde analiza modelos de Reaseguro Óptimo en Seguros de Daños.



# Prólogo

Este trabajo constituye mi tesis doctoral y recoge la labor de investigación que he realizado durante mi estancia en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Valencia. Fue realizado gracias al financiamiento del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México y la Fundación Mapfre de España. A ésta última agradezco la oportunidad y el privilegio de haber sido una de sus becarias, pero sobre todo agradezco su confianza y apoyo para poder finalizar mi doctorado.

Muchas son las personas que han participado directa e indirectamente en la materialización de este proyecto. De forma especial agradezco a:

Maite Rabena, mi directora de tesis, por su tiempo, trabajo, paciencia, apoyo y dirección.

Mis evaluadores: José Bermúdez, Ana Debón y Ángeles Yáñez por su trabajo de revisión y valiosas propuestas.

Julio Castelblanque, mi tutor en Fundación Mapfre, por sus enriquecedoras sugerencias y todo el apoyo que me brindó para la culminación de este trabajo.

Mi familia, porque sin ellos nada sería posible.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos básicos y definiciones . . . . .	1
1.2. Introducción al Reaseguro . . . . .	4
1.2.1. Clasificación del reaseguro . . . . .	4
1.2.2. Reaseguros más utilizados . . . . .	5
1.3. Notación . . . . .	8
1.4. Objetivos y estructura . . . . .	9
<b>2. Enfoque clásico del reaseguro</b>	<b>11</b>
2.1. Teoría de riesgo . . . . .	11
2.1.1. Proceso del número de siniestros . . . . .	12
2.1.2. Proceso del monto individual de siniestros . . . . .	15
2.1.3. Teoría de riesgo colectivo: modelo del monto agregado de siniestros . . . . .	16
2.2. Reaseguro óptimo . . . . .	18
2.2.1. Máxima ganancia . . . . .	19
2.2.2. Mínima varianza . . . . .	21
2.2.3. Mínima probabilidad de ruina . . . . .	22

<b>3. Enfoque bayesiano en reaseguro: antecedentes</b>	<b>25</b>
3.1. Primeros análisis bayesianos en ciencias actuariales: teoría de credibilidad . . . . .	26
3.1.1. Teoría de credibilidad . . . . .	26
3.1.2. Análisis bayesianos en teoría de credibilidad . . . . .	28
3.1.3. Principales funciones de utilidad empleadas en la teoría de credibilidad bayesiana . . . . .	30
3.2. Análisis bayesiano del reaseguro . . . . .	31
3.2.1. Trabajos que incluyen inferencia bayesiana en problemas de reaseguro . . . . .	31
3.2.2. Aportaciones bayesianas en reaseguro óptimo . . . . .	33
3.3. Análisis de los antecedentes . . . . .	35
<b>4. Fundamentos para el análisis bayesiano del reaseguro</b>	<b>37</b>
4.1. Planteamiento del problema . . . . .	37
4.2. Modelo . . . . .	44
4.3. Función de verosimilitud . . . . .	46
4.4. Distribuciones iniciales . . . . .	48
4.5. Distribuciones posteriores . . . . .	50
4.6. Distribuciones predictivas . . . . .	53
4.7. Inferencia sobre otras variables relacionadas con el reaseguro óptimo	57
4.7.1. Monto agregado de siniestros . . . . .	58
4.7.2. Monto de siniestros recuperados y monto de siniestros retenidos . . . . .	67
4.8. Tarificación en Reaseguro: Primas . . . . .	96
4.8.1. Principios de determinación de la prima . . . . .	98
4.8.2. Determinación de la prima de reaseguro . . . . .	103



<b>5. Reaseguro Óptimo</b>	<b>109</b>
5.1. Determinación de la proporción $k$ óptima para un reaseguro cuota parte . . . . .	109
5.2. Determinación del deducible óptimo para un reaseguro exceso de pérdida . . . . .	124
5.3. Determinación de la prioridad óptima para un reaseguro stop loss .	143
5.3.1. Reaseguro óptimo stop loss bajo un esquema de aversión al riesgo . . . . .	162
<b>6. Aplicación práctica</b>	<b>169</b>
6.1. Datos . . . . .	170
6.2. Distribuciones predictivas del número de siniestros . . . . .	173
6.3. Distribuciones predictivas del monto individual de siniestros . . .	180
6.4. Monto agregado de siniestros . . . . .	186
6.5. Una solución a la proporción óptima en un reaseguro cuota parte .	209
6.6. Una solución al deducible óptimo en un reaseguro exceso de pérdida	214
6.7. Una solución a la prioridad óptima en un reaseguro stop loss . . .	225
6.8. Análisis global de reaseguro óptimo: comparación . . . . .	236
6.9. Análisis de reaseguro óptimo con criterio de mínima varianza . . .	239
<b>Conclusiones</b>	<b>243</b>
<b>Apéndice</b>	<b>249</b>
<b>A. Conceptos básicos y definiciones</b>	<b>249</b>
<b>B. Distribuciones</b>	<b>255</b>
<b>C. Monto Individual de Siniestros de cada portafolio</b>	<b>263</b>
<b>D. Primera y segunda derivadas de la log-distribución posterior marginal de <math>\alpha</math></b>	<b>269</b>

<b>E. Monto agregado de siniestros retenidos: reaseguro exceso de pérdida</b>	<b>271</b>
<b>F. Monto agregado de siniestros retenidos: reaseguro stop loss</b>	<b>279</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>285</b>
<b>Colección Cuadernos de la Fundación Instituto de Ciencias del Seguro</b>	<b>291</b>

# Índice de figuras

4.1. Diagrama de árbol para la elección de un tipo de reaseguro. . . . .	38
4.2. Diagrama de árbol para un tipo de reaseguro. . . . .	40
4.3. Nodos explícitos que se colapsan al usar la distribución predictiva	41
4.4. Diagrama de árbol para el problema global del reaseguro óptimo. .	42
6.1. Histograma del monto individual de siniestros . . . . .	172
6.2. Distribución Inicial Conjugada para el parámetro $\lambda$ . . . . .	174
6.3. Distribución previa mínimo informativa para el parámetro $\phi$ . . .	175
6.4. Distribución posterior para el parámetro $\phi$ utilizando previa mínimo informativa . . . . .	176
6.5. Distribución predictiva de $N$ utilizando previa mínimo informativa	177
6.6. Distribución previa conjugada para el parámetro $\phi$ . . . . .	178
6.7. Distribución posterior para el parámetro $\phi$ utilizando previa conjugada . . . . .	179
6.8. Distribución predictiva de $N$ utilizando previa conjugada . . . . .	179
6.9. Distribución Predictiva para $Z$ con $\alpha = 2$ y previa mínimo informativa . . . . .	180
6.10. Distribución Predictiva de $Z$ con $\alpha = 2, \alpha = 3, \alpha = 3$ y $\alpha = 20$ . . . . .	181
6.11. Distribución Posterior Marginal de $\alpha$ . . . . .	182
6.12. Distribución Predictiva para $Z$ con $\alpha$ desconocido y previa mínimo informativa . . . . .	183

6.13. Distribución Previa Conjugada para el parámetro $\beta$ con $\alpha = 2$ . . .	185
6.14. Distribución Predictiva para Z con $\alpha = 2$ y previa conjugada para $\beta$	185
6.15. Histograma de la Muestra de la Distribución Predictiva del Monto Agregado de Siniestros con $\alpha = 2$ y previas mínimo informativas .	190
6.16. Distribución Posterior Marginal de $\alpha$ . . . . .	196
6.17. Distribución Importante . . . . .	197
6.18. Distribución Objetivo y Distribución Importante . . . . .	197
6.19. Distribución Objetivo - Distribución Importante Modificada . . . .	198
6.20. Histograma de la muestra de la distribución posterior marginal de $\alpha$ . . . . .	199
6.21. Histograma de la Muestra de la Distribución Predictiva del Monto Agregado de Siniestros con $\alpha$ desconocido y previas mínimo informativas . . . . .	200
6.22. Histograma de la Muestra de la Distribución Predictiva del Monto Agregado de Siniestros con $\alpha = 2$ y previas conjugadas . . . . .	203
6.23. Histograma de la muestra de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con $\alpha = 2$ y previas mínimo informativas, considerando que $N_{n+1}$ sigue una distribución Bi $(2.020.000, \phi)$ . .	205
6.24. Histograma de la muestra de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con $\alpha$ desconocido y previas mínimo in- formativas, considerando que $N_{n+1}$ , el número de siniestros del próximo período, sigue una distribución Bi $(2.020.000, \phi)$ . . . . .	206
6.25. Histograma de la muestra de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con $\alpha = 2$ y previas conjugadas, conside- rando que $N_{n+1}$ sigue una distribución Bi $(2.020.000, \phi)$ . . . . .	208
6.26. Histograma de la muestra obtenida de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros . . . . .	218
6.27. Medias predictivas del monto agregado de siniestros recuperados $X_{rea}$ para cada límite máximo de responsabilidad $L_2$ y deducible $M$	219
6.28. Primas de reaseguro calculadas como $PR = X_{rea\rho_2}$ para cada deducible . . . . .	220

6.29. Ganancia esperada de la cedente para cada deducible cuando la prima de reaseguro $PR$ se calcula como un cuantil de la distribución predictiva de $X_{rea}$ . . . . .	222
6.30. Ganancia esperada de la cedente para cada deducible cuando la prima de reaseguro $PR$ se calcula como un cuantil de la distribución predictiva de $X_{rea}$ . . . . .	224
6.31. Ganancia esperada de la cedente para cada prioridad cuando la prima de reaseguro $PR$ se calcula con base en los cuantiles $X_{rea0,20}$ , $X_{rea0,30}$ y $X_{rea0,40}$ . . . . .	226
6.32. Medias predictivas del monto agregado de siniestros recuperados $X_{rea}$ para cada límite máximo de responsabilidad $L_2$ y prioridad $d$ . . . . .	229
6.33. Primas de reaseguro calculadas como $PR = X_{rea\rho_2}$ para cada prioridad . . . . .	230
6.34. Primas de reaseguro calculadas como $PR = X_{rea\rho_2}$ para cada prioridad . . . . .	231
6.35. Ganancia esperada de la cedente para cada prioridad cuando la prima de reaseguro $PR$ se calcula como un cuantil de la distribución predictiva de $X_{rea}$ . . . . .	233
6.36. Ganancia esperada de la cedente para cada prioridad cuando la prima de reaseguro $PR$ se calcula como un cuantil de la distribución predictiva de $X_{rea}$ . . . . .	234
6.37. Ganancia esperada de la cedente para cada prioridad cuando la prima de reaseguro $PR$ se calcula con base en los cuantiles $X_{rea0,20}$ , $X_{rea0,30}$ y $X_{rea0,40}$ . . . . .	235
6.38. Diagrama de árbol para el problema global del reaseguro óptimo. . . . .	236
C.1. Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 1 . . . . .	264
C.2. Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 2 . . . . .	264
C.3. Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 3 . . . . .	265
C.4. Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 4 . . . . .	265
C.5. Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 5 . . . . .	266
C.6. Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 6 . . . . .	266

C.7.	Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 7 . . .	267
C.8.	Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 8 . . .	267
C.9.	Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 9 . . .	268
E.1.	Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando $L_2 = 30$ . . . . .	272
E.2.	Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando $L_2 = 30$ . . . . .	273
E.3.	Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando $L_2 = 50$ . . . . .	274
E.4.	Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando $L_2 = 50$ . . . . .	275
E.5.	Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando $L_2 = 70$ . . . . .	276
E.6.	Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando $L_2 = 70$ . . . . .	277
F.1.	Histogramas de las simulaciones de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro stop loss para diferentes deducibles cuando $L_3 = 22.000$ . . . . .	280
F.2.	Histogramas de las simulaciones de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro stop loss para diferentes deducibles cuando $L_3 = 23.000$ . . . . .	281
F.3.	Histogramas de las simulaciones de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro stop loss para diferentes deducibles cuando $L_3 = 24.000$ . . . . .	282
F.4.	Histogramas de las simulaciones de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro stop loss para diferentes deducibles cuando $L_3 = 26.000$ . . . . .	283

# Índice de tablas

6.1. Número de siniestros . . . . .	170
6.2. Monto agregado de siniestros . . . . .	171
6.3. Cuantiles de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con $\alpha = 2$ y previas mínimo informativas, considerando que $N_{n+1}$ sigue una distribución Bi $(2.020.000, \phi)$ . . . . .	205
6.4. Cuantiles de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con $\alpha$ desconocido y previas mínimo informativas, considerando que $N_{n+1}$ sigue una distribución Bi $(2.020.000, \phi)$ . . . . .	207
6.5. Cuantiles de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con $\alpha = 2$ y previas conjugadas, considerando que $N_{n+1}$ sigue una distribución Bi $(2.020.000, \phi)$ . . . . .	208
6.6. Prima cedida al reasegurador en un reaseguro cuota parte, calculada para los valores de la proporción, $k$ , que resultan de interés a la cedente. $PR^{(1)}$ corresponde a los Casos 1, 2, 4 y 5, mientras que $PR^{(2)}$ a los Casos 3 y 6. . . . .	211
6.7. Valores para la proporción $k\%$ óptima en un contrato de reaseguro cuota parte. . . . .	212
6.8. Cuantil correspondiente a la esperanza del monto agregado de siniestros recuperados . . . . .	223
6.9. Deducibles óptimos obtenidos dependiendo de la cuantía en la prima de reaseguro . . . . .	225
6.10. Prioridades óptimas obtenidas dependiendo de la cuantía en la prima de reaseguro . . . . .	232

6.11. Proporción óptima, $k\%$ , para cada valor de $L_1$ en un reaseguro cuota parte . . . . .	236
6.12. Deducibles óptimos obtenidos dependiendo de la cuantía en la prima de reaseguro y el valor de $L_2$ en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo . . . . .	237
6.13. Prioridades óptimas obtenidas dependiendo de la cuantía en la prima de reaseguro y el valor de $L_3$ en un reaseguro stop loss . . . . .	237
6.14. Ganancia esperada obtenida para las proporciones óptimas en un reaseguro cuota parte . . . . .	237
6.15. Ganancia esperada obtenida para los deducibles óptimos en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo . . . . .	238
6.16. Ganancia esperada obtenida para las prioridades óptimas en un reaseguro stop loss . . . . .	238
6.17. Comparación de los reaseguros cuota parte (Q/S) y exceso de pérdida por riesgo (WXL-R) con base en el cálculo de la varianza del monto agregado de siniestros retenidos . . . . .	241



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Conceptos básicos y definiciones

Los problemas actuariales son por naturaleza problemas en ambiente de incertidumbre, basta pensar por ejemplo en la probabilidad de ocurrencia de un siniestro, los montos a que darán lugar los contratos de determinados tipos de pólizas o en la variación de las tasas de interés en años futuros. Tanto la descripción de modelos que puedan describir completamente la generación de las observaciones obtenidas, como la predicción de observaciones futuras, fundamental para la selección de una política óptima, son parte de la metodología bayesiana, teoría especialmente concebida para el manejo de la incertidumbre.

Cualquier problema actuarial conlleva la toma de decisiones, y es precisamente la teoría bayesiana de la decisión la disciplina que se ocupa de analizar, estructurar y resolver coherentemente cualquier situación que implique la elección, en ambiente de incertidumbre, de una entre varias formas posibles de actuación.

El reaseguro forma parte de las ciencias actuariales, y por su naturaleza de incertidumbre en cuanto al número y monto de siniestros, puede ser modelado desde un punto de vista bayesiano. El análisis de un problema de reaseguro óptimo tiene como objetivo final ayudar a un asegurador a elegir el mejor contrato posible.

Por ello, el trabajo que presentamos se centra en analizar el reaseguro desde la perspectiva bayesiana.

Para definir en qué consiste el reaseguro, debemos comenzar hablando del seguro. Quien contrata una póliza de seguro se denomina asegurado. Éste establece un contrato con una compañía de seguros para cubrir un **riesgo**, entendiendo como riesgo el objeto asegurado. En un seguro de vida, por ejemplo, el riesgo es la muerte de la persona. En caso de que el riesgo se convierta en real se produce un  **siniestro**, ocasionando unos daños garantizados por la cedente a través del pago del  **monto del siniestro**. A cambio de la cobertura que ofrece la compañía, el asegurado paga una  **prima**.

En este trabajo, cuando se usa el término prima, denotado por  $P$ , nos referimos a la  **prima de riesgo** de todo el  **portafolio**, es decir, del conjunto de unidades o personas aseguradas de un riesgo homogéneo.

Se entiende como prima de riesgo aquella en la que el asegurador refleja el precio básico del riesgo que cubrirá, en función de la probabilidad de ocurrencia,  $\phi$ , y del monto de la pérdida esperada en la que incurrirá por concepto del siniestro.

A lo largo de este trabajo se utilizará indiscriminadamente el concepto de riesgo para expresar tanto el objeto asegurado como para designar la probabilidad de ocurrencia de un siniestro,  $\phi$ . La acepción en la que este sea utilizado será aclarada mediante el contexto.

Para poder afrontar los pagos de los seguros que ha aceptado, el asegurador establece un contrato con otra compañía con la que compartirá esos pagos. Dicho contrato se denomina  **reaseguro**. Al asegurador se le llama  **cedente** y a la compañía con quien establece el contrato se conoce como  **reasegurador**. También en este caso la cedente realiza un pago al reasegurador denominado  **prima de reaseguro** ( $PR$ ).

El reaseguro está relacionado con variables aleatorias tales como el  **número de siniestros**,  $N$ , y los  **montos de cada siniestro**,  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , los cuales se suponen independientes e idénticamente distribuidos e independientes de  $N$ .

De la combinación de  $N$  y  $Z_i$ , se obtiene la variable aleatoria compuesta del **monto agregado de siniestros**, que constituye la cantidad total que el asegurador pagará en un año, y se representa como,

$$X = \sum_{i=1}^N Z_i.$$

En este trabajo enfocamos el problema de reaseguro desde el punto de vista de la cedente, quien tomará decisiones como la prima que cobra a sus clientes (decisión que se considera previa al contrato de reaseguro) y el monto o porcentaje que le corresponderá pagar en cada siniestro, denominado **límite de retención**. Por su parte, el reasegurador determina, en la mayoría de los casos, el monto de la prima a cambio de su cobertura.

Estas decisiones están relacionadas con la siniestralidad que espera la cedente con base en su experiencia. Abordaremos el caso en el que la cedente tiene que elegir un **reaseguro óptimo**, definido como el mejor contrato de reaseguro ya sea entre diversos tipos de reaseguro o entre distintos límites de retención para un reaseguro concreto.

Considerando que la cedente ha elegido un reaseguro obligatorio, en el que se compromete a la cesión del portafolio y, el reasegurador está obligado contractualmente a aceptarlo en su totalidad, realizamos el análisis de reaseguro óptimo entre diversas modalidades de reaseguro proporcional y no proporcional.

Hemos considerado conveniente incluir conceptos actuariales que serán utilizados a lo largo de este trabajo ordenados alfabéticamente en el Apéndice A. Para, en caso de ser necesario, consultarlos a lo largo de la lectura del trabajo.

## 1.2. Introducción al Reaseguro

### 1.2.1. Clasificación del reaseguro

Los contratos de reaseguro se dividen en dos modalidades: proporcional y no proporcional. De forma general, estas modalidades de reaseguro se describen a continuación.

#### **Reaseguro proporcional**

El reaseguro proporcional es aquel en el que cedente y reasegurador pactan un porcentaje fijo (proporción) en que primas y coste de los siniestros del contrato de seguro serán repartidos entre ellos. El reaseguro proporcional se divide a su vez en dos: **reaseguro cuota parte**, en el que la proporción es idéntica para todos los riesgos, y reaseguro excedente de sumas, en el que se utilizan proporciones variables para la retención y para la cesión al reaseguro, según la magnitud de cada riesgo. En el reaseguro proporcional, la cedente transfiere los riesgos en las condiciones en que los suscribe.

En este trabajo, la proporción se calcula sobre prima de riesgo, es decir, el reasegurador se obliga a participar únicamente sobre el monto de cada siniestro, sin considerar algún tipo de gastos o comisiones. Aunque existen otras alternativas: se puede calcular sobre prima neta, donde el reasegurador paga sobre todas las obligaciones del contrato original, y sobre prima de tarifa, en el que la proporción correspondiente incluye todas las obligaciones del contrato original y los gastos.

Por otro lado, se considera que los montos de siniestros que cubrirá el reasegurador serán los que se produzcan en el período contractual convenido.

## **Reaseguro no proporcional**

El reaseguro no proporcional es aquel en el que no existe una relación fija predefinida, en la que primas y montos de siniestros son repartidos entre la cedente y el reasegurador.

La cedente transfiere en reaseguro aquellos montos de siniestros que superen un nivel determinado, definido contractualmente. Ese nivel determinado se conoce como límite de retención y toma un nombre particular dependiendo del tipo de contrato. Por su parte, el reasegurador tiene que pagar lo que exceda del límite de retención hasta el **límite máximo de responsabilidad**.

El reaseguro no proporcional se conoce también como reaseguro de exceso de pérdida y se divide en coberturas por riesgo, el denominado **reaseguro exceso de pérdida por riesgo**, y coberturas para eventos catastróficos. Una tercera cobertura resulta de una mixtura de estas dos, y se denomina reaseguro exceso de pérdida por riesgo y por evento. Una cuarta, y última, que es el reaseguro de exceso de siniestralidad, mejor conocido como **stop loss**.

En el reaseguro no proporcional, la prima de reaseguro es determinada por el reasegurador, a diferencia del proporcional, en el que está definida por la proporción. Típicamente se obtiene como una función de las condiciones del contrato y la siniestralidad esperada.

### **1.2.2. Reaseguros más utilizados**

Pasamos a describir las particularidades de los tres tipos de reaseguro más usuales.

#### **Reaseguro cuota parte**

El reaseguro cuota parte pertenece a la modalidad de reaseguro proporcional, en el que la **proporción** es un porcentaje fijo e invariable.

La proporción pactada va a definir la parte que, de cada monto de siniestro, corresponde pagar a la cedente y, por consiguiente, la parte que corresponde al reasegurador.

El reasegurador, en todo tipo de contrato, estipula un **límite máximo de responsabilidad**. Así, en un cuota parte, la única excepción en la que el reasegurador no cumple con la parte total de su cuota en un siniestro es cuando esta supera dicho límite.

Formalmente:

Sea  $k$  la proporción de cada monto individual que corresponde a la cedente, y  $L_1$  el límite máximo de responsabilidad en el contrato de reaseguro. Se define la variable aleatoria **monto recuperado del  $i$ -ésimo siniestro** como:

$$Z_{rea_i} = \min [(1 - k)Z_i, L_1] \quad \forall Z_i, i = 1, 2, \dots, N.$$

Es decir,  $Z_{rea_i}$  determina el monto que el reasegurador pagará en cada siniestro. Como puede observarse,  $Z_{rea_i}$  en ningún caso excederá a  $L_1$ , el límite máximo de responsabilidad.

La principal característica del reaseguro cuota parte es que trata los riesgos cedidos como un todo, en el que la cedente no puede reasegurar únicamente los montos de siniestros más elevados.

Como se ha comentado, en este trabajo se utilizará el esquema de reaseguro cuota parte sobre prima de riesgo. Por tanto, el reasegurador pagará únicamente la proporción que le corresponde de cada monto de siniestro. Este hecho se reflejará también en la metodología para la obtención de la prima de reaseguro, siendo determinada por el propio contrato. Su cálculo se realiza aplicando la proporción pactada a la prima de riesgo que ha cobrado la cedente. Es decir,

$$PR = (1 - k) P. \tag{1.1}$$

El cálculo de la prima de riesgo se realiza utilizando el principio del valor esperado, que será introducido más adelante.

## Reaseguro exceso de pérdida por riesgo

En este trabajo, el límite de retención para este tipo de contrato no proporcional se denomina **deducible**.

Mediante un reaseguro exceso de pérdida por riesgo, el reasegurador se obliga a participar en un siniestro siempre y cuando éste supere el deducible.

De ser el caso, le corresponde pagar el monto por encima de este deducible y hasta el límite máximo de responsabilidad estipulado en el contrato.

Formalmente:

Sea  $M$  el deducible, cantidad máxima del monto individual del  $i$ -ésimo siniestro que asume la cedente. Este tipo de reaseguro cubre hasta la capa  $L_2 - M$ , cantidad máxima que pagará el reasegurador de lo que el monto individual del siniestro exceda a  $M$ . La variable aleatoria  $Z_{rea_i}$  se define,

$$Z_{rea_i} = \begin{cases} 0 & Z_i \leq M \\ \min(Z_i, L_2) - M & Z_i > M \end{cases}$$

## Reaseguro stop loss

El límite de retención en este tipo de contrato no proporcional se denomina **prioridad**. El asegurador directo que opta por este tipo de reaseguro busca una protección contra fluctuaciones en el monto de siniestralidad anual.

Contando con un reaseguro stop loss, el reasegurador se compromete a asumir aquella cantidad del monto agregado de siniestros que supere a la prioridad hasta un límite máximo estipulado en el contrato de reaseguro.

Formalmente:

Sea  $d$  la prioridad, cantidad máxima del monto agregado de siniestros que asume el asegurador directo. El reaseguro stop loss cubre hasta la capa  $L_3 - d$ , cantidad máxima que pagará el reasegurador de lo que el monto agregado de siniestros exceda a  $d$ . Es decir, el monto agregado de siniestros que pagará el reasegurador bajo un stop loss es:

$$X_{rea} = \begin{cases} 0 & X \leq d \\ \min(X, L_3) - d & X > d \end{cases}$$

### 1.3. Notación

Debido a la gran cantidad de subíndices que aparecen en el desarrollo del análisis del reaseguro, abusando de la notación, se ha decidido no distinguir tipográficamente las variables aleatorias y sus observaciones, esperando que el contexto aclare la diferencia. Los vectores aleatorios se presentan en negritas. Se usan letras itálicas para variables aleatorias observadas u observables, y letras griegas para parámetros desconocidos, mayúsculas para el caso de vectores. Se utilizarán letras itálicas para las distribuciones de probabilidad, mediante la notación que se define posteriormente para cada una.

Se utilizará el símbolo  $\sim$  significando "sigue una distribución". Es decir,  $X \sim p(x)$  se leerá "X sigue una distribución cuya función de densidad es  $p(x)$ ", o bien,  $X \sim \text{Distribución}$  se leerá "X sigue una distribución Distribución".

$p(x)$  denota la función de densidad de la variable aleatoria  $X$ , discreta o continua, mientras que  $F_X(x)$  se utiliza para su función de distribución.

$p_x(x_0)$  se utiliza para el valor de la función de densidad o función de probabilidad evaluada en  $x = x_0$ .

$F_X(x_0)$  es la función de distribución evaluada en  $x = x_0$ .

$p(x | y)$  se utiliza para identificar la densidad o distribución de probabilidad condicional para  $X$  dado  $Y = y$ .



$p(x | \theta)$  se utiliza para el modelo probabilístico que genera  $X$ .

$\pi(\theta)$  es la distribución inicial de  $\theta$ .

$L(\theta | \mathbf{x})$  representa la función de verosimilitud del parámetro  $\theta$  para los datos  $\mathbf{x}$ .

$\pi(\theta | \mathbf{x})$  es la distribución posterior del parámetro  $\theta$ .

$p(x_{n+1} | \mathbf{x})$  es la distribución predictiva de la variable  $x_{n+1}$ , que representa la observación futura condicionada al valor de los datos.

$E(X)$  es el valor esperado de la variable aleatoria  $X$ .

$E(X | y)$  denota el valor esperado de la variable aleatoria  $X$  condicionado a  $Y = y$ .

$\text{Var}(X)$  denota la varianza de la variable aleatoria  $X$ .

$\text{Var}(X | y)$  es la varianza condicional de  $X$  dado  $Y = y$ .

$\text{DT}(X)$  denota la desviación típica de la variable aleatoria  $X$ .

$M_X(t)$  función generadora de momentos de la variable aleatoria  $X$  evaluada en  $t$ .

$I_A(x)$  la función indicadora del conjunto  $A$ , definida por:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

## 1.4. Objetivos y estructura

El análisis de un problema de reaseguro tiene como objetivo final ayudar a un asegurador a elegir el mejor contrato posible. Para resolverlo, es necesario seleccionar un modelo para los datos y construir la distribución previa de los parámetros del modelo y la función de utilidad para evaluar las consecuencias de los diferentes contratos. Este trabajo tiene como objetivo proponer una solución a este problema, para ello se estructura como sigue:

Para conocer los distintos análisis realizados en este tema, en el **Capítulo 2** se presenta las soluciones existentes para el reaseguro óptimo desde el punto de vista clásico, que son las que más abundan en la literatura.

El **Capítulo 3** presenta una revisión de los trabajos realizados en este tema desde el punto de vista bayesiano, mostrando la importancia que han tenido los métodos bayesianos en la solución de problemas actuariales, en particular el de reaseguro. Queda así delimitado el objetivo de este trabajo, como un enfoque global del problema que no se encuentra en la literatura existente.

En el **Capítulo 4**, se plantea y estructura el problema de decisión que involucra el reaseguro óptimo. Así, se ponen de manifiesto los distintos elementos del problema que serán comunes a cualquier tipo de reaseguro: modelo, variables aleatorias (número de siniestros, monto de siniestro, monto agregado, monto recuperado y monto retenido). Precisamente por tratarse de la parte inferencial del análisis, se ha agrupado en este capítulo la obtención de las distintas distribuciones predictivas para distintos modelos y distribuciones iniciales. También en este capítulo incluimos un aspecto básico y, en general, previo al problema de decisión que nos ocupa: la determinación de las primas.

La solución al problema de reaseguro se aborda en el **Capítulo 5**. En él se eligen las características óptimas para cada uno de los reaseguros planteados. Este análisis se acompaña de un caso práctico, presentado en el **Capítulo 6**, en el que a partir de datos reales de una compañía aseguradora se aplican los resultados obtenidos con el fin de proponer una solución a la cedente.

Por último se presentan las conclusiones.

El trabajo incluye unos apéndices. En particular, el Apéndice B recoge todas las distribuciones de probabilidad mencionadas en este trabajo.

# Capítulo 2

## Enfoque clásico del reaseguro

### 2.1. Teoría de riesgo

Las ciencias actuariales clásicas han estado basadas en cálculos determinísticos, por ejemplo, para el cálculo de cualquier prima de seguro de vida, se utiliza las tablas de mortalidad existentes basadas en experiencia de siniestralidad, que reflejan el comportamiento esperado promedio de muertes de un determinado grupo de personas, así mismo, para calcular el valor de la suma asegurada en el momento de realizar el contrato, se utiliza una tasa de interés fija.

Sin embargo, las ciencias actuariales tratan problemas que se desarrollan en ambiente de incertidumbre, basta pensar en que los resultados que obtenga el asegurador directo se basan en cantidades aleatorias, tanto del número de siniestros que obtenga en un período de tiempo como del monto de cada uno de ellos. Una de las decisiones esenciales para un asegurador directo es la prima a cobrar en un tipo de seguro, la cual se calcula mediante los valores esperados de los siniestros. Esta decisión también involucra variabilidad, pues los siniestros reales pueden desviarse mucho de los esperados.

Desde un punto de vista clásico, Lundberg, a principios del siglo XX, introduce la teoría de riesgo para analizar la variabilidad inherente a los problemas actuariales.

En particular, la teoría de riesgo colectivo analiza los resultados de un portafolio de seguros a partir del monto agregado de siniestros. Esto es razonable, ya que son los siniestros reales los que permiten tomar decisiones, como pueden ser el tipo de reaseguro o el límite de retención. Basar decisiones como estas en un análisis determinístico podría producir resultados no deseables para el asegurador directo.

De esta forma, se pasa de un análisis determinístico a un análisis de la variabilidad en el número y el monto de los siniestros, convirtiendo la teoría de riesgo en un elemento importante en la toma de decisiones de las compañías aseguradoras.

A continuación se describirán los procesos del número y monto de siniestros y, a partir de ellos, el del monto agregado de siniestros.

### 2.1.1. Proceso del número de siniestros

Se considera la variable aleatoria  $N$ , como el número de siniestros ocurridos en un período de 1 año en un portafolio con un total de  $R$  pólizas.

Por sus características, se sabe que  $N$  es una variable aleatoria discreta, con valor mínimo 0. Dependiendo del tipo de seguro,  $N$  estará acotado por un valor conocido. Por ejemplo, en un seguro de vida, el número de siniestros está acotado entre 0 y el número total de pólizas en el portafolio,

$$0 \leq N \leq R.$$

Interesa describir, a través de una función de probabilidad, el comportamiento del número de siniestros.

En el caso más sencillo, cuando  $N$  está acotado, el modelo natural para modelar  $N$  en aquellos seguros en los que únicamente puede ocurrir un siniestro en cada póliza, por ejemplo los seguros de vida, es la **distribución Binomial**.

$$N \sim \text{Bi}(n, \phi); n = 1, 2, \dots, 0 \leq \phi \leq 1$$

$$p(N | n, \phi) = \binom{n}{N} \phi^N (1 - \phi)^{(n-N)} \quad N = 0, 1, 2, \dots, n.$$

donde:

$$\binom{n}{N} = \frac{n!}{(N!)(n-N)!}$$

En esta distribución,  $N$  representa el número de siniestros en  $n$  pólizas independientes y  $\phi$  es la probabilidad de ocurrencia de un siniestro en cada póliza.

Cuando el número de siniestros no está acotado, por ejemplo en seguros de automóviles, el modelo más usado para modelar  $N$  es la **distribución de Poisson**.

$$N \sim \text{Pn}(\lambda); \lambda > 0$$

$$p(N | \lambda) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^N}{N!} \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Utilizar esta distribución es razonable ya que es el límite de una distribución Binomial cuando la probabilidad de ocurrencia del evento es muy pequeña y el tamaño de la muestra muy grande, ambas condiciones son característica fundamental de un portafolio de riesgo. Además, esta distribución permite describir la ocurrencia de eventos con probabilidad de ocurrencia pequeña (eventos raros).

De acuerdo con Daykin *et al.* (1993) se puede suponer que  $N$  sigue una distribución  $\text{Pn}(\lambda)$ , dado que:

- Dentro del mismo período de tiempo, cada siniestro ocurre independientemente del otro.
- El número de siniestros ocurridos en cualesquiera dos intervalos de tiempo disjuntos son independientes.

- La probabilidad de que un siniestro ocurra en un punto determinado del tiempo es igual a cero.
- Cada evento sólo da lugar a un siniestro.

Existen varias discusiones sobre el incumplimiento de algunas de estas condiciones en seguros (Daykin *et al.*, 1993), y se proponen otras alternativas desde un punto de vista clásico para controlar cualquier efecto adicional que pueda modificar el comportamiento del número de siniestros. Una de estas alternativas es considerar a  $N$  una **variable Poisson Mixta**.

$$N \sim \text{Poisson-Mixta}(q\lambda); \lambda > 0, q > 0.$$

Partiendo de una distribución Poisson, se considera una variable  $q$ , tal que  $E(q) = 1$ . Entonces  $N | q \sim \text{Pn}(q\lambda)$  y se dice que  $N$  sigue una distribución Poisson Mixta.

La variable  $q$  se denomina variable estructura, y, desde un punto de vista clásico, se utiliza como una adición del efecto estocástico que pueda tener el parámetro  $\lambda$  y se interpreta como cambios aleatorios en el valor esperado de la distribución Poisson.

Cuando se supone que la variable mixta ( $q$ ), de la distribución Poisson Mixta, sigue una distribución Gamma resulta que el número de siniestros sigue una **distribución Binomial Negativa**.

$$N \sim \text{BN}(\alpha, p); 0 < p \leq 1, \alpha > 0$$

$$p(N | \alpha, p) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} p^\alpha (1-p)^n \quad n = 0, 1, \dots$$

Aunque no se trata de un análisis bayesiano formal, utilizar para  $N$  la distribución Binomial Negativa sería equivalente a, en el análisis bayesiano, partir de un modelo  $\text{Pn}(\lambda)$  y considerar como distribución previa para  $\lambda$  una  $\text{Ga}(\alpha, \beta)$ . En ese caso, la distribución predictiva que se obtiene para el número de siniestros es una Binomial Negativa.

## 2.1.2. Proceso del monto individual de siniestros

Sea  $Z_i$  la variable aleatoria que representa el **monto del i-ésimo siniestro ocurrido**. Su distribución depende de la composición del portafolio, por lo que se admite distintas posibilidades.

En las ciencias actuariales, las distribuciones que se asocian al monto de siniestros son conocidas como distribuciones de pérdida, por sus consecuencias para el asegurador. (Hogg y Klugman, 1984). Son distribuciones sesgadas y con colas superiores pesadas, cuyo uso se justifica por el hecho de que existe mayor probabilidad de ocurrencia de siniestros con montos menores y probabilidad de ocurrencia muy pequeña de siniestros con montos grandes.

Las distribuciones de pérdida utilizadas comúnmente en las ciencias actuariales son:

- **Gamma**

$$Z \sim \text{Ga}(\alpha, \beta); \alpha > 0, \beta > 0$$

$$p(Z | \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} z^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{z}{\beta}\right) I_{(0,\infty)}(z)$$

- **Lognormal**

$$Z \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2); \mu > 0, \sigma > 0$$

$$p(Z | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha z}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(\log z - \mu)}{\sigma}\right)^2\right] I_{(0,\infty)}(z)$$

### ▪ Pareto

$Z \sim \text{Pareto}(z_0, \alpha); 0 < z_0 < \infty, \alpha > 0$

$$p(Z | z_0, \alpha) = \frac{\alpha}{z_0} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{\alpha+1} I_{(z_0, \infty)}(z)$$

### ▪ Weibull

$Z \sim \text{Weibull}(c, \gamma); c > 0, \gamma > 0$

$$p(Z | c, \gamma) = c\gamma z^{\gamma-1} \exp(-cz^\gamma) \quad z > 0$$

### ▪ Burr

$Z \sim \text{Burr}(\alpha, \lambda, \gamma); \alpha > 0, \lambda > 0, \gamma > 0$

$$p(Z | \alpha, \lambda, \gamma) = \frac{\alpha\gamma\lambda^\alpha z^{\gamma-1}}{(\lambda+z^\gamma)^{\alpha+1}} \quad z > 0$$

## 2.1.3. Teoría de riesgo colectivo: modelo del monto agregado de siniestros

Una vez expuestos los procesos del número y monto individual de siniestros, se generalizará el modelo con el fin de considerar los montos de pérdida agregados del asegurador directo.

Como ya se introdujo en el Capítulo 1, representamos el **monto agregado de siniestros** de un asegurador directo,

$$X = \sum_{i=1}^N Z_i \tag{2.1}$$



con  $i = 1, \dots, N$ , y suponemos que existe independencia entre el número y el monto individual de siniestros.

Si no existen siniestros en el período, el monto agregado de siniestros es nulo. En otras palabras, si  $N = 0$  entonces  $X = 0$ .

A esto se conoce como teoría de riesgo colectivo.

La ganancia que obtenga un asegurador directo depende totalmente del monto agregado de siniestros, pues son las pérdidas totales obtenidas por la compañía en un portafolio determinado. Por ello, es de gran importancia analizar su comportamiento y realizar predicciones.

Por la definición de  $X$ , la distribución del monto agregado de siniestros puede ser aproximada directamente mediante densidades como la Normal o la Gamma (Daykin *et al.*, 1993, presentan métodos de aproximación basados en estas distribuciones). Sin embargo, la forma natural de determinar la distribución de probabilidad del monto agregado de siniestros consiste en ajustar una distribución para el número de siniestros  $N$ , y otra para los montos individuales  $Z_i$ , y obtener a partir de ellas la de  $X$ , con base en la teoría de la probabilidad (Laha y Rohatgi, 1979, por ejemplo), ya que se define:

**Definición 2.1.1.** Si  $Z_i$  son  $N$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces

$$X = \sum_{i=1}^N Z_i$$

es la convolución  $N - \text{ésima}$  de  $Z$ , cuya función de distribución se representa como:

$$(F_Z)^{N*}(x) = P \left\{ \sum_{i=1}^N Z_i \leq x \right\}$$

Concretamente, teniendo en cuenta lo anterior y como resultado de la teoría de probabilidad, se define la función de distribución de  $X$  como sigue:

**Proposición 2.1.1.** Si  $Z_i$  con  $i = 1, 2, \dots$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y

$$X = \sum_{i \geq 1} Z_i$$

la función de distribución de  $X$  resulta ser:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{N=0}^{\infty} p(N) (F_Z)^{N*}(x) \quad (2.2)$$

donde  $p(\cdot)$  es la densidad de probabilidad de  $N$  (Daykin et al., 1993).

En tal caso, se dice que  $X$  sigue una distribución compuesta con una distribución de pérdida asociada para  $Z_i$  y con  $N$  una variable aleatoria independiente de  $Z_i$ . Es la distribución de esta  $N$  la que da nombre a la distribución compuesta, sea cual sea la distribución de  $Z_i$ . Es decir, si  $N \sim Pn(\lambda)$ , entonces  $X \sim$  Poisson Compuesta.

## 2.2. Reaseguro óptimo

El asegurador directo busca la protección de reaseguro para obtener mejores resultados económicos, disminuyendo la parte del monto agregado de siniestros de la que él se hará cargo. La forma en que los montos de siniestros a los que tendrá que hacer frente disminuyan dependerá del reaseguro elegido.

Como se ha mencionado en la introducción, por **reaseguro óptimo** se entiende el mejor contrato de reaseguro entre los que se plantea el asegurador, ya sea entre diversos tipos de reaseguro o, simplemente, entre distintas retenciones para un tipo de reaseguro concreto. Los criterios en los que se basa la elección del reaseguro óptimo son variados. Dentro del enfoque de teoría de riesgo colectivo Kaluszka (2001, 2004, 2005) analiza las condiciones de optimización para los reaseguros

cuota parte, exceso de pérdida por riesgo y stop loss utilizando algunos de los criterios comentados y otros propuestos por él.

A continuación vamos a introducir los criterios más usuales.

### 2.2.1. Máxima ganancia

Se considera que el asegurador directo, al final del período, obtiene como remanente o ganancia la expresada en la siguiente ecuación:

$$G = P - X - PR + X_{rea} \quad (2.3)$$

donde se representa por:

- $P$  la prima de riesgo
- $X$  el monto agregado de siniestros
- $PR$  la prima de reaseguro
- $X_{rea}$  el monto agregado de siniestros recuperados

El valor de  $P$  es constante para cada portafolio, es decir, la prima de riesgo cobrada por el asegurador directo no depende del tipo de reaseguro. En cambio, los valores de  $PR$  y  $X_{rea}$  dependen del reaseguro elegido, en particular, de acuerdo con las definiciones introducidas en el apartado 1.2.2, la expresión de

$$X_{rea} = \sum_{i=1}^N Z_{rea_i} \quad (2.4)$$

para cada tipo de reaseguro se define a continuación.

**Definición 2.2.1. Monto agregado de siniestros recuperados  $X_{rea}$**

- **En reaseguro cuota parte**

$$X_{rea} = \sum_{i=1}^N \min [(1 - k) Z_i, L_1]$$

- **En reaseguro exceso de pérdida por riesgo**

$$X_{rea} = \sum_{i=1}^N [\min [Z_i, L_2] - M] I_B (Z_i)$$

siendo  $B = \{Z_i : Z_i > M\}$  e  $I_B (\cdot)$  su función indicadora (ver apartado 1.3).

- **En reaseguro stop loss**

$$X_{rea} = [\min (X, L_3) - d] I_C (X)$$

siendo  $C = \{X : X > d\}$  e  $I_C (\cdot)$  su función indicadora.

Además tanto  $X$  como  $X_{rea}$  son variables aleatorias y  $P$  y  $PR$  dependen de ellas. En el marco de la teoría de riesgo, las variables son sustituidas por sus valores esperados, según las distribuciones introducidas en el apartado 2.1. Concretamente seleccionado el modelo adecuado para cada variable,  $N$  y  $Z_i$ , sus parámetros se estiman por métodos clásicos, momentos o máxima verosimilitud, y se deducen las correspondientes distribuciones de  $X$  y  $X_{rea}$ .

La teoría de utilidad en ocasiones es usada como una variante de este criterio de elección. Considerando como reaseguro óptimo aquel que, valuada en la ganancia, maximiza la función de utilidad. En este sentido, y desde el punto de vista

del asegurador, este es un criterio que utiliza Borch (1961) para elegir la proporción óptima en un reaseguro cuota parte considerando que el monto agregado de siniestros sigue una distribución  $Ex(1)$ . Más adelante, Borch (1968) utiliza este criterio de elección desde el punto de vista del reasegurador. Wolff (1966) sigue este criterio de elección desde el punto de vista de la cedente. Análisis más recientes basados en la teoría de la utilidad, desde el enfoque clásico, son los realizados por Gerber y Pafumi (1998) y Lee (1998) quienes determinan la proporción  $k$  óptima cuando la actitud frente al riesgo de la cedente es medida a través de una función de utilidad exponencial (definida más adelante en la ecuación 5.6) considerando que el monto agregado de siniestros se distribuye según una  $N(\mu, \sigma)$  y una  $Ga(\alpha, \beta)$ , respectivamente.

### 2.2.2. Mínima varianza

El criterio de mínima varianza propone como reaseguro óptimo aquel que minimice la varianza del monto agregado de siniestros retenidos, es decir de  $(X - X_{rea})$ .

Se trata de un criterio que, intuitivamente, aplica aversión al riesgo. Indica que el asegurador prefiere conocer con la mayor exactitud posible la parte del monto agregado de siniestros que le corresponderá pagar.

Esto sólo tiene sentido si se parte de reaseguros con el mismo valor esperado de  $X - X_{rea}$ , pues en caso contrario podría llevar a elecciones absurdas, como elegir un reaseguro con esa varianza muy pequeña, pero, con un rango de valores, y por tanto valor esperado, inferiores a los del rango que proporcionara otro reaseguro con mayor varianza. Borch (1969) propone que además de minimizar la varianza se considere, ya sea la esperanza de la ganancia o el valor de la prima de reaseguro como un criterio adicional para evitar llegar a conclusiones erróneas.

Fijar el valor esperado supone fijar límites de retención, para los distintos reaseguros, que proporcionen un valor esperado común. Esto no parece lo lógico, parece más natural conocer los límites de retención óptimos para cada tipo de reaseguro

y, entonces, comparar los resultados que proporciona cada tipo de reaseguro con sus límites óptimos.

Por otra parte, este criterio no tiene en cuenta que  $PR$  depende del tipo de reaseguro, lo que no parece muy razonable.

En este sentido, Verbeek (1966) usa el criterio de mínima varianza para encontrar el límite de retención óptimo para los reaseguros exceso de pérdida por riesgo y stop loss, comparando también la prima de reaseguro,  $PR$ , partiendo del hecho que la cedente busca una mínima varianza al menor costo posible.

Considerando el criterio de mínima varianza, Benktander (1975) obtiene el cuota parte como reaseguro óptimo.

### 2.2.3. Mínima probabilidad de ruina

Otra forma para determinar el reaseguro óptimo, consiste en basar la decisión en el nivel de solvencia y ganancia de la compañía de seguros. El nivel de solvencia se puede medir con base en la probabilidad de ruina.

**Una compañía de seguros tendrá ruina** cuando:

$$G + CI < 0$$

donde  $G$  es la ganancia como se define en (2.3) y  $CI$  es el **capital de la compañía al inicio del período**.

La ruina requiere no sólo que la ganancia,  $G$ , sea negativa (lo pagado en siniestros supera las primas cobradas) sino que, además, el capital disponible al inicio, remanente anterior al cobro de las primas, no cubre las pérdidas.

**La probabilidad de ruina para un capital inicial** viene dada por:

$$\Psi(CI) = P[G + CI < 0]$$

ver por ejemplo Daykin *et al.* (1993), denotándose  $\Psi(CI)$  para hacer explícita su dependencia del capital inicial.

Se sabe que  $G$  varía en función del tipo de reaseguro elegido, y por lo tanto la probabilidad de ruina será distinta para cada tipo de reaseguro. Así, dado un capital inicial, se elige el tipo de reaseguro óptimo como aquel en el que la probabilidad de ruina sea mínima.

La *Cota de Lundberg* proporciona el límite superior de la probabilidad de ruina a largo plazo y queda determinada por (Daykin *et al.*, 1993),

$$\Psi(CI) \leq \exp \{-rCI\} \quad (2.5)$$

siendo  $r$  lo que se conoce por coeficiente de ajuste, cuyo valor depende del modelo concreto.

Para un modelo Poisson Compuesto, el coeficiente de ajuste, es la solución positiva más pequeña a la ecuación:

$$\lambda + (P - PR)r = \lambda M_{Z_{ret}}(r)$$

donde  $M_{Z_{ret}}(r)$  es la función generadora de momentos del monto de siniestros retenidos, valuada en  $r$ , y  $Z_{ret} = Z - Z_{rea}$  (Daykin *et al.*, 1993, por ejemplo).

El coeficiente de ajuste es una medida del potencial de ruina que, dado un capital inicial, varía en forma inversa a esta, como se puede deducir de (2.5).

El criterio de minimizar la probabilidad de ruina es utilizado por Schmidli (2001) para la determinación del límite de retención óptimo en un contrato de reaseguro proporcional.





# Capítulo 3

## Enfoque bayesiano en reaseguro: antecedentes

Como hemos visto, en su origen, las ciencias actuariales fueron abordadas desde el punto de vista frecuentista y no es de sorprender que los trabajos desde ese enfoque estadístico sean los más abundantes en la literatura actuarial en general y, en particular, en el campo del reaseguro. Sin embargo, ya son numerosos los autores que han abordado temas de actuaría desde un punto de vista bayesiano.

Como vimos en el capítulo anterior, la elección del reaseguro óptimo involucra el análisis de diversas variables aleatorias reconocidas por la teoría de riesgo. Los trabajos desde el enfoque bayesiano se centran en la obtención de sus respectivas distribuciones predictivas.

La revisión bibliográfica que se presenta en este capítulo, no pretende ser exhaustiva, sino reflejar las distintas líneas desarrolladas, desde el punto de vista bayesiano, para poder delimitar los objetivos de este trabajo. A tal fin, se han incluido los trabajos que, se considera, fueron el origen del enfoque bayesiano en actuaría y aquellos, que desde ese punto de vista, abordan el problema del reaseguro.

## 3.1. Primeros análisis bayesianos en ciencias actuariales: teoría de credibilidad

Un asegurador directo asume riesgos a cambio del pago de una prima, pagada por el asegurado. El cálculo de la prima se conoce como tarificación. La teoría de credibilidad se ocupa, precisamente, de la tarificación o determinación de las primas para los distintos asegurados.

El problema de tarificación es previo al de la elección del reaseguro y, en ese sentido, marginal a los objetivos de esos análisis y, por ello, no fue incluido en el capítulo anterior. Sin embargo, los primeros análisis bayesianos en ciencias actuariales aparecieron en ese campo y, en él han sido introducidos modelos y análisis utilizados también en otros temas actuariales, como el de reaseguro. Por otra parte, un contrato de reaseguro conlleva la determinación de una prima, la prima de reaseguro, aunque esta determinación es realizada por el reasegurador, siempre dependerá de las características del contrato elegidas por la cedente.

Por todo ello, introducimos aquí las ideas básicas de credibilidad y los primeros trabajos bayesianos sobre el tema.

### 3.1.1. Teoría de credibilidad

Para la tarificación, se requiere de una predicción de los siniestros futuros. Desde un punto de vista frecuentista, para un tamaño de grupo asegurado suficientemente grande, el cálculo de primas se basa en la ley de los grandes números, suponiendo que todos los asegurados del grupo se encuentran expuestos al mismo tipo de riesgo y que los siniestros los afectan individualmente. Ello supone que a todos los individuos del colectivo, todos los contratos del portafolio, se les aplica la misma prima, la cual se calcula de acuerdo con el principio de tarificación elegido.

En general, si el monto del siniestro,  $Z$ , se distribuye según  $p(z | \theta)$ , se define como **prima pura de riesgo o, simplemente, prima de riesgo**:  $P(\theta) = \mu(\theta) = E(Z | \theta)$ .

El no poder individualizar las primas de un colectivo puede resultar inconveniente, sobre todo en algunos tipos de seguros como los seguros médicos o los de automóviles, en los que las características de cada asegurado, comportamiento pasado o futuro previsible, y por tanto el monto de las cantidades que el asegurador ha de pagar, pueden ser muy distintos.

La teoría de credibilidad se ocupa de solucionar este problema y propone como prima la que resulta de la combinación entre la experiencia en siniestralidad presentada por el grupo de asegurados de un mismo portafolio de riesgo y la experiencia propia del asegurado. Típicamente, esta combinación es lineal y se expresa:

$$(1 - a)v + aV \quad 0 \leq a \leq 1 \quad (3.1)$$

La expresión anterior se conoce como **fórmula de credibilidad** o **estimador de credibilidad de la prima**. En ella  $v$  representa la experiencia en siniestralidad del asegurado y se suele calcular como un promedio de los montos de siniestralidad pasada,  $V$  representa el riesgo colateral del portafolio y se suele obtener como el promedio de toda la información de siniestros disponible, es decir de todos los siniestros reportados, hasta la actualidad, por todos los individuos del portafolio. En cuanto a los pesos,  $a$  y  $(1 - a)$ , conocidos como **factores de credibilidad**, su valor dependerá de la información con la que se cuente en cuanto a la experiencia en siniestralidad del propio asegurado, cuanto más información se tenga más próximo a cero debería ser  $a$ . La determinación del valor de  $a$  se realizaba sobre una base empírica difícil de justificar matemáticamente.

Posteriormente, Bühlmann (1967) supone que el parámetro que determina la distribución del monto del  $i$ -ésimo asegurado,  $Z_i$ , conocido como **parámetro de riesgo**, sea distinto, así  $Z_i \sim p(z_i | \theta_i)$ , resultando su prima de riesgo  $\mu(\theta_i) = E(Z_i | \theta_i)$ . Con esta particularización y suponiendo que, para cada asegurado, los montos de los siniestros que reporte son una muestra aleatoria de su distribución de riesgo, y que los pares  $(\theta_i, Z_i)$ , que describen cada contrato, son independientes e idénticamente distribuidos, demuestra que el mejor estimador lineal de la prima, en el

sentido del error cuadrático medio, viene dado por la fórmula de credibilidad al elegir  $a$  como:

$$\frac{n \text{Var} (E [Z_i | \theta_i])}{n \text{Var} (E [Z_i | \theta_i]) + E (\text{Var} [Z_i | \theta_i])} \quad (3.2)$$

y representando  $n$  el tamaño de la muestra de siniestros del asegurado, presentados en períodos anteriores.

### 3.1.2. Análisis bayesianos en teoría de credibilidad

Es a través de una interpretación bayesiana de la teoría de credibilidad como se introducen los métodos bayesianos en las ciencias actuariales. Concretamente, se admite que el parámetro de riesgo es una variable aleatoria a la que le corresponde una distribución, que en ciencias actuariales se conoce como **distribución de estructura**, y que no es sino la distribución previa sobre el parámetro de riesgo.

Los primeros trabajos que incluyen la metodología bayesiana son los de Bailey (1950) y Mayerson (1964). En ellos se trata de dar una justificación a la teoría de credibilidad y, en efecto, muestran que la fórmula de credibilidad es el estimador bayes de la prima cuando se eligen determinadas combinaciones de distribución previa y función de verosimilitud, como Binomial-Beta o Normal-Normal. Estos resultados son generalizados por Jewell (1974) a cualquier verosimilitud de la familia exponencial y previa conjugada. Siguiendo ese trabajo, Herzog (1990) relaciona el modelo de Bühlmann con el modelo bayesiano y demuestra que el estimador de credibilidad es la mejor aproximación lineal del estimador bayes de la prima. Más información sobre trabajos bayesianos en el campo de credibilidad se pueden encontrar en el trabajo de Makov y Smith (1996), que realizan una revisión de este tema y en el que se puede ver que los trabajos bayesianos en el área se han extendido al uso de métodos empírico bayes y a modelos jerárquicos. Otra revisión que puede resultar de utilidad es la de Miller (1980).

Un análisis más reciente se presenta en Landsman y Makov (2000) quienes incorporan información sobre el comportamiento de la cola de la distribución del monto individual de siniestros cuando ésta pertenece a la familia exponencial.

Desde el punto de vista bayesiano, los momentos de la distribución  $p(z_i|\theta_i)$  son parámetros, y la información disponible sobre ellos queda reflejada en la distribución previa. Así, cuanto mayor es la información de que se dispone sobre  $E(Z_i|\theta_i)$ , menor será la varianza de su distribución,  $Var(E[Z_i|\theta_i])$  y, por tanto, según la expresión (3.2), menor será el valor del factor de credibilidad  $a$  y así, la información sobre el individuo adquirirá más importancia en la expresión (3.1) de la estimación de credibilidad.

Makov (2001) presenta una revisión que incluye las aportaciones bayesianas en diversos campos de las ciencias actuariales. Además de presentar un punto de vista más amplio, incluye discusión, lo que permite conocer distintas opiniones sobre los problemas actuariales modelados desde una perspectiva bayesiana.

Aunque no vamos a entrar en ellos, sí queremos mencionar que las aproximaciones bayesianas a temas actuariales abarcan los campos de: graduación de tablas de mortalidad, tarificación basada en la experiencia de siniestros (incluyendo credibilidad), estimación de reservas por siniestros ocurridos pero no reportados, o por siniestros ocurridos pero no liquidados, modelos de teoría de riesgo colectivo -conteniendo análisis tanto del número como del monto individual de siniestros, monto agregado de siniestros, probabilidad de ruina, coeficiente de ajuste- y, por supuesto, reaseguro, tema del que nos ocuparemos en el siguiente apartado.

Por último, como es sabido, el análisis bayesiano involucra cálculos sobre todo de integrales que pueden resultar difíciles para su implementación en diversos campos, en particular, en problemas actuariales. Esta dificultad ha sido mitigada desde principios de los 90's con la introducción de métodos numéricos tales como los Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Métodos de simulación computacional, como el Metropolis-Hastings o Gibbs Sampler, que permiten generar realizaciones de una distribución de probabilidad, a través de la convergencia de Cadenas

de Markov. Por ello, no queremos cerrar este apartado sin mencionar a Scollnik (2001) y Migon y Moura (2005), quienes resuelven, desde la metodología bayesiana, algunos problemas actuariales, utilizando detalladamente las técnicas MCMC.

### 3.1.3. Principales funciones de utilidad empleadas en la teoría de credibilidad bayesiana

No hemos encontrado trabajos que aborden el problema de reaseguro óptimo desde el punto de vista de la teoría bayesiana de la decisión. Bajo esta metodología, las aplicaciones en ciencias actuariales se limitan a la incorporación de funciones de utilidad para la tarificación, eligiendo como prima aquella que maximice la utilidad esperada. Una metodología que utilice funciones de pérdida conduce a los mismos resultados. En este caso, la acción óptima consiste en minimizar la pérdida esperada.

La mayoría de los modelos de credibilidad asumen una función de pérdida cuadrática, de donde resulta que la esperanza predictiva sea elegida como prima. Sin embargo, otras funciones de pérdida o utilidad pueden ser usadas, derivando en diferentes principios de cálculo. En este sentido, Gómez (2000) realiza un análisis de robustez bayesiano para la prima usando una función de utilidad exponencial,

$$u(y) = \frac{1}{a} (1 - \exp(-ay)) \quad a > 0, \quad (3.3)$$

en el que únicamente incorpora la incertidumbre en el número de siniestros.

Previamente, Gómez *et al.* (1999) hacen el mismo análisis para el principio de cálculo de prima de Esscher, el cual supone la siguiente función de pérdida:

$$L(X, P) = \exp(\alpha X) (X - P)^2 \quad (3.4)$$

Por último, Migon y Moura (2005) utilizan para el cálculo de la prima la función de utilidad denominada valor absoluto modificado, la cual se define a continuación.

$$u(P, X) = (P - X) (b_1 I_{(-\infty, X)}(P) - b_2 (1 - I_{(-\infty, X)}(P))) \quad (3.5)$$

donde  $b_1$  y  $b_2$  son constantes positivas.

## 3.2. Análisis bayesiano del reaseguro

Nos centramos ahora en los trabajos sobre reaseguro desde un enfoque bayesiano. Cuando una compañía aseguradora se plantea un contrato de reaseguro, debe elegir el tipo de reaseguro, y las características concretas, como la retención. Su elección debe basarse en la información disponible sobre los siniestros que se producirán, número y monto. Por ello, es de esperar que los trabajos sobre reaseguro, desde el punto de vista bayesiano se ocupen de las distribuciones de las variables aleatorias implícitas y/o de determinar las elecciones óptimas, sobre alguno de los aspectos mencionados. Ese ha sido el criterio de clasificación que hemos utilizado en este apartado.

### 3.2.1. Trabajos que incluyen inferencia bayesiana en problemas de reaseguro

Como vimos en (2.1), se entiende por monto agregado de siniestros:

$$X = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N$$

donde, recordemos que,  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  representan los montos individuales de distintos siniestros y  $N$  es el número de siniestros ocurridos al final del período con-

siderado en el contrato de reaseguro. Además, las  $Z_i$ 's son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, que son independientes de  $N$ .

Un análisis bayesiano del reaseguro puede centrarse en hacer inferencia sobre alguna de esas variables, número de siniestros, monto de un siniestro o monto agregado, lo que conllevará la obtención de sus distribuciones predictivas. Así, suponiendo que  $p(N | \lambda)$  y  $p(Z_i | \theta)$  son las distribuciones de  $N$  y  $Z_i$ , respectivamente, hay que asignar distribuciones previas a los parámetros,  $\lambda$  y  $\theta$ , obtener sus distribuciones posteriores y calcular las distribuciones predictivas de  $N$  y  $Z_i$ . En caso de que el interés se centre en el monto agregado, la distribución predictiva de  $X$  se deducirá de las de  $N$  y  $Z$ .

### *Inferencia sobre el número de siniestros*

Cuando se trata de hacer inferencia sobre  $N$ , la mayoría de los autores suponen un **modelo Poisson**, con parámetro  $\lambda$ , al que asignan una distribución **previa conjugada**, distribución **Gamma** en este caso, como Daboni (1974), Hürlimann (1993) o Pai (1997) entre otros.

Manteniendo la idea del modelo Poisson, algunos autores, como Scollnik (1995, 1998) prefieren modelos más complejos como el **Poisson Generalizado**, asignando, en este caso, **previas no informativas** a los parámetros. El mismo modelo es utilizado por Smith y Goodman (2000) para modelar, esta vez, el número de siniestros que superan un determinado monto. Alternativamente, Scollnik (2001) propone realizar un **análisis jerárquico** del **modelo Poisson**, al asignar una distribución **previa Gamma** para el parámetro de la Poisson, y una **hiperprevia no informativa** para los hiperparámetros de la Gamma.

Finalmente, en algunos trabajos como el de Duvall (1999), encontramos el modelo **Binomial Negativo** para el número de siniestros, con **previa Beta**.



### *Inferencia sobre el monto de un siniestro*

En lo que se refiere a la distribución del monto de los siniestros, hay que distinguir si se trabaja desde el punto de vista del asegurador o del reasegurador. El primero estará interesado en la distribución del monto de cualquier siniestro, mientras que el reasegurador, dependiendo del tipo de reaseguro, puede estar interesado sólo en la distribución de montos extremos, en los que superan cierto valor, este enfoque se plantea, generalmente, en los contratos de exceso de pérdida.

Para la distribución del monto de siniestros un modelo tradicional es el **Gamma**, como comenta Pai (1997), quien, considera otros modelos alternativos, **logGamma**, **Weibull** y **Pareto**, y llega a proponer el uso de una mixtura de todos ellos. En cada caso ajusta una **previa no informativa** sobre los parámetros.

En cambio, la distribución **Pareto** es la preferida, para describir el comportamiento del monto individual, cuando se trabaja desde el punto de vista del reasegurador. Es lo que encontramos en el trabajo de Hesselager (1993), en el que se utiliza una **previa Gamma**. En la misma línea está el trabajo de Reiss y Thomas (1999). También Smith (1998) y, Smith y Goodman (2000) proponen una distribución Pareto para estudiar el monto agregado de los siniestros extremos, es decir, que superan un determinado valor.

### **3.2.2. Aportaciones bayesianas en reaseguro óptimo**

Nos centramos ahora en cómo se ha abordado, desde un enfoque bayesiano, el problema de elección del reaseguro, ya sea total o parcialmente.

#### *Mínima varianza*

Como se ha comentado, en el capítulo 2, un criterio en la elección del reaseguro óptimo, desde un enfoque clásico, es el de mínima varianza. Desde una perspectiva bayesiana, Pai (1997) utiliza este criterio para determinar el mejor tipo de

reaseguro, minimizando la varianza del monto agregado de siniestros que la cedente tendrá que cubrir, una vez descontada la protección por reaseguro.

### ***Mínima probabilidad de ruina***

Con respecto al criterio de minimizar la probabilidad de ruina, recordemos que esta se calcula a partir del coeficiente de ajuste, por lo que resulta de interés hacer inferencia sobre él. Cairns (2000) calcula una cota para la probabilidad de ruina, basándose en la desigualdad de Lundberg, que como podemos ver en (2.5), es:

$$\Psi(CI) \leq \exp \{-rCI\}$$

suponiendo una distribución posterior asintótica Normal para el coeficiente de ajuste  $r$ .

Otro trabajo en el que se realiza inferencia sobre el coeficiente de ajuste es el de Conti y Capitanio (2004).

### ***Selección de prima de reaseguro***

El reasegurador es quien se encarga de determinar la prima de reaseguro, excepto en el caso de contratos en los que la prima se deriva de sus propias características, tal es el caso del reaseguro proporcional, en el que primas y siniestros se reparten en forma idéntica.

En reaseguros exceso de pérdida, Hesselager (1993), Hürlimann (1993) y Dickson *et al.* (1998), proponen que la prima de reaseguro se calcule a partir de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros que pagará el reasegurador. Esta prima se puede considerar la versión bayesiana de la prima pura de riesgo.

Reiss y Thomas (1999b) estiman la prima de reaseguro en un contrato de exceso de pérdida por riesgo, basándose en la teoría de la credibilidad bayesiana.

### *Selección del límite máximo de responsabilidad*

Como se ha comentado arriba, en ciertos tipos de reaseguro, el reasegurador puede estar interesado sólo en la distribución de montos extremos, no sólo porque a partir de un cierto valor se hará efectiva la protección del reaseguro, sino porque es al reasegurador a quien corresponde fijar el monto máximo que estará dispuesto a pagar en el contrato. Smith (1998) propone la determinación de este límite haciendo inferencia sobre la probabilidad predictiva de que el monto de siniestros supere una cantidad.

### **3.3. Análisis de los antecedentes**

El análisis de un problema de reaseguro tiene como objetivo final ayudar a la cedente a elegir el mejor contrato posible. Así, los trabajos centrados sólo en la inferencia de alguna de las variables de interés, se pueden considerar como un paso previo, en el que se recopila información de interés, para la elección del mejor contrato.

En una situación general, la cedente podría comenzar por plantearse el tipo de reaseguro que le interesa (stop loss, cuota parte, exceso de pérdida por riesgo) y determinar, en una segunda etapa, las características del reaseguro elegido. Ambas elecciones dependerían del número y monto de los siniestros y del criterio de optimización elegido.

Ninguno de los trabajos encontrados se plantea el problema completo. Algunos son aplicaciones de la teoría de la credibilidad a la prima de reaseguro, lo que no afecta directamente a la cedente como problema de decisión y sólo comparan los tipos de contrato con base en la prima de reaseguro que comportarán. Otros parten de uno de los criterios clásicos, como, por ejemplo, minimizar la probabilidad de ruina y se limitan a hacer inferencia sobre alguno de los parámetros involucrados. Por último, cuando encontramos la comparación de varios tipos de

reaseguro, como es el caso de Pai (1997), no sólo utiliza el criterio de mínima varianza, con los inconvenientes comentados en el capítulo 2, sino que se ha prefijado las características (proporción de pérdida retenida) iguales para todos, cuando las características óptimas pueden variar de un tipo a otro, y además, simplifica el modelo suponiendo que no existe un límite máximo de responsabilidad.

Desde nuestro punto de vista, el análisis del problema concreto supone su estructuración secuencial y la resolución backwards del análisis bayesiano condicional, a lo que dedicaremos los siguientes capítulos.

# Capítulo 4

## Fundamentos para el análisis bayesiano del reaseguro

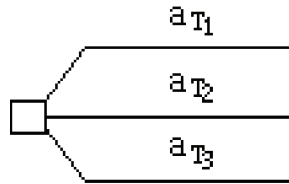
En este capítulo se plantea el problema de la determinación óptima del reaseguro para un portafolio de riesgo, desde el punto de vista de la cedente. Una vez estructurado como problema de decisión, utilizando la metodología bayesiana, se establecen los elementos necesarios para su análisis, esto es, las distribuciones de probabilidad necesarias y la obtención de las primas de reaseguro.

### 4.1. Planteamiento del problema

Consideramos la situación a la que se enfrenta la cedente al plantearse la posibilidad de contratar un reaseguro para un portafolio de seguros de vida. Para analizar el problema vamos a utilizar diagramas de árbol, en los que, como es habitual, los nodos cuadrados representan decisiones, por tanto en ellos se optimiza, y los nodos circulares representan aleatoriedad, lo que supone el cálculo de esperanzas.

Como ya hemos dicho antes, en el análisis global suponemos que la cedente se plantea elegir el mejor contrato entre los reaseguros cuota parte, exceso de pérdida

por riesgo y stop loss. En ese sentido, el problema de decisión se puede representar mediante el diagrama de árbol presentado en la Figura 4.1 en la que,  $a_{T_1}$  representa la acción de elegir el mejor reaseguro cuota parte,  $a_{T_2}$  el mejor exceso de pérdida por riesgo y  $a_{T_3}$  el mejor stop loss.



**Figura 4.1:** Diagrama de árbol para la elección de un tipo de reaseguro.

Una vez elegido el tipo de reaseguro, la cedente ha de fijar las condiciones óptimas de ese contrato, por ejemplo, en un cuota parte, el porcentaje óptimo ( $k^*$ ) que retendrá en cada monto de siniestro, y, por tanto, el que transferirá al reasegurador ( $1 - k^*$ ). Naturalmente, las consecuencias de esa decisión dependerán tanto del número de siniestros como de su monto.

De forma esquemática, si  $a_\xi$  representa la elección de las características del reaseguro elegido, con  $\xi = k$  para cuota parte,  $\xi = M$  para exceso de pérdida por riesgo y  $\xi = d$  para stop loss, la cedente tiene tantas opciones posibles como valores puede tomar  $\xi$ , es decir, cualquiera de los valores del intervalo real correspondiente. Por ejemplo, en un reaseguro cuota parte,  $\xi = k \in [0, 1]$ , en un exceso de pérdida por riesgo,  $\xi = M \in [0, L_2]$ , siendo  $L_2$  el límite máximo de responsabilidad estipulado por el reasegurador y, en un stop loss,  $\xi = d \in [0, L_3]$ , con  $L_3$  el límite máximo de responsabilidad en este contrato.

Los sucesos inciertos, que no puede controlar la cedente, serán los montos de siniestros que tendrá que pagar en cada una de las  $R$  pólizas del portafolio.

Así, los sucesos inciertos del problema de decisión se comportan según el modelo:

$$p_y(y) = (1 - \phi) I_{\{0\}}(y) + \phi p_{z|\psi}(y) I_{[0,\infty)}(y)$$

Donde  $y$  es el monto que pagará la cedente en cada póliza y  $\phi$  la probabilidad de que ocurra siniestro en ella. Es decir:

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } (1 - \phi) \\ Z_i & \text{con probabilidad } \phi \end{cases}$$

Y  $Z_i$  se distribuye según el modelo  $p(Z_i | \psi)$ .

La distribución conjunta de los montos de las  $R$  pólizas, que se suponen independientes e idénticamente distribuidos dados los parámetros, será:

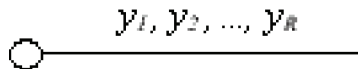
$$p(y_1, \dots, y_R | \theta) = \prod_{i=1}^R [(1 - \phi) I_{\{0\}}(y_i) + \phi p_{z|\psi}(y_i) I_{[0, \infty)}(y_i)]$$

con  $\theta = (\phi, \psi)$ .

En particular, si hay  $N$  siniestros, tendremos:

$$p(y_1, \dots, y_R | \theta) = \binom{R}{N} (1 - \phi)^{R-N} \phi^N \prod_{i=1}^N p_{z|\psi}(y_i)$$

Podemos considerar que el nodo de los sucesos inciertos en el problema de decisión



es equivalente a



Sea

$$X = \sum_{i=1}^R y_i$$

Observamos que si  $N \sim \text{Bi}(R, \phi)$

$$E(X) = RE(\phi)E(Z) = E(N)E(Z) \quad (4.1)$$

Como  $R$  es grande y  $\phi$  pequeña, también podemos suponer que  $N \sim \text{Pn}(\lambda)$  con  $\lambda = R\phi$ . Y,

$$E(\lambda) = RE(\phi) = E(N).$$

Así, bajo el modelo Poisson también se cumple (4.1).

Por tanto, podemos representar el problema de la elección de las condiciones del reaseguro de forma esquemática a través de la Figura 4.2.



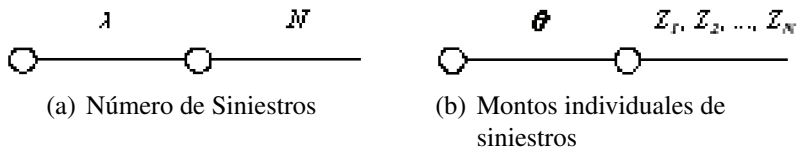
**Figura 4.2:** Diagrama de árbol para un tipo de reaseguro.

Tanto la prima de reaseguro,  $PR$ , como el monto agregado de siniestros que paga el reasegurador,  $X_{rea}$ , dependen de las características,  $\xi$ , elegidas. Así, desde el punto de vista bayesiano, la utilidad de la elección de unas condiciones concretas,



es decir de un valor de  $\xi$ , se puede cuantificar como la ganancia esperada,  $E(G)$ , calculada mediante las distribuciones predictivas de  $N$  y  $(Z_1, \dots, Z_N)$ .

Por tanto, desde el punto de vista de la inferencia bayesiana el objetivo será deducir las distribuciones predictivas de  $N$ ,  $Z$  o bien de  $X$ , según el tipo de reaseguro que se esté considerando. Por supuesto se tratará de distribuciones predictivas a posteriori, ya que la cedente utilizará la información disponible de  $n$  portafolios conocidos que cubren el mismo tipo de riesgo. Siendo el portafolio  $n + 1$  el que la cedente se plantea reasegurar. Por la propia naturaleza de la distribución predictiva se puede considerar que cada nodo aleatorio es equivalente a un par de nodos colapsados, el que corresponde a los parámetros, seguido por el de las variables (como se aprecia en la Figura 4.3), en los cuales las leyes de probabilidad correspondientes serán la distribución posterior de los parámetros y el modelo respectivo. Así, el valor esperado de  $N$  se calcularía mediante  $p(N | \lambda)$ , obteniendo el valor esperado del resultado respecto de la distribución posterior de  $\lambda$ . Análogamente, en el caso de los montos obtendríamos primero la esperanza respecto a  $p(Z_1, Z_2, \dots, Z_N | \theta)$  y la esperanza del resultado respecto a la distribución posterior de  $\theta$ . Lo anterior permite mantener la hipótesis de independencia de los montos dado el valor de  $\theta$  sobrentendiendo que, por ejemplo,  $E_Z(Z) = E_\theta E_{Z|\theta}(Z)$ .



**Figura 4.3:** Nodos explícitos que se colapsan al usar la distribución predictiva

Consideramos que la información proporcionada por cada portafolio  $j, j = 1, \dots, n$ , consiste en el número de pólizas  $R$  que conforma cada portafolio, así como el número de siniestros registrados,  $N_j$  y sus montos,  $\mathbf{Z}_j = (Z_{j1}, Z_{j2}, \dots, Z_{jN_j})$ .

Supondremos que los montos individuales

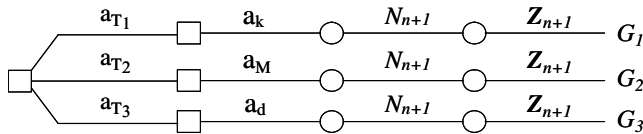
$$\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n) = (Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{1N_1}, \dots, Z_{n1}, Z_{n2}, \dots, Z_{nN_n})$$

son independientes e idénticamente distribuidos. Aunque su dimensión depende de  $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_n)$ , se considera que la distribución de sus valores es independiente de él. Tomando en cuenta esto, la información sobre montos individuales proporcionada por las muestras de los  $n$  portafolios, se puede considerar como una muestra aleatoria de tamaño  $m = \sum_{j=1}^n N_j$ .

Así, podemos considerar que  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ .

Por su parte,  $\mathbf{Z}_{n+1}$  es el vector formado por los montos de los siniestros correspondientes al portafolio  $(n + 1)$ , es decir,  $Z_{(n+1)1}, Z_{(n+1)2}, \dots, Z_{(n+1)N_{n+1}}$ . Por simplificar la notación, definiremos:  $\mathbf{Z}_{n+1} = (Z_{m+1}, Z_{m+2}, \dots, Z_{m+N_{n+1}})$ .

El grafo del problema global que la cedente se plantea se presenta en la siguiente figura:



**Figura 4.4:** Diagrama de árbol para el problema global del reaseguro óptimo.

donde

$$G_1 = u(a_k, N_{n+1}, \mathbf{Z}_{n+1})$$

$$G_2 = u(a_M, N_{n+1}, \mathbf{Z}_{n+1})$$

$$G_3 = u(a_d, N_{n+1}, \mathbf{Z}_{n+1})$$

y las utilidades, la ganancia, dependiendo del tipo de reaseguro, vienen dadas por:

- **En reaseguro cuota parte**

$$G = P - \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} - PR + \sum_{i=1}^{N_{n+1}} \min [(1 - k) Z_{m+i}, L_1] \quad (4.2)$$

En particular, considerando que  $PR = (1 - k) P$  (ecuación 1.1).

$$G = kP - \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} + \sum_{i=1}^{N_{n+1}} \min [(1 - k) Z_{m+i}, L_1] \quad (4.3)$$

- **En reaseguro exceso de pérdida por riesgo**

$$G = P - \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} - PR + \sum_{i=1}^{N_{n+1}} [\min [Z_{m+i}, L_2] - M] I_B (Z_{m+i}) \quad (4.4)$$

donde  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$ .

- **En reaseguro stop loss**

$$G = P - \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} - PR + [\min (X, L_3) - d] I_C (X) \quad (4.5)$$

con  $C = \{X : X > d\}$ .

La cedente se plantea, por tanto, un problema de decisión secuencial, en dos etapas, que resolverá por inducción backwards. Esto es, comienza por resolver por separado la elección de las características óptimas de cada tipo de reaseguro, resolviendo así cada uno de los tres problemas de decisión que aparecen en el árbol en la segunda etapa, y que hemos representado antes en la Figura 4.2.

En cada caso la cedente determina la elección óptima,  $a_{\xi}^*$ , como aquella que maximiza su utilidad esperada  $E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|N_{n+1}, Z, N} (u(a_{\xi}, N_{n+1}, Z_{n+1}))$ .

Evaluando, en cada caso, la utilidad esperada en la elección óptima:

$$E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|N_{n+1}, Z, N} \left( u \left( a_{\xi}^*, N_{n+1}, Z_{n+1} \right) \right),$$

la cedente llega al nodo correspondiente a la primera etapa del árbol, que se representa en la Figura 4.1. En ese momento, cada rama, cada decisión, corresponde a un tipo de reaseguro, pero ya tiene asignado un valor concreto, no aleatorio, que es,

$$E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|N_{n+1}, Z, N} \left( u \left( a_{T_i}^*, N_{n+1}, Z_{n+1} \right) \right).$$

Por tanto, la cedente elegirá la rama que le proporciona mayor valor de

$$E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|N_{n+1}, Z, N} \left( u \left( a_{\xi}^*, N_{n+1}, Z_{n+1} \right) \right).$$

En la expresión  $E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|N_{n+1}, Z, N} \left( u \left( a_{\xi}, N_{n+1}, Z_{n+1} \right) \right)$ , los vectores  $Z_{n+1}$  y  $Z$  exigen conocer el valor de  $N$  y  $N_{n+1}$ . Con objeto de simplificar la notación al máximo posible, en lo sucesivo, se sobrentiende la condicionalidad al número de siniestros representando:

$$E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|N_{n+1}, Z, N} \left( u \left( a_{\xi}, N_{n+1}, Z_{n+1} \right) \right) = E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|Z} \left( u \left( a_{\xi}, N_{n+1}, Z_{n+1} \right) \right)$$

y esperando que el abuso de notación no lleve a confusión.

## 4.2. Modelo

Para explicitar el modelo se requiere elegir la distribución tanto para el número de siniestros del portafolio  $j$ ,  $N_j$ , como para sus montos  $Z_j = (Z_{j1}, Z_{j2}, \dots, Z_{jN_j})$ .

Puesto que el análisis se realiza para un portafolio de seguros de vida, podemos considerar  $N_j$  sigue una distribución Binomial( $R, \phi$ ) o Poisson( $\lambda$ ). Por su parte, Supondremos que el monto individual de cada siniestro,  $Z_{ji}$ , sigue una distribución  $\text{Ga}(Z_{ji} | \alpha, \beta)$ .

### **Modelo 1**

Suponiendo que el número de siniestros del portafolio  $j$  se distribuye según una  $\text{Pn}(N_j | \lambda)$  y que el monto de un siniestro sigue una distribución  $\text{Ga}(Z_{ji} | \alpha, \beta)$ .

$$\begin{aligned}
 p(N_j, \mathbf{Z}_j | \theta) &= p(N_j | \lambda) \prod_{i=1}^{N_j} p(Z_{ji} | \alpha, \beta) \\
 &= \text{Pn}(N_j | \lambda) \prod_{i=1}^{N_j} \text{Ga}(Z_{ji} | \alpha, \beta)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

### **Modelo 2**

Este modelo supone que únicamente puede ocurrir un siniestro en cada póliza, que el número de siniestros se distribuye según una  $\text{Bi}(N_j | R, \phi)$  y que el monto individual sigue la misma distribución considerada antes  $\text{Ga}(Z_{ji} | \alpha, \beta)$ .

$$\begin{aligned}
 p(N_j, \mathbf{Z}_j | \theta) &= p(N_j | R, \phi) \prod_{i=1}^{N_j} p(Z_{ji} | \alpha, \beta) \\
 &= \text{Bi}(N_j | R, \phi) \prod_{i=1}^{N_j} \text{Ga}(Z_{ji} | \alpha, \beta)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

En esta distribución,  $\phi$  representa la probabilidad de que ocurra un siniestro y  $R$  el número de pólizas del portafolio. El valor  $R$  es conocido por la cedente y el

parámetro sobre el cual interesa realizar inferencia es  $\phi$ . Los posibles valores que pueda tomar la probabilidad de ocurrencia de un siniestro,  $\phi$ , resultan de interés para la cedente, ya que es la base para la tarificación en seguros.

### 4.3. Función de verosimilitud

Suponemos que disponemos de los datos de  $n$  portafolios del mismo tipo de riesgo, que la cedente está considerando reasegurar.

La información proporcionada por la cedente se resume en los vectores:

$$\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_n)$$

y,

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n) = (Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{1N_1}, \dots, Z_{n1}, Z_{n2}, \dots, Z_{nN_n}) = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$$

con

$$m = \sum_{j=1}^n N_j.$$

Como las componentes de cada vector de  $\mathbf{Z}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , son condicionalmente independientes e idénticamente distribuidas. Tenemos:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Z} | \alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^m \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} Z_i^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{Z_i}{\beta}\right\} I_{(0,\infty)}(Z_i) & (4.8) \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha}\right)^m \left(\prod_{i=1}^m Z_i^{\alpha-1}\right) \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^m Z_i}{\beta}\right\} I_{(0,\infty)}(Z_i) \end{aligned}$$

con  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ .

En lo que respecta al número de siniestros:

### **Modelo 1**

Cuando suponemos que  $N_j \sim \text{Pn}(\lambda)$ , con  $\lambda > 0$  y  $N_j = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} p(\mathbf{N} | \lambda) &= \prod_{j=1}^n \exp\{-\lambda\} \frac{\lambda^{N_j}}{N_j!} \\ &= \exp\{-n\lambda\} \frac{\lambda^m}{\prod_{j=1}^n N_j!} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Donde,

$$m = \sum_{j=1}^n N_j.$$

### **Modelo 2**

Cuando suponemos que  $N_j \sim \text{Bi}(R, \phi)$ , con  $0 \leq \phi \leq 1$  y  $N_j = 0, 1, 2, \dots, R$

$$\begin{aligned} p(\mathbf{N} | R, \phi) &= \prod_{j=1}^n \binom{R}{N_j} \phi^{N_j} (1 - \phi)^{(R - N_j)} \\ &= \left\{ \prod_{j=1}^n \binom{R}{N_j} \right\} \phi^m (1 - \phi)^{r - m} \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde  $r = nR$ .

Así, la función de verosimilitud conjunta de  $\eta = (\lambda \text{ ó } \phi, \text{ según el modelo de } N_j)$  y  $(\alpha, \beta)$  es:

$$L(\theta | \mathbf{N}, \mathbf{Z}) = p(\mathbf{N} | \eta) p(\mathbf{Z} | \alpha, \beta).$$

## 4.4. Distribuciones iniciales

El análisis bayesiano requiere la especificación de las distribuciones previas sobre los parámetros involucrados en el modelo. Supondremos que  $\eta$  es independiente de  $(\alpha, \beta)$ . En todos los casos, vamos a considerar tanto previas conjugadas como no informativas.

Las distribuciones iniciales conjugadas de cada modelo tienen la ventaja matemática de proporcionar, a través del Teorema de Bayes, distribuciones finales de la misma familia (Berger, 1985a, pp. 130); del mismo modo dan lugar a distribuciones predictivas conocidas, lo cual facilita los cálculos posteriores. Además, la elección de los hiperparámetros de las distribuciones previas conjugadas permite reflejar los conocimientos a priori sobre los valores de los parámetros. Ahora bien, cuando estos son inexistentes o no se desea utilizarlos, es aconsejable el uso de las distribuciones iniciales no informativas. Existen diversos métodos para la obtención de distribuciones no informativas. En este trabajo se utiliza previas obtenidas mediante el método de Jeffreys (Berger, 1985a, pp. 87).

Las distribuciones previas conjugadas y no informativas que se presenta a continuación se pueden encontrar en Berger (1985a), para  $\lambda$  y  $\phi$ , y en Miller (1980b), Yang y Berger (1997) o Sun y Ye (1996) para  $\alpha$  y  $\beta$ .



### ***Distribución inicial mínimo informativa para el parámetro $\lambda$ del Modelo Poisson***

Para el parámetro  $\lambda > 0$ , la distribución inicial mínimo informativa es la obtenida mediante la regla de Jeffreys.

$$\pi_1(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \quad (4.11)$$

### ***Distribución inicial conjugada para el parámetro $\lambda$ del Modelo Poisson***

Para el parámetro  $\lambda > 0$ , la distribución inicial conjugada es una distribución  $\text{Ga}(\gamma, \nu)$ , con  $\gamma > 0$  y  $\nu > 0$ .

$$\pi_2(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\gamma) \nu^\gamma} \lambda^{\gamma-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{\nu}\right\} \quad (4.12)$$

### ***Distribución inicial mínimo informativa para el parámetro $\phi$ del Modelo Binomial***

Para el parámetro  $0 \leq \phi \leq 1$  la distribución inicial mínimo informativa es una Beta, esto es,  $\text{Be}(\phi \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

$$\pi_3(\phi) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \phi^{-\frac{1}{2}} (1 - \phi)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

### ***Distribución inicial conjugada para el parámetro $\phi$ del Modelo Binomial***

Para el parámetro  $0 \leq \phi \leq 1$  la distribución inicial conjugada es una distribución  $\text{Be}(\phi \mid \alpha_\phi, \beta_\phi)$ , con  $\alpha_\phi > 0$  y  $\beta_\phi > 0$ .

$$\pi_4(\phi) = \frac{\Gamma(\alpha_\phi + \beta_\phi)}{\Gamma(\alpha_\phi) \Gamma(\beta_\phi)} \phi^{\alpha_\phi-1} (1 - \phi)^{\beta_\phi-1} \quad (4.14)$$

### ***Distribución inicial mínimo informativa para los parámetros $(\alpha, \beta)$ del Modelo Gamma***

Para los parámetros  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$  se ha considerado dos escenarios: en el primero supondremos  $\alpha$  conocido, por lo que, la distribución previa no informativa obtenida mediante la regla de Jeffreys es:

$$\pi_1(\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\beta} \quad (4.15)$$

Bajo el supuesto de no conocer el valor de  $\alpha$ , la distribución inicial no informativa para los parámetros  $(\alpha, \beta)$  obtenida mediante la regla de Jeffreys es:

$$\pi_2(\alpha, \beta) \propto \frac{\sqrt{\alpha \text{PG}(1, \alpha) - 1}}{\beta} \quad (4.16)$$

Donde  $\text{PG}(1, \alpha)$  es la función PolyGamma( $r, \alpha$ ) que consiste en derivar  $r$  veces la función digamma  $\Psi(\alpha) = \frac{\partial \ln \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha}$ .

### ***Distribución inicial conjugada para el parámetro $\beta$ del Modelo Gamma***

Suponiendo  $\alpha > 0$  conocido, la distribución previa conjugada para el parámetro  $\beta > 0$  del modelo del monto individual de siniestros es una distribución Gamma Inversa, es decir,  $IG(\beta | \varphi, \tau)$ , con  $\varphi > 0$  y  $\tau > 0$ .

$$\pi_3(\varphi, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\varphi) \tau^\varphi} \beta^{-(\varphi+1)} \exp\left\{-\frac{1}{\tau\beta}\right\} \quad (4.17)$$

## **4.5. Distribuciones posteriores**

Las distribuciones posteriores que presentamos a continuación son obtenidas mediante el Teorema de Bayes a partir de los modelos y las distribuciones iniciales presentadas en los apartados anteriores.

Dado que, en general:

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) \propto p(\mathbf{x} | \theta) \pi(\theta)$$

la distribución posterior se deduce fácilmente a partir de su núcleo, obtenido como producto de la distribución previa y de la verosimilitud.

### ***Distribuciones posteriores para el parámetro $\lambda$ del Modelo Poisson***

Al suponer la distribución inicial mínimo informativa (4.11) se obtiene la distribución posterior

$$\pi_1(\lambda | N_1, N_2, \dots, N_n) \propto \lambda^{m-\frac{1}{2}} \exp\{-n\lambda\} \quad (4.18)$$

Como puede observarse, se trata de una distribución  $\text{Ga}(\lambda | m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n})$ .

Por su parte, considerando la previa conjugada (4.12), se obtiene que la distribución posterior es

$$\pi_2(\lambda | N_1, N_2, \dots, N_n) \propto \lambda^{m+\gamma-1} \exp\left\{-\lambda\left(n + \frac{1}{\nu}\right)\right\} \quad (4.19)$$

Obteniendo, así, otra distribución Gamma, en la que los parámetros varían debido a la información que estamos añadiendo en ellos. Obteniendo así una distribución

$$\text{Ga}\left(\lambda | m + \gamma, \frac{1}{\left(n + \frac{1}{\nu}\right)}\right).$$

### ***Distribuciones posteriores para el parámetro $\phi$ del Modelo Binomial***

Utilizando la distribución inicial mínimo informativa (4.13) se obtiene como distribución posterior

$$\pi_3(\phi | \mathbf{N}, R) \propto \phi^{m-\frac{1}{2}} (1-\phi)^{r-m-\frac{1}{2}} \quad (4.20)$$

tratándose de una distribución  $\text{Be}(\phi | m + \frac{1}{2}, r - m + \frac{1}{2})$ .

Cuando la previa es conjugada, (4.14), se obtiene que la distribución posterior es

$$\pi_4(\phi | \mathbf{N}, R) \propto \phi^{m+\alpha_\phi-1} (1-\phi)^{r-m+\beta_\phi-1} \quad (4.21)$$

Es decir, se trata de una distribución  $\text{Be}(\phi | m + \alpha_\phi, r - m + \beta_\phi)$ .

### ***Distribuciones posteriores para los parámetros $(\alpha, \beta)$ del Modelo Gamma***

Con base en las distribuciones previas propuestas obtendremos tres distribuciones posteriores para los parámetros  $(\alpha, \beta)$ . La primera se obtendrá usando la distribución inicial mínimo informativa (4.15), en la que se supone el parámetro  $\alpha$  conocido. Por tanto, la distribución posterior que resulta es:

$$\pi_1(\beta | \alpha, Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \propto \beta^{-(\alpha m+1)} \exp\left\{-\frac{m\bar{Z}}{\beta}\right\}. \quad (4.22)$$

Con lo anterior se afirma que  $\beta | \alpha, Z_1, Z_2, \dots, Z_m \sim \text{IG}(\beta | \alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}})$ , donde  $\bar{Z} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Z_i$ .

Considerando la distribución inicial mínimo informativa (4.16), se obtiene como distribución posterior:

$$\begin{aligned} \pi_2(\alpha, \beta | Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \propto & \frac{\sqrt{\alpha \text{PG}(1, \alpha) - 1} \left( \prod_{i=1}^m Z_i^\alpha \right)}{\Gamma^m(\alpha)} \beta^{-(\alpha m+1)} \\ & \times \exp\left\{-\frac{m\bar{Z}}{\beta}\right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Claramente podemos observar que, en la expresión (4.23) la distribución posterior de  $\beta \mid \alpha$  resulta ser la misma que en (4.22) y que, por su parte, la distribución marginal de  $\alpha$  no adopta una forma analíticamente conocida. Integrando (4.23) con respecto a  $\beta$  y usando el hecho de que condicionada en  $\alpha$  la distribución posterior de  $\beta$  es una IG  $(\beta \mid \alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}})$ , se obtiene que la distribución marginal de  $\alpha$  de forma proporcional es:

$$\pi_2(\alpha \mid Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \propto \frac{\sqrt{\alpha \text{PG}(1, \alpha) - 1} \left( \prod_{i=1}^m Z_i^\alpha \right) \Gamma(\alpha m)}{\Gamma^m(\alpha) (m\bar{Z})^{\alpha m}} \quad (4.24)$$

Finalmente, bajo el supuesto de que  $\alpha$  es conocido, empleando la distribución inicial conjugada (4.17), se obtiene que la distribución posterior de  $\beta$  es de la misma familia que la distribución inicial, la cual se presenta a continuación:

$$\pi_3(\beta \mid \alpha, Z_1, Z_2, \dots, Z_m) = \beta^{-(\alpha m + \varphi + 1)} \exp \left\{ -\frac{1}{\beta} \left( \frac{1}{\tau} + m\bar{Z} \right) \right\} \quad (4.25)$$

Es decir, la distribución posterior es una IG  $(\beta \mid \alpha m + \varphi, (\frac{1}{\tau} + m\bar{Z})^{-1})$ .

## 4.6. Distribuciones predictivas

Como se ha comentado, desde el punto de vista de inferencia bayesiana, el elemento fundamental en el análisis del problema de reaseguro óptimo son las distribuciones predictivas. Su obtención se realiza mediante el Teorema de la Probabilidad Total, a partir del modelo y la distribución posterior del parámetro correspondiente.

***Distribuciones predictivas del número de siniestros suponiendo un Modelo Poisson***

Considerando que  $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_n)$  y utilizando la distribución posterior (4.18), la distribución predictiva que se obtiene para el portafolio  $n + 1$  es la conocida como una distribución Poisson-Gamma con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 p_1(N_{n+1} | \mathbf{N}) &= \int_0^{\infty} p(N_{n+1} | \lambda) \pi_1(\lambda | N_1, N_2, \dots, N_n) d\lambda & (4.26) \\
 &= \int_0^{\infty} \text{Pn}(N_{n+1} | \lambda) \text{Ga}\left(\lambda | m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right) d\lambda \\
 &= \frac{n^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(m + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2} + N_{n+1})}{N_{n+1}!} \frac{1}{(n + 1)^{m+\frac{1}{2}+N_{n+1}}}
 \end{aligned}$$

Es decir, una distribución  $Pg(N_{n+1} | m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, 1)$ .

Por su parte, al utilizar como distribución posterior (4.19), la distribución predictiva que se obtiene para la misma variable es una  $Pg(N_{n+1} | m + \gamma, (n + \frac{1}{\nu})^{-1}, 1)$ .

Esto es:

$$\begin{aligned}
 p_2(N_{n+1} | \mathbf{N}) &= \int_0^{\infty} p(N_{n+1} | \lambda) \pi_2(\lambda | N_1, N_2, \dots, N_n) d\lambda & (4.27) \\
 &= \int_0^{\infty} \text{Pn}(N_{n+1} | \lambda) \text{Ga}\left(\lambda | m + \gamma, \frac{1}{(n + \frac{1}{\nu})}\right) d\lambda \\
 &= \frac{(n + \frac{1}{\nu})^{m+\gamma}}{\Gamma(m + \gamma)} \frac{\Gamma(m + \gamma + N_{n+1})}{N_{n+1}!} \frac{1}{(n + \frac{1}{\nu} + 1)^{m+\gamma+N_{n+1}}}.
 \end{aligned}$$

### ***Distribuciones predictivas del número de siniestros suponiendo un Modelo Binomial***

Utilizando la distribución posterior (4.20) para el parámetro  $\phi$ , del Modelo Binomial, se obtiene como distribución predictiva para el número de siniestros una Binomial-Beta cuya expresión es:

$$\begin{aligned}
 p_3(N_{n+1} | \mathbf{N}) &= \int_0^1 p(N_{n+1} | R, \phi) \pi_3(\phi | \mathbf{N}, R) d\phi & (4.28) \\
 &= \int_0^1 \text{Bi}(N_{n+1} | R, \phi) \text{Be}\left(\phi | m + \frac{1}{2}, r - m + \frac{1}{2}\right) d\phi
 \end{aligned}$$

Es decir, se trata de una distribución  $\text{Bb}(N_{n+1} | m + \frac{1}{2}, r - m + \frac{1}{2}, R)$ .

Por otro lado, al utilizar como posterior (4.21), la distribución predictiva del número de siniestros que se obtiene para el portafolio  $n + 1$  es:

$$\begin{aligned}
 p_4(N_{n+1} | \mathbf{N}) &= \int_0^1 p(N_{n+1} | R, \phi) \pi_4(\phi | \mathbf{N}, R) d\phi & (4.29) \\
 &= \int_0^1 \text{Bi}(N_{n+1} | R, \phi) \text{Be}(\phi | m + \alpha_\phi, r - m + \beta_\phi) d\phi
 \end{aligned}$$

Es decir, una  $\text{Bb}(N_{n+1} | m + \alpha_\phi, r - m + \beta_\phi, R)$ .

### ***Distribuciones predictivas del monto individual de siniestros***

Sea  $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$ , la distribución predictiva, de cualquiera de las componentes del vector  $\mathbf{Z}_{n+1} = (Z_{m+1}, \dots, Z_{m+N_{n+1}})$ , que resulta al considerar como

distribución posterior (4.22) es:

$$\begin{aligned}
 p_1(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) &= \int_0^{\infty} p(Z_{m+i} | \alpha, \beta) \pi_1(\beta | \alpha, \mathbf{Z}) d\beta & (4.30) \\
 &= \int_0^{\infty} \text{Ga}(Z_{m+i} | \alpha, \beta) \text{IG}\left(\beta | \alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}}\right) d\beta \\
 &= \frac{(m\bar{Z})^{\alpha m}}{\Gamma(\alpha m)} \frac{\Gamma(\alpha m + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{Z_{m+i}^{\alpha-1}}{(m\bar{Z} + Z_{m+i})^{\alpha m + \alpha}}
 \end{aligned}$$

La cual se puede identificar como una distribución Gamma-Gamma, concretamente:

$$\text{Gg}\left(Z_{m+i} | \alpha m, (m\bar{Z})^{-1}, \alpha\right).$$

Si consideramos el caso de  $\alpha$  desconocido, entonces utilizaremos la distribución posterior (4.23). Con ella, obtenemos que la distribución predictiva del monto individual de un siniestro,  $p_2(Z_{m+i} | \mathbf{Z})$  se calcula como:

$$\int_0^{\infty} p(Z_{m+i} | \alpha, \beta) \pi_2(\alpha, \beta | \mathbf{Z}) d\alpha d\beta$$

Sustituyendo tanto el modelo como la distribución posterior, se obtiene que esta distribución predictiva puede calcularse de forma proporcional como:

$$\begin{aligned}
 &\propto \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{Ga}(Z_{m+i} | \alpha, \beta) \frac{\sqrt{\alpha \text{PG}(1, \alpha) - 1} \left(\prod_{i=1}^m Z_i^{\alpha}\right)}{\Gamma^m(\alpha)} \beta^{-(\alpha m + 1)} \exp\left\{-\frac{m\bar{Z}}{\beta}\right\} d\alpha d\beta \\
 &\propto \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha \text{PG}(1, \alpha) - 1} \left(\prod_{i=1}^m Z_i^{\alpha}\right) Z_{m+i}^{\alpha-1}}{\Gamma^{m+1}(\alpha)} \beta^{-(\alpha + \alpha m + 1)} \exp\left\{-\frac{m\bar{Z} + Z_{m+i}}{\beta}\right\} d\alpha d\beta
 \end{aligned}$$



Finalmente, obtenemos que la distribución predictiva para  $Z_{m+i}$  es:

$$p_2(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) \propto \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha \text{PG}(1, \alpha) - 1} \left( \prod_{i=1}^m Z_i^\alpha \right) Z_{m+i}^{\alpha-1}}{\Gamma^{m+1}(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + \alpha m)}{(m\bar{Z} + Z_{m+i})^{\alpha + \alpha m}} d\alpha \quad (4.31)$$

En el caso de la distribución conjugada, donde consideraremos la distribución posterior (4.25), se obtiene como distribución predictiva una

$$\text{Gg} \left( Z_{m+i} | \alpha m + \varphi, \left( \frac{1}{\tau} + m\bar{Z} \right)^{-1}, \alpha \right),$$

como puede verse a continuación:

$$\begin{aligned} p_3(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) &= \int_0^{\infty} p(Z_{m+i} | \alpha, \beta) \pi_1(\beta | \alpha, \mathbf{Z}) d\beta \quad (4.32) \\ &= \int_0^{\infty} \text{Ga}(Z_{m+i} | \alpha, \beta) \text{IG} \left( \beta | \alpha m + \varphi, \left( \frac{1}{\tau} + m\bar{Z} \right)^{-1} \right) d\beta \\ &= \frac{\left( \frac{1}{\tau} + m\bar{Z} \right)^{\alpha m + \varphi} \Gamma(\alpha m + \varphi + \alpha)}{\Gamma(\alpha m + \varphi) \Gamma(\alpha)} \\ &\quad \times \frac{Z_{m+i}^{\alpha-1}}{\left( \frac{1}{\tau} + m\bar{Z} + Z_{m+i} \right)^{\alpha m + \varphi + \alpha}} \end{aligned}$$

## 4.7. Inferencia sobre otras variables relacionadas con el reaseguro óptimo

Hasta aquí se ha realizado inferencia sobre las variables aleatorias  $N$  y  $\mathbf{Z}$ . Sin embargo, el análisis del reaseguro óptimo requiere la definición de otras variables

relacionadas, cuyos valores están sujetos a los resultados obtenidos en  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{Z}$ . A continuación se presentan y analizan.

### 4.7.1. Monto agregado de siniestros

Realizar inferencia sobre la variable del monto agregado de siniestros del portafolio objeto del reaseguro,  $X_{n+1}$ , es de interés en nuestro análisis ya que el reaseguro óptimo dependerá de la prima global,  $P$ , que el asegurador cobra a sus asegurados. Resulta lógico pensar que el valor que toma  $P$  esté basado en la distribución de los siniestros totales. Por ello, en este apartado, nos ocupamos de la distribución de  $X_{n+1}$  y sus características.

Realizaremos inferencia sobre  $X_{n+1}$ , el monto agregado de siniestros del portafolio  $n+1$ , a partir de las distribuciones del número y monto individual de siniestros. Con objeto de hacer más llevadera la lectura, representamos directamente por  $X$  el monto agregado de siniestros del portafolio  $n+1$ . Esperando que esto no cree confusión, ya que nuestro objeto de interés es la distribución predictiva basada en los datos anteriores.

Sea  $X = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i}$ , donde  $\mathbf{Z}_{n+1} = (Z_{m+1}, \dots, Z_{m+N_{n+1}})$ , los montos individuales de siniestros, se suponen condicionalmente independientes e idénticamente distribuidos e independientes del número de siniestros del portafolio que se desea reasegurar,  $N_{n+1}$ .

La distribución predictiva de  $X$  condicionada a los datos del número,  $\mathbf{N}$  y monto individual de siniestros  $\mathbf{Z}$  se obtiene como:

$$p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} p(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) p(N_{n+1} | \mathbf{N}) \quad (4.33)$$

donde:

$$p(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p(X | \alpha, \beta, N_{n+1}) \pi(\alpha, \beta | \mathbf{Z}) d\alpha d\beta$$

En la expresión anterior, considerando el modelo y el supuesto de independencia condicional para el monto individual de siniestros

$$p(X | \alpha, \beta, N_{n+1}) = \text{Ga}(N_{n+1}\alpha, \beta).$$

Y, por tanto,

$$p(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{Ga}(N_{n+1}\alpha, \beta) \pi(\alpha, \beta | \mathbf{Z}) d\alpha d\beta. \quad (4.34)$$

Debido a la complejidad de la expresión (4.33) no es posible conocer la distribución analítica de  $X$ . Sin embargo, es posible obtener la esperanza y la varianza teóricas a partir de la predicción del número y monto individual de siniestros. La obtención de estos momentos es interesante y será de utilidad en algunas etapas del análisis del problema de elección del reaseguro.

**Teorema 4.7.1.** Sea  $X = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i}$ .

$$\begin{aligned} E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) \\ \text{Var}(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}}(\text{Var}(Z_{m+i} | \alpha, \beta)) + \\ &\quad + E((N_{n+1})^2 | \mathbf{N}) \text{Var}_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}}(E(Z_{m+i} | \alpha, \beta)) + \\ &\quad + \text{Var}(N_{n+1} | \mathbf{N}) E^2(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

*Demostración.* Recordemos que para conservar el supuesto de que los montos individuales de siniestros son condicionalmente independientes estamos mante-

niendo los cálculos en los nodos explícitos, como se ha comentado en el apartado 4.1, aunque sólo se resaltaré cuando haga falta. Así,

$$\begin{aligned}
 E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}(E(X | \mathbf{Z}, N_{n+1})) \\
 &= E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}\left(E\left(\sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} | \mathbf{Z}\right)\right) \\
 &= E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}(N_{n+1}E(Z_{m+i} | \mathbf{Z})) \\
 &= E(N_{n+1} | \mathbf{N})E(Z_{m+i} | \mathbf{Z})
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \\
 &= E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}(\text{Var}(X | \mathbf{Z}, N_{n+1})) + \text{Var}_{N_{n+1}|\mathbf{N}}(E(X | \mathbf{Z}, N_{n+1})) \\
 &= E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}\left(\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} | \mathbf{Z}\right)\right) + \text{Var}_{N_{n+1}|\mathbf{N}}\left(E\left(\sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} | \mathbf{Z}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Donde, por su parte,

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} \mid \mathbf{Z} \right) &= \\
&= \mathbb{E}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} \left( \text{Var} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} \mid \alpha, \beta \right) \right) + \\
&\quad + \text{Var}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} \left( \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} \mid \alpha, \beta \right) \right) \\
&= \mathbb{E}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (N_{n+1} \text{Var} (Z_{m+i} \mid \alpha, \beta)) + \\
&\quad + \text{Var}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (N_{n+1} \mathbb{E} (Z_{m+i} \mid \alpha, \beta)) \\
&= N_{n+1} \mathbb{E}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (\text{Var} (Z_{m+i} \mid \alpha, \beta)) + \\
&\quad + (N_{n+1})^2 \text{Var}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (\mathbb{E} (Z_{m+i} \mid \alpha, \beta)).
\end{aligned}$$

Por lo que, finalmente:

$$\begin{aligned}
\text{Var} (X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \\
&= \mathbb{E}_{N_{n+1} \mid \mathbf{N}} \left( \text{Var} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} \mid \mathbf{Z} \right) \right) + \text{Var}_{N_{n+1} \mid \mathbf{N}} \left( \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} \mid \mathbf{Z} \right) \right) \\
&= \mathbb{E}_{N_{n+1} \mid \mathbf{N}} \left( N_{n+1} \mathbb{E}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (\text{Var} (Z_{m+i} \mid \alpha, \beta)) + (N_{n+1})^2 \text{Var}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (\mathbb{E} (Z_{m+i} \mid \alpha, \beta)) \right) + \\
&\quad + \text{Var}_{N_{n+1} \mid \mathbf{N}} (N_{n+1} \mathbb{E} (Z_{m+i} \mid \mathbf{Z})) \\
&= \mathbb{E} (N_{n+1} \mid \mathbf{N}) \mathbb{E}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (\text{Var} (Z_{m+i} \mid \alpha, \beta)) + \\
&\quad + \mathbb{E} \left( (N_{n+1})^2 \mid \mathbf{N} \right) \text{Var}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (\mathbb{E} (Z_{m+i} \mid \alpha, \beta)) + \text{Var} (N_{n+1} \mid \mathbf{N}) \mathbb{E}^2 (Z_{m+i} \mid \mathbf{Z})
\end{aligned}$$

□

Volviendo a la distribución predictiva del monto agregado de siniestros, en (4.33),  $p(X \mid \mathbf{Z}, N_{n+1})$ , dependerá de la distribución elegida para  $(\alpha, \beta)$ . Del mismo modo,  $p(N_{n+1} \mid \mathbf{N})$  también depende de la distribución previa para el paráme-

tro del modelo considerado para el número de siniestros. Combinando las distintas posibilidades obtendremos la expresión (4.33) de la distribución predictiva  $p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , teniendo en cuenta que sólo se considera usar distribuciones mínimo informativas para todos los parámetros desconocidos, o, por el contrario, usar distribuciones conjugadas para todos los parámetros.

### **Distribución predictiva**

A continuación se presenta la distribución predictiva para el monto agregado de siniestros  $X$  para cada uno de los modelos considerados.

#### ***CASO 1.- Distribución predictiva de $X$ suponiendo un Modelo Poisson, $\alpha$ conocido y previas mínimo informativas***

La distribución posterior viene dada por (4.22). A partir de ella, la distribución predictiva de  $X$ , condicionada a  $\mathbf{Z}$  y al valor de  $N_{n+1}$ , resulta:

$$\begin{aligned}
 p_1(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) &= \int_0^{\infty} \text{Ga}(x | N_{n+1}\alpha, \beta) \text{IG}\left(\beta | \alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}}\right) d\beta \quad (4.35) \\
 &= \frac{(m\bar{Z})^{\alpha m} \Gamma(\alpha m + N_{n+1}\alpha)}{\Gamma(\alpha m) \Gamma(N_{n+1}\alpha)} \frac{x^{N_{n+1}\alpha - 1}}{(m\bar{Z} + x)^{\alpha m + N_{n+1}\alpha}}
 \end{aligned}$$

una distribución  $\text{Gg}\left(x | \alpha m, (m\bar{Z})^{-1}, N_{n+1}\alpha\right)$ .

Con base en (4.33) y considerando la distribución predictiva  $p_1(N_{n+1} | \mathbf{N})$ , ob-

tenida en (4.26), **la distribución predictiva para  $X$  es:**

$$\begin{aligned}
 p_1(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} p_1(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) p_1(N_{n+1} | \mathbf{N}) \quad (4.36) \\
 &= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} \text{Gg} \left( x | \alpha m, (m\bar{Z})^{-1}, N_{n+1}\alpha \right) \\
 &\quad \text{Pg} \left( N_{n+1} | m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, 1 \right)
 \end{aligned}$$

**CASO 2.- Distribución predictiva de  $X$  suponiendo un Modelo Poisson,  $\alpha$  desconocido y previas mínimo informativas**

En este caso se considera una distribución inicial mínimo informativa con  $\alpha$  desconocido, en el que la distribución posterior viene dada por (4.23). Así, la distribución predictiva para el monto agregado de siniestros condicionada  $\mathbf{Z}$  y al valor de  $N_{n+1}$  es:

$$\begin{aligned}
 p_2(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{Ga}(N_{n+1}\alpha, \beta) \pi_2(\alpha, \beta | \mathbf{Z}) d\alpha d\beta \quad (4.37) \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{Ga}(N_{n+1}\alpha, \beta) \pi_2(\beta | \mathbf{Z}, \alpha) \pi_2(\alpha | \mathbf{Z}) d\alpha d\beta \\
 &\propto \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{Ga}(N_{n+1}\alpha, \beta) \text{IG} \left( \beta | \alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}} \right) \\
 &\quad \frac{\sqrt{\alpha \text{PG}(1, \alpha) - 1} \left( \prod_{i=1}^m Z_i^\alpha \right)}{\Gamma^m(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha m)}{(m\bar{Z})^{\alpha m}} d\alpha d\beta
 \end{aligned}$$

A partir de (4.33) y considerando la distribución predictiva (4.26) para el número de siniestros, **la distribución predictiva para  $X$  es:**

$$\begin{aligned}
p_2(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} p_2(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) p_1(N_{n+1} | \mathbf{N}) \\
&= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} p_2(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) \text{Pg} \left( N_{n+1} \mid m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, 1 \right)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

**CASO 3.- Distribución predictiva de  $X$  suponiendo un Modelo Poisson,  $\alpha$  conocido y previas conjugadas**

En el tercer caso, se considera la distribución posterior conjugada (4.25). Así, la distribución predictiva para el monto agregado de siniestros condicionada a  $\mathbf{Z}$  y al valor de  $N_{n+1}$  es:

$$\begin{aligned}
p_3(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) &= \int_0^{\infty} \text{Ga}(N_{n+1}\alpha, \beta) \\
&\quad \times \text{IG} \left( \beta \mid \alpha m + \varphi, \left( \frac{1}{\tau} + m\bar{Z} \right)^{-1} \right) d\beta \\
&= \frac{\left( m\bar{Z} + \frac{1}{\tau} \right)^{\alpha m + \varphi} \Gamma(\alpha m + \varphi + N_{n+1}\alpha)}{\Gamma(\alpha m + \varphi) \Gamma(N_{n+1}\alpha)} \\
&\quad \times \frac{x^{N_{n+1}\alpha - 1}}{\left( m\bar{Z} + \frac{1}{\tau} + x \right)^{\alpha m + \varphi + N_{n+1}\alpha}}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Es decir, se trata de una distribución

$$\text{Gg} \left( x \mid \alpha m + \varphi, \left( \frac{1}{\tau} + m\bar{Z} \right)^{-1}, N_{n+1}\alpha \right)$$

La distribución predictiva para el número de siniestros viene dada por (4.27). Por



lo tanto, partiendo de (4.33), **la distribución predictiva para  $X$  es:**

$$\begin{aligned}
 p_3(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} p_3(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) p_2(N_{n+1} | \mathbf{N}) & (4.40) \\
 &= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} \text{Gg} \left( x | \alpha m + \varphi, \left( \frac{1}{\tau} + m \bar{Z} \right)^{-1}, N_{n+1} \alpha \right) \\
 &\text{Pg} \left( N_{n+1} | m + \gamma, \left( n + \frac{1}{\nu} \right)^{-1}, 1 \right)
 \end{aligned}$$

**CASO 4.- Distribución predictiva de  $X$  suponiendo un Modelo Binomial,  $\alpha$  conocido y previas mínimo informativas**

La distribución predictiva de  $X$ , condicionada a  $\mathbf{Z}$  y al valor de  $N_{n+1}$  es la que se obtuvo en el Caso 1,  $p_1(X | \mathbf{Z}, N_{n+1})$ , es decir,

$$\text{Gg} \left( x | \alpha m, (m \bar{Z})^{-1}, N_{n+1} \alpha \right)$$

.

Con base en (4.33) y considerando que la distribución predictiva del número de siniestros es (4.28), **la distribución predictiva para  $X$  es:**

$$\begin{aligned}
 p_4(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} p_1(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) p_3(N_{n+1} | \mathbf{N}) & (4.41) \\
 &= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} \text{Gg} \left( x | \alpha m, (m \bar{Z})^{-1}, N_{n+1} \alpha \right) \\
 &\text{Bb} \left( N_{n+1} | m + \frac{1}{2}, r - m + \frac{1}{2}, R \right)
 \end{aligned}$$

**CASO 5.- Distribución predictiva de  $X$  suponiendo un Modelo Binomial,  $\alpha$  desconocido y previas mínimo informativas**

Para este caso, la distribución predictiva de  $X$ , condicionada a  $\mathbf{Z}$  y al valor de  $N_{n+1}$  es la misma que se obtuvo en el Caso 2,  $p_2(X | \mathbf{Z}, N_{n+1})$ , es decir,

$$p_2(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) \propto \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{Ga}(N_{n+1}\alpha, \beta) \text{IG}\left(\beta | \alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}}\right) \frac{\sqrt{\alpha \text{PG}(1, \alpha) - 1} \left(\prod_{i=1}^m Z_i^\alpha\right)}{\Gamma^m(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha m)}{(m\bar{Z})^{\alpha m}} d\alpha d\beta \quad (4.42)$$

La distribución predictiva del número de siniestros es (4.28). Así, con base en (4.33), **la distribución predictiva para  $X$**  es

$$\begin{aligned} p_5(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} p_2(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) p_3(N_{n+1} | \mathbf{N}) \\ &= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} p_2(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) \text{Bb}\left(N_{n+1} | m + \frac{1}{2}, r - m + \frac{1}{2}, R\right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

**CASO 6.- Distribución predictiva de  $X$  suponiendo un Modelo Binomial,  $\alpha$  conocido y previas conjugadas**

La distribución predictiva de  $X$ , condicionada a  $\mathbf{Z}$  y al valor de  $N_{n+1}$  es la que se obtuvo en el Caso 3,  $p_3(X | \mathbf{Z}, N_{n+1})$ , es decir,

$$Gg\left(x | \alpha m + \varphi, \left(\frac{1}{\tau} + m\bar{Z}\right)^{-1}, N_{n+1}\alpha\right).$$

La distribución predictiva del número de siniestros viene dada por (4.29). Por tanto, de acuerdo con (4.33), **la distribución predictiva que se obtiene para  $X$**

es

$$\begin{aligned}
 p_6(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} p_3(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) p_4(N_{n+1} | \mathbf{N}) & (4.44) \\
 &= \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} \text{Gg} \left( x | \alpha m + \varphi, \left( \frac{1}{\tau} + m \bar{Z} \right)^{-1}, N_{n+1} \alpha \right) \\
 &\quad \text{Bb} (N_{n+1} | m + \alpha \phi, r - m + \beta \phi, R)
 \end{aligned}$$

#### 4.7.2. Monto de siniestros recuperados y monto de siniestros retenidos

Existen otras variables involucradas en el reaseguro óptimo, las cuales están relacionadas con las analizadas anteriormente. Se trata del monto de siniestros recuperados y el monto siniestros retenidos.

Toda vez que la cedente decide contratar un reaseguro estará interesada en el monto total que pagará el reasegurador. En este trabajo, ya que el punto de vista es el de la cedente tiene sentido denominarlo **monto agregado de siniestros recuperados**,  $X_{rea}$ , porque es la cedente quien recupera una parte de los siniestros que han ocurrido y ha pagado. Le interesará también conocer el monto que finalmente correrá por su cuenta, una vez descontado el reaseguro, esta variable es el **monto agregado de siniestros retenidos**,  $X_{ret}$ . Del mismo modo, representamos  $Z_{rea_{m+i}}$  como el monto individual recuperado del siniestro  $m+i$  y  $Z_{ret_{m+i}}$  como el monto individual retenido del siniestro  $m+i$ .

A partir de lo anterior, el monto agregado de siniestros que se paga en el portafolio  $n+1$ ,  $X$ , se compone como:

$$X = X_{rea} + X_{ret}. \quad (4.45)$$

Lo mismo ocurre para el monto individual de siniestros, es decir,

$$Z_{m+i} = Z_{rea_{m+i}} + Z_{ret_{m+i}}. \quad (4.46)$$

El monto agregado de siniestros que pagará el reasegurador estará integrado por la suma de la cantidad que le corresponda pagar en cada uno de los siniestros. Esto último ocurrirá en aquellos reaseguros que operan sobre el monto individual de siniestros, como es el caso del cuota parte y el exceso de pérdida, en los que el monto agregado de siniestros recuperados es la suma de los montos recuperados en los siniestros individuales,

$$X_{rea} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{rea_{m+i}}. \quad (4.47)$$

Por ende, en estos reaseguros, el monto agregado de siniestros retenidos es:

$$X_{ret} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}}. \quad (4.48)$$

Considerando las expresiones (4.47) y (4.48) y el hecho de que el monto agregado de siniestros está conformado por la suma de cada siniestro individual,

$$X = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i},$$

de acuerdo con (4.45),

$$\sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{rea_{m+i}} + \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}}.$$

Claramente, la forma en que se determina el monto de siniestros recuperados y el monto de siniestros retenidos dependerá del reaseguro analizado.

### En reaseguro cuota parte

En un reaseguro cuota parte el monto individual de siniestros recuperados es

$$Z_{rea_{m+i}} = \min [(1 - k) Z_{m+i}, L_1] \quad (4.49)$$

Por tanto, de acuerdo con (4.47), el monto agregado de siniestros recuperados en este reaseguro tiene la expresión

$$X_{rea} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} \min [(1 - k) Z_{m+i}, L_1]. \quad (4.50)$$

En cuanto a los siniestros retenidos.

**Definición 4.7.2** (Siniestros retenidos). El monto individual de siniestros retenidos por la cedente bajo un reaseguro cuota parte se obtiene mediante la expresión

$$Z_{ret_{m+i}} = \max [kZ_{m+i}, Z_{m+i} - L_1] \quad (4.51)$$

Puesto que se trata de un reaseguro que opera de forma individual, , de acuerdo con (4.48), el monto agregado de siniestros retenidos por la cedente será

$$X_{ret} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} \max [kZ_{m+i}, Z_{m+i} - L_1] \quad (4.52)$$

## En reaseguro exceso de pérdida por riesgo

El monto que el reasegurador pagará a la cedente por cada siniestro bajo un reaseguro exceso de pérdida son los obtenidos mediante la expresión

$$Z_{rea_{m+i}} = [\min [Z_{m+i}, L_2] - M] I_B (Z_{m+i}). \quad (4.53)$$

donde  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$ .

Para expresar de una forma más clara la expresión anterior, consideremos los diferentes escenarios que pueden ocurrir en cuanto al conjunto en el que se encuentre la variable del monto del siniestro  $Z_{m+i}$ .

Sean:  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$  y  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ . Los conjuntos de interés para la cedente, en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo, son aquellos en los cuales se encontrará la variable del monto individual de siniestros,  $Z_{m+i}$ , ya que de eso dependerá que el reasegurador participe o no en el pago del siniestro. Por tanto, estará interesado en los conjuntos:

$$\bar{B} = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < M\}, B \cap B' = \{Z_{m+i} : M < Z_{m+i} < L_2\} \text{ y}$$

$$B \cap \bar{B}' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > L_2\}.$$

Con lo anterior, podemos reescribir la expresión (4.53) con el fin de visualizar de forma más clara el monto individual de siniestros retenidos en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo.

$$Z_{rea_{m+i}} = \begin{cases} 0 & Z_{m+i} < M \\ Z_{m+i} - M & M < Z_{m+i} < L_2 \\ L_2 - M & Z_{m+i} > L_2 \end{cases}$$

El monto agregado de siniestros recuperados en este reaseguro se obtiene como la

suma de lo recuperado en cada uno, es decir,

$$X_{rea} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} [\min [Z_{m+i}, L_2] - M] I_B (Z_{m+i}). \quad (4.54)$$

**Definición 4.7.3** (Siniestros retenidos). Para definir el monto individual de siniestros retenidos en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo, consideremos su expresión general, planteada en (4.46). Si, en dicha ecuación, despejamos  $Z_{ret_{m+i}}$ , podemos establecer que

$$Z_{ret_{m+i}} = Z_{m+i} - Z_{rea_{m+i}}.$$

Así, si sustituimos la variable  $Z_{rea_{m+i}}$ , en la igualdad anterior, por su expresión correspondiente (4.53).

Considerando que  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$ , el monto individual de siniestros retenidos por la cedente en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo es:

$$Z_{ret_{m+i}} = Z_{m+i} - [\min [Z_{m+i}, L_2] - M] I_B (Z_{m+i}). \quad (4.55)$$

Como en el caso anterior, reescribimos (4.55) de forma explícita para una mejor visualización de la variable del monto individual de siniestros retenidos en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo.

$$Z_{ret_{m+i}} = \begin{cases} Z_{m+i} & Z_{m+i} < M \\ M & M < Z_{m+i} < L_2 \\ Z_{m+i} - L_2 + M & Z_{m+i} > L_2 \end{cases}$$

Así, en este reaseguro, de acuerdo con (4.48), el monto agregado de los siniestros que la cedente pagará, una vez descontado el reaseguro, será la suma del monto que pague en cada uno de los siniestros retenidos.

$$\begin{aligned}
 X_{ret} &= \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}} \\
 &= \sum_{i=1}^{N_{n+1}} (Z_{m+i} - [\min [Z_{m+i}, L_2] - M] I_B (Z_{m+i}))
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

### En reaseguro stop loss

A diferencia de los dos reaseguros anteriores, en el reaseguro stop loss únicamente tendrá sentido considerar la variable del monto agregado de siniestros, ya que se trata de un contrato que opera sobre ésta.

El monto agregado de siniestros que el reasegurador paga a la cedente en un reaseguro stop loss es

$$X_{rea} = [\min (X, L_3) - d] I_C (X) \tag{4.57}$$

donde  $C = \{X : X > d\}$ .

De acuerdo con (4.57), el monto agregado de siniestros que pagará el reasegurador a la cedente dependerá del valor que tome la variable aleatoria del monto agregado de siniestros,  $X$ .

Si  $C' = \{X : X < L_3\}$ , los conjuntos que interesa a la cedente en este tipo de reaseguro son:

$$\bar{C} = \{X : X < d\}, C \cap C' = \{X : d < X < L_3\} \text{ y } C \cap \bar{C}' = \{X : X > L_3\}$$

Con lo anterior, podemos reescribir la expresión (4.57) como:



$$X_{rea} = \begin{cases} 0 & X < d \\ X - d & d < X < L_3 \\ L_3 - d & X > L_3 \end{cases}$$

**Definición 4.7.4** (Siniestros retenidos). De acuerdo con (4.45)

$$X_{ret} = X - X_{rea}$$

Y, por tanto, en un reaseguro stop loss, el monto agregado de siniestros retenidos por la cedente es:

$$X_{ret} = X - [\min(X, L_3) - d] I_C(X) \quad (4.58)$$

Es decir,

$$X_{ret} = \begin{cases} X & X < d \\ d & d < X < L_3 \\ X - L_3 + d & X > L_3 \end{cases}$$

### Valores esperados de los montos de siniestros recuperados y retenidos

En este apartado se presenta, para cada uno de los seguros analizados, la esperanza de las variables monto de siniestros recuperados y monto de siniestros retenidos.

Al ser, ambas variables, funciones de  $Z_{m+i}$  y  $N_{n+1}$ , las esperanzas se calculan con sus distribuciones predictivas.

**Proposición 4.7.1** (Valor esperado de los montos de siniestros recuperados en un reaseguro cuota parte). *La esperanza del monto individual de siniestros recuperados en un reaseguro cuota parte es:*

$$E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}) = (1 - k) E(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_1 \Pr(\bar{A}) \quad (4.59)$$

donde  $A = \left\{ Z_{m+i} : Z_{m+i} \leq \frac{L_1}{(1-k)} \right\}$ .

*Y la esperanza del monto agregado de siniestros recuperados:*

$$E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \left( (1 - k) E(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_1 \Pr(\bar{A}) \right) \quad (4.60)$$

*Demostración.* De acuerdo con (4.49), el monto individual de siniestros recuperados en un reaseguro cuota parte es:

$$Z_{rea_{m+i}} = \min [(1 - k) Z_{m+i}, L_1].$$

Entonces, si consideramos  $A = \left\{ Z_{m+i} : Z_{m+i} \leq \frac{L_1}{(1-k)} \right\}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}, A) \Pr(A) + E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}, \bar{A}) \Pr(\bar{A}) \\ &= E((1 - k) Z_{m+i} | \mathbf{Z}, A) \Pr(A) + E(L_1 | \mathbf{Z}, \bar{A}) \Pr(\bar{A}) \\ &= (1 - k) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}, A) \Pr(A) + L_1 \Pr(\bar{A}) \\ &= (1 - k) E(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_1 \Pr(\bar{A}) \end{aligned}$$

En lo que respecta al monto agregado de siniestros recuperados, con base en (4.47),

$$X_{rea} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{rea_{m+i}}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}(E(X_{rea} | \mathbf{Z}, N_{n+1})) \\ &= E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}\left(E\left(\sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}\right)\right) \\ &= E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}(N_{n+1}E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z})) \\ &= E(N_{n+1}\mathbf{N})E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Como se ha demostrado:

$$E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}) = (1 - k)E(Z_{m+i}I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_1 \Pr(\bar{A}).$$

Por lo que, finalmente,

$$E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(N_{n+1} | \mathbf{N})((1 - k)E(Z_{m+i}I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_1 \Pr(\bar{A}))$$

□

**Proposición 4.7.2** (Valor esperado de los montos de siniestros retenidos en un reaseguro cuota parte). *En un reaseguro cuota parte, la esperanza del monto individual de siniestros retenidos viene dada por:*

$$E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) = kE(Z_{m+i}I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i}I_{\bar{A}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) - L_1 \Pr(\bar{A}) \quad (4.61)$$

donde  $A = \left\{ Z_{m+i} : Z_{m+i} \leq \frac{L_1}{(1-k)} \right\}$ .

Y el valor esperado del monto agregado de siniestros retenidos es:

$$E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(N_{n+1} | \mathbf{N}) (kE(Z_{m+i}I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i}I_{\bar{A}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z})) - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_1 \Pr(\bar{A}) \quad (4.62)$$

*Demostración.* De acuerdo con (4.51), el monto individual de siniestros retenidos,  $Z_{ret_{m+i}}$ , en un reaseguro cuota parte, se define como:

$$Z_{ret_{m+i}} = \max [kZ_{m+i}, Z_{m+i} - L_1]$$

Sea  $A = \left\{ Z_{m+i} : Z_{m+i} \leq \frac{L_1}{(1-k)} \right\}$ , la esperanza de  $Z_{ret_{m+i}}$  se calcula como:

$$\begin{aligned} E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}, A) \Pr(A) + E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}, \bar{A}) \Pr(\bar{A}) \\ &= E(kZ_{m+i} | \mathbf{Z}, A) \Pr(A) + E(Z_{m+i} - L_1 | \mathbf{Z}, \bar{A}) \Pr(\bar{A}) \\ &= kE(Z_{m+i} | \mathbf{Z}, A) \Pr(A) + E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}, \bar{A}) \Pr(\bar{A}) - L_1 \Pr(\bar{A}) \\ &= kE(Z_{m+i}I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i}I_{\bar{A}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) - L_1 \Pr(\bar{A}) \end{aligned}$$

Por otro lado, de acuerdo con (4.48), el monto agregado de siniestros retenidos es:

$$X_{ret} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E_{N_{n+1} | \mathbf{N}} (E(X_{ret} | \mathbf{Z}, N_{n+1})) \\
&= E_{N_{n+1} | \mathbf{N}} \left( E \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z} \right) \right) \\
&= E_{N_{n+1} | \mathbf{N}} (N_{n+1} E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z})) \\
&= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) \\
&= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) (kE(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i} I_{\bar{A}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z})) + \\
&\quad - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_1 \Pr(\bar{A})
\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.7.3** (Valor esperado de los montos de siniestros recuperados en un reaseguro exceso de pérdida). *La esperanza del monto individual de siniestros recuperados en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo viene dada por:*

$$\begin{aligned}
E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) + \\
&\quad - M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z})
\end{aligned} \tag{4.63}$$

donde  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$  y  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ .

Y la esperanza del monto agregado de siniestros recuperados es:

$$\begin{aligned}
E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) [E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z})] + \\
&\quad - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}).
\end{aligned} \tag{4.64}$$

*Demostración.* De acuerdo con (4.53), el monto individual de siniestros recuperados en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo es:

$$Z_{rea_{m+i}} = [\min [Z_{m+i}, L_2] - M] I_B (Z_{m+i})$$

con  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$ .

Por lo que:

$$\begin{aligned} E (Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E ([\min [Z_{m+i}, L_2] - M] I_B (Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) \\ &= E (Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}, B) \Pr (B) \\ &= E (Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}, B \cap B') \Pr (B) \Pr (B' | B) + \\ &\quad + E (Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}, B \cap \bar{B}') \Pr (B) \Pr (\bar{B}' | B) \end{aligned}$$

donde  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ .

Por ende,  $B \cap B' = \{Z_{m+i} : M < Z_{m+i} < L_2\}$  y  $B \cap \bar{B}' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > L_2\}$ .

Así:

$$\begin{aligned} E (Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E (Z_{m+i} - M | \mathbf{Z}, B \cap B') \Pr (B \cap B') + \\ &\quad + E (L_2 - M | \mathbf{Z}, B \cap \bar{B}') \Pr (B \cap \bar{B}') \\ &= E (Z_{m+i} - M | \mathbf{Z}, B \cap B') \Pr (M < Z_{m+i} < L_2 | \mathbf{Z}) + \\ &\quad + E (L_2 - M | \mathbf{Z}, B \cap \bar{B}') \Pr (Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) \\ &= E (Z_{m+i} | \mathbf{Z}, B \cap B') \Pr (M < Z_{m+i} < L_2 | \mathbf{Z}) + \\ &\quad - M \Pr (M < Z_{m+i} < L_2 | \mathbf{Z}) + \\ &\quad + (L_2 - M) \Pr (Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Simplificando el resultado anterior, se comprueba que:

$$\begin{aligned} E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) + \\ &\quad - M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

Para demostrar (4.64), recordemos que, con base en (4.47),

$$X_{rea} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{rea_{m+i}}.$$

Así:

$$\begin{aligned} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E_{N_{n+1} | \mathbf{N}}(E(X_{rea} | \mathbf{Z}, N_{n+1})) \\ &= E_{N_{n+1} | \mathbf{N}}\left(E\left(\sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}\right)\right) \\ &= E_{N_{n+1} | \mathbf{N}}(N_{n+1} E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z})) \\ &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Como se ha demostrado:

$$\begin{aligned} E(Z_{rea_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) + \\ &\quad - M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Por lo que, finalmente:

$$\begin{aligned} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) [E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z})] + \\ &\quad - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.7.4** (Valor esperado de los montos de siniestros retenidos en un reaseguro exceso de pérdida). *La esperanza del monto individual de siniestros retenidos en un reaseguro exceso de pérdida viene dada por:*

$$\begin{aligned} E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + \\ &+ M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$  y  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ .

Por su parte, la esperanza del monto agregado de siniestros retenidos es:

$$\begin{aligned} E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) [E(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z})] + \\ &+ E(N_{n+1} | \mathbf{N}) [M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z})] \end{aligned} \quad (4.66)$$

*Demostración.* De acuerdo con lo planteado en (4.55), el monto individual de siniestros retenidos por la cedente en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo es:

$$Z_{ret_{m+i}} = Z_{m+i} - [\min[Z_{m+i}, L_2] - M] I_B(Z_{m+i}).$$

con  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$ .

Sea  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ , tenemos:



$$\begin{aligned}
E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}, B) \Pr(B) + E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}, \bar{B}) \Pr(\bar{B}) \\
&= E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}, B \cap B') \Pr(B \cap B') + \\
&\quad + E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}, B \cap \bar{B}') \Pr(B \cap \bar{B}') + \\
&\quad + E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}, \bar{B}) \Pr(\bar{B}) \\
&= E(M | \mathbf{Z}, B \cap B') \Pr(B \cap B') + \\
&\quad + E(Z_{m+i} - L_2 + M | \mathbf{Z}, B \cap \bar{B}') \Pr(B \cap \bar{B}') + \\
&\quad + E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}, \bar{B}) \Pr(\bar{B})
\end{aligned}$$

Como  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$  y  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ , entonces  $B \cap B' = \{Z_{m+i} : M < Z_{m+i} < L_2\}$  y  $B \cap \bar{B}' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > L_2\}$ , y

$$\begin{aligned}
E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= M \Pr(M < Z_{m+i} < L_2 | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}, B \cap \bar{B}') \Pr(B \cap \bar{B}') + \\
&\quad - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) + M \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) + \\
&\quad + E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}, \bar{B}) \Pr(\bar{B}) \\
&= M \Pr(M < Z_{m+i} < L_2 | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + \\
&\quad - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) + M \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) + \\
&\quad + E(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z})
\end{aligned}$$

Simplificando el resultado anterior, queda demostrado que:

$$\begin{aligned}
E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + \\
&\quad + M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z})
\end{aligned}$$

Pasamos a demostrar (4.66). De acuerdo con (4.48), el monto agregado de sinie-tros retenidos se obtiene como:

$$X_{ret} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}}.$$

Por lo que, calculando su esperanza:

$$\begin{aligned} E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E_{N_{n+1} | \mathbf{N}} (E(X_{ret} | \mathbf{Z}, N_{n+1})) \\ &= E_{N_{n+1} | \mathbf{N}} \left( E \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z} \right) \right) \\ &= E_{N_{n+1} | \mathbf{N}} (N_{n+1} E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z})) \\ &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Como ha quedado demostrado:

$$\begin{aligned} E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + \\ &\quad + M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Por lo que, finalmente:

$$\begin{aligned} E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) [E(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z})] + \\ &\quad + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) [M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z})] \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.7.5** (Valor esperado del monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro stop loss). *En un reaseguro stop loss, la esperanza del monto agregado de siniestros recuperados viene dada por:*

$$\begin{aligned}
E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(X I_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad + L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N})
\end{aligned}
\tag{4.67}$$

donde  $C = \{X : X > d\}$  y  $C' = \{X : X < L_3\}$ .

*Demostración.* De acuerdo con (4.57)

$$X_{rea} = [\min(X, L_3) - d] I_C(X)$$

con  $C = \{X : X > d\}$ , es el monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro stop loss.

Así, el valor esperado de  $X_{rea}$  para este reaseguro se obtiene como:

$$E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{rea} | C) \Pr(C) + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{rea} | \bar{C}) \Pr(\bar{C})$$

Si, además, se considera el conjunto  $C' = \{X : X < L_3\}$ .

Y, por consiguiente, los conjuntos  $C \cap C' = \{X : d < X < L_3\}$  y  $C \cap \bar{C}' = \{X : X > L_3\}$ .

$$\begin{aligned}
E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{rea} | C \cap C') \Pr(C \cap C') + \\
&\quad + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{rea} | C \cap \bar{C}') \Pr(C \cap \bar{C}') + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{rea} | \bar{C}) \Pr(\bar{C}) \\
&= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X - d | C \cap C') \Pr(C \cap C') + \\
&\quad + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(L_3 - d | C \cap \bar{C}') \Pr(C \cap \bar{C}') \\
&= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X | C \cap C') \Pr(C \cap C') - d \Pr(d < X < L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad + (L_3 - d | C \cap \bar{C}') \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \\
&= E(XI_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad + L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N})
\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.7.6** (Valor esperado del monto agregado de siniestros retenidos en un reaseguro stop loss). *En un reaseguro stop loss, la esperanza del monto agregado de siniestros retenidos es:*

$$\begin{aligned}
E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + E(XI_{C \cap \bar{C}'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad - L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + E(XI_{\bar{C}}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \\
&= E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - E(XI_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad - L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N})
\end{aligned} \tag{4.68}$$

donde  $C = \{X : X > d\}$  y  $C' = \{X : X < L_3\}$ .

*Demostración.* De acuerdo con (4.58), el monto agregado de siniestros retenidos en un stop loss se define como:

$$X_{ret} = X - [\min(X, L_3) - d] I_C(X)$$

donde  $C = \{X : X > d\}$ . Por tanto, su esperanza se obtiene con base en lo siguiente:

$$E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{ret} | C) \Pr(C) + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{ret} | \bar{C}) \Pr(\bar{C})$$

Sean, además,  $C' = \{X : X < L_3\}$ ,  $C \cap C' = \{X : d < X < L_3\}$  y  $C \cap \bar{C}' = \{X : X > L_3\}$ .

$$\begin{aligned} E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \\ &= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{ret} | C \cap C') \Pr(C \cap C') + \\ &\quad + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{ret} | C \cap \bar{C}') \Pr(C \cap \bar{C}') + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{ret} | \bar{C}) \Pr(\bar{C}) \\ &= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(d | C \cap C') \Pr(C \cap C') + \\ &\quad + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X - L_3 + d | C \cap \bar{C}') \Pr(C \cap \bar{C}') + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X | \bar{C}) \Pr(\bar{C}) \\ &= d \Pr(d < X < L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X | C \cap \bar{C}') \Pr(C \cap \bar{C}') + \\ &\quad - L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + d \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X | \bar{C}) \Pr(\bar{C}) \\ &= d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + E(X I_{C \cap \bar{C}'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\ &\quad + E(X I_{\bar{C}}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \\ &= E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - E(X I_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\ &\quad + d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \end{aligned}$$

□

## Varianza del monto agregado de siniestros retenidos

Como se ha comentado en el apartado 2.2.2, el criterio de minimizar la varianza del monto agregado de los siniestros que la cedente pagará,  $X_{ret}$ , es comúnmente utilizado desde un punto de vista clásico. Aún cuando no sea el criterio que este trabajo considera conveniente utilizar, la cedente, con el fin de comparar con los resultados clásicos del reaseguro óptimo, podría estar interesada en conocer la

varianza del monto agregado de siniestros retenidos obtenida desde un punto de vista bayesiano.

Puesto que  $X_{ret}$  varía dependiendo del contrato de reaseguro, a continuación presentamos las expresiones que se obtienen en cada uno de ellos. Inicialmente, en la proposición 4.7.7, se desarrolla la expresión general de la varianza del monto agregado de siniestros retenidos,  $\text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , cuando el reaseguro opera para cada siniestro, como es el caso del cuota parte y el exceso de pérdida. Posteriormente, tomando en cuenta las características de cada uno de los contratos anteriores, se presenta el caso particular y, finalmente, se aborda el reaseguro stop loss.

**Proposición 4.7.7** (Varianza del monto agregado de siniestros retenidos). *Sea*

$$X_{ret} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}}$$

*el monto agregado de siniestros retenidos por la cedente. La varianza es tal que*

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \text{E}(N_{n+1} | \mathbf{N}) \text{E}_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}}(\text{Var}(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta)) + \\ &+ \text{E}\left((N_{n+1})^2 | \mathbf{N}\right) \text{Var}_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}}(\text{E}(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta)) + \\ &+ \text{Var}(N_{n+1} | \mathbf{N}) \text{E}^2(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) \end{aligned} \quad (4.69)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \\ &= \text{E}_{N_{n+1} | \mathbf{N}}(\text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, N_{n+1})) + \text{Var}_{N_{n+1} | \mathbf{N}}(\text{E}(X_{ret} | \mathbf{Z}, N_{n+1})) \\ &= \text{E}_{N_{n+1} | \mathbf{N}}\left(\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}\right)\right) + \text{Var}_{N_{n+1} | \mathbf{N}}\left(\text{E}\left(\sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}\right)\right) \end{aligned}$$

Donde, por su parte,

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}} \mid \mathbf{Z} \right) &= \\
&= \mathbb{E}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} \left( \text{Var} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}} \mid \alpha, \beta \right) \right) + \text{Var}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} \left( \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{ret_{m+i}} \mid \alpha, \beta \right) \right) \\
&= \mathbb{E}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (N_{n+1} \text{Var} (Z_{ret_{m+i}} \mid \alpha, \beta)) + \text{Var}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (N_{n+1} \mathbb{E} (Z_{ret_{m+i}} \mid \alpha, \beta)) \\
&= N_{n+1} \mathbb{E}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (\text{Var} (Z_{ret_{m+i}} \mid \alpha, \beta)) + (N_{n+1})^2 \text{Var}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (\mathbb{E} (Z_{ret_{m+i}} \mid \alpha, \beta)).
\end{aligned}$$

Por lo que, finalmente:

$$\begin{aligned}
\text{Var} (X_{ret} \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \mathbb{E} (N_{n+1} \mid \mathbf{N}) \mathbb{E}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (\text{Var} (Z_{ret_{m+i}} \mid \alpha, \beta)) + \\
&\quad + \mathbb{E} ((N_{n+1})^2 \mid \mathbf{N}) \text{Var}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (\mathbb{E} (Z_{ret_{m+i}} \mid \alpha, \beta)) + \\
&\quad + \text{Var} (N_{n+1} \mid \mathbf{N}) \mathbb{E}^2 (Z_{ret_{m+i}} \mid \mathbf{Z})
\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.7.8** (Varianza del monto agregado de siniestros retenidos en un reaseguro cuota parte). *La varianza del monto agregado de siniestros retenidos en un reaseguro cuota parte es:*

$$\begin{aligned}
\text{Var} (X_{ret} \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \\
&= \mathbb{E} (N_{n+1} \mid \mathbf{N}) \mathbb{E}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (k^2 \text{Var} (Z_{m+i} I_A (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta) + \text{Var} (Z_{m+i} I_{\bar{A}} (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta)) + \\
&\quad + \mathbb{E} ((N_{n+1})^2 \mid \mathbf{N}) \text{Var}_{\alpha, \beta \mid \mathbf{Z}} (k \mathbb{E} (Z_{m+i} I_A (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta) + \mathbb{E} (Z_{m+i} I_{\bar{A}} (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta) - L_1 \Pr (\bar{A})) \\
&\quad + \text{Var} (N_{n+1} \mid \mathbf{N}) [k \mathbb{E} (Z_{m+i} I_A (Z_{m+i}) \mid \mathbf{Z}) + \mathbb{E} (Z_{m+i} I_{\bar{A}} (Z_{m+i}) \mid \mathbf{Z}) - L_1 \Pr (\bar{A})]^2
\end{aligned} \tag{4.70}$$

donde  $A = \left\{ Z_{m+i} : Z_{m+i} \leq \frac{L_1}{(1-k)} \right\}$ .

*Demostración.* En un reaseguro cuota parte el monto agregado de siniestros retenidos es la suma de los siniestros retenidos individualmente. Por tanto, con base en la proposición 4.7.7, para comprobar (4.70) basta con demostrar que

$$\begin{aligned} \text{Var} (Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) = \\ k^2 \text{Var} (Z_{m+i} I_A (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + \text{Var} (Z_{m+i} I_{\bar{A}} (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (4.71)$$

y

$$\begin{aligned} E (Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) = k E (Z_{m+i} I_A (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + E (Z_{m+i} I_{\bar{A}} (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) - L_1 \Pr (\bar{A}) \end{aligned} \quad (4.72)$$

y, así, sustituir en la expresión (4.69),

$$\begin{aligned} \text{Var} (X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E (N_{n+1} | \mathbf{N}) E_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}} (\text{Var} (Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta)) + \\ + E ((N_{n+1})^2 | \mathbf{N}) \text{Var}_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}} (E (Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta)) + \\ + \text{Var} (N_{n+1} | \mathbf{N}) E^2 (Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}), \end{aligned}$$

tanto estos resultados como el cálculo de  $E (Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z})$  para este reaseguro, presentado en (4.61).

Como se establece en la definición 4.7.2

$$Z_{ret_{m+i}} = \max [k Z_{m+i}, Z_{m+i} - L_1],$$

$$\text{con } A = \left\{ Z_{m+i} : Z_{m+i} \leq \frac{L_1}{(1-k)} \right\},$$



es el monto individual de siniestros retenidos en un reaseguro cuota parte. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \text{Var} (Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) &= \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{ret_{m+i}}) \\
 &= \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{ret_{m+i}} | A) \Pr (A) + \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{ret_{m+i}} | \bar{A}) \Pr (\bar{A}) \\
 &= \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (kZ_{m+i} | A) \Pr (A) + \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} - L_1 | \bar{A}) \Pr (\bar{A}) \\
 &= k^2 \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} | A) \Pr (A) + \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} | \bar{A}) \Pr (\bar{A})
 \end{aligned}$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned}
 \text{Var} (Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) &= k^2 \left[ \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i}^2 | A) \Pr (A) - \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta}^2 (Z_{m+i} | A) \Pr (A) \right] + \\
 &\quad + \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i}^2 | \bar{A}) \Pr (\bar{A}) - \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta}^2 (Z_{m+i} | \bar{A}) \Pr (\bar{A}) \\
 &= k^2 \left[ \text{E} (Z_{m+i}^2 I_A (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) - \text{E}^2 (Z_{m+i} I_A (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) \right] + \\
 &\quad + \text{E} (Z_{m+i}^2 I_{\bar{A}} (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) - \text{E}^2 (Z_{m+i} I_{\bar{A}} (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) \\
 &= k^2 \text{Var} (Z_{m+i} I_A (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + \text{Var} (Z_{m+i} I_{\bar{A}} (Z_{m+i}) | \alpha, \beta)
 \end{aligned}$$

Por su parte,

$$\begin{aligned}
 \text{E} (Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) &= \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{ret_{m+i}} | A) \Pr (A) + \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{ret_{m+i}} | \bar{A}) \Pr (\bar{A}) \\
 &= \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (kZ_{m+i} | A) \Pr (A) + \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} - L_1 | \bar{A}) \Pr (\bar{A}) \\
 &= k \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} | A) \Pr (A) + \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} | \bar{A}) \Pr (\bar{A}) - L_1 \Pr (\bar{A}) \\
 &= k \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} I_A (Z_{m+i})) + \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} I_{\bar{A}} (Z_{m+i})) - L_1 \Pr (\bar{A}) \\
 &= k \text{E} (Z_{m+i} I_A (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + \text{E} (Z_{m+i} I_{\bar{A}} (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) - L_1 \Pr (\bar{A}) .
 \end{aligned}$$

Y, de acuerdo con (4.61),

$$\text{E} (Z_{ret_{m+i}} | \mathcal{Z}) = k \text{E} (Z_{m+i} I_A (Z_{m+i}) | \mathcal{Z}) + \text{E} (Z_{m+i} I_{\bar{A}} (Z_{m+i}) | \mathcal{Z}) - L_1 \Pr (\bar{A}) .$$

Finalmente, sustituyendo en (4.69) los resultados anteriores, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \\
&= \mathbb{E}(N_{n+1} | \mathbf{N}) \mathbb{E}_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}} (k^2 \text{Var}(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + \text{Var}(Z_{m+i} I_{\bar{A}}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta)) + \\
&+ \mathbb{E}((N_{n+1})^2 | \mathbf{N}) \text{Var}_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}} (k \mathbb{E}(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + \mathbb{E}(Z_{m+i} I_{\bar{A}}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) - L_1 \Pr(\bar{A})) \\
&+ \text{Var}(N_{n+1} | \mathbf{N}) [k \mathbb{E}(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + \mathbb{E}(Z_{m+i} I_{\bar{A}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) - L_1 \Pr(\bar{A})]^2
\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.7.9** (Varianza del monto agregado de siniestros retenidos en un reaseguro exceso de pérdida). *La varianza del monto agregado de siniestros retenidos en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo resulta:*

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \\
&\mathbb{E}_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}} [\text{Var}(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + \text{Var}(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z})] \mathbb{E}(N_{n+1} | \mathbf{N}) + \\
&+ \mathbb{E}((N_{n+1})^2 | \mathbf{N}) \text{Var}_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}} (\mathbb{E}(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta)) + \text{Var}(N_{n+1} | \mathbf{N}) [\mathbb{E}(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z})]^2
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Donde,

$$B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\} \text{ y } B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\},$$

$$\text{Var}(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) = \mathbb{E}(Z_{m+i}^2 I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) - \mathbb{E}^2(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta),$$

$$\text{Var}(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) = \mathbb{E}(Z_{m+i}^2 I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) - \mathbb{E}^2(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) &= \mathbb{E}(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + \mathbb{E}(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + \\
&+ M \Pr(Z_{m+i} > M | \alpha, \beta) - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \alpha, \beta)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + \\ &+ M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

*Demostración.* El reaseguro exceso de pérdida por riesgo opera para cada siniestro. Por tanto, basaremos la demostración en la proposición 4.7.7 donde se establece la expresión para el cálculo varianza del monto agregado de siniestros retenidos en este tipo de reaseguros. Así, de acuerdo con (4.69),

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}}(\text{Var}(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta)) + \\ &+ E((N_{n+1})^2 | \mathbf{N}) \text{Var}_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}}(E(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta)) + \\ &+ \text{Var}(N_{n+1} | \mathbf{N}) E^2(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

En la expresión anterior,

$$Z_{ret_{m+i}} = Z_{m+i} - [\min[Z_{m+i}, L_2] - M] I_B(Z_{m+i}),$$

con  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$ , es el monto individual de siniestros retenidos en un reaseguro exceso de pérdida. Por lo que:

$$\begin{aligned}
\text{Var} (Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) &= \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{ret_{m+i}}) \\
&= \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{ret_{m+i}} | B) \Pr (B) + \\
&\quad + \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{ret_{m+i}} | \overline{B}) \Pr (\overline{B}) \\
&= \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{ret_{m+i}} | B \cap B') \Pr (B \cap B') + \\
&\quad + \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{ret_{m+i}} | B \cap \overline{B}') \Pr (B \cap \overline{B}') + \\
&\quad + \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{ret_{m+i}} | \overline{B}) \Pr (\overline{B})
\end{aligned}$$

donde  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ . Y, por tanto,

$B \cap B' = \{Z_{m+i} : M < Z_{m+i} < L_2\}$  y  $B \cap \overline{B}' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > L_2\}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
\text{Var} (Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) &= \\
&= \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (M | B \cap B') \Pr (B \cap B') + \\
&\quad + \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} - L_2 + M | B \cap \overline{B}') \Pr (B \cap \overline{B}') + \\
&\quad + \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} | \overline{B}) \Pr (\overline{B}) \\
&= \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} | B \cap \overline{B}') \Pr (B \cap \overline{B}') + \text{Var}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i} | \overline{B}) \Pr (\overline{B}) \\
&= \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i}^2 | B \cap \overline{B}') \Pr (B \cap \overline{B}') + \\
&\quad - \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta}^2 (Z_{m+i} | B \cap \overline{B}') \Pr (B \cap \overline{B}') + \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta} (Z_{m+i}^2 | \overline{B}) \Pr (\overline{B}) + \\
&\quad - \text{E}_{Z_{m+i}|\alpha,\beta}^2 (Z_{m+i} | \overline{B}) \Pr (\overline{B}) \\
&= \text{E} (Z_{m+i}^2 I_{B \cap \overline{B}'} (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) - \text{E}^2 (Z_{m+i} I_{B \cap \overline{B}'} (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) \\
&\quad + \text{E} (Z_{m+i}^2 I_{\overline{B}} (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) - \text{E}^2 (Z_{m+i} I_{\overline{B}} (Z_{m+i}) | \alpha, \beta) .
\end{aligned}$$

Sean

$$\text{Var} (Z_{m+i} I_{B \cap \overline{B}'} (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta) = \text{E} (Z_{m+i}^2 I_{B \cap \overline{B}'} (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta) - \text{E}^2 (Z_{m+i} I_{B \cap \overline{B}'} (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta)$$

$$\text{Var} (Z_{m+i} I_{\overline{B}} (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta) = \text{E} (Z_{m+i}^2 I_{\overline{B}} (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta) - \text{E}^2 (Z_{m+i} I_{\overline{B}} (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta)$$

Podemos reescribir:

$$\text{Var} (Z_{ret_{m+i}} \mid \alpha, \beta) = \text{Var} (Z_{m+i} I_{B \cap \overline{B}'} (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta) + \text{Var} (Z_{m+i} I_{\overline{B}} (Z_{m+i}) \mid \alpha, \beta).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{E} (Z_{ret_{m+i}} \mid \alpha, \beta) &= \\ &= \text{E}_{Z_{m+i} \mid \alpha, \beta} (Z_{ret_{m+i}} \mid B) \text{Pr} (B) + \text{E}_{Z_{m+i} \mid \alpha, \beta} (Z_{ret_{m+i}} \mid \overline{B}) \text{Pr} (\overline{B}) \\ &= \text{E}_{Z_{m+i} \mid \alpha, \beta} (Z_{ret_{m+i}} \mid B \cap B') \text{Pr} (B \cap B') + \\ &\quad + \text{E}_{Z_{m+i} \mid \alpha, \beta} (Z_{ret_{m+i}} \mid B \cap \overline{B}') \text{Pr} (B \cap \overline{B}') + \text{E}_{Z_{m+i} \mid \alpha, \beta} (Z_{ret_{m+i}} \mid \overline{B}) \text{Pr} (\overline{B}) \\ &= \text{E}_{Z_{m+i} \mid \alpha, \beta} (M \mid B \cap B') \text{Pr} (B \cap B') + \\ &\quad + \text{E}_{Z_{m+i} \mid \alpha, \beta} (Z_{m+i} - L_2 + M \mid B \cap \overline{B}') \text{Pr} (B \cap \overline{B}') + \\ &\quad + \text{E}_{Z_{m+i} \mid \alpha, \beta} (Z_{m+i} \mid \overline{B}) \text{Pr} (\overline{B}) \end{aligned}$$

Como  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$  y  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ , entonces

$B \cap B' = \{Z_{m+i} : M < Z_{m+i} < L_2\}$  y  $B \cap \overline{B}' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > L_2\}$ , así

$$\begin{aligned}
E(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) &= \\
&= M \Pr(M < Z_{m+i} < L_2 | \alpha, \beta) + \\
&\quad + E_{Z_{m+i} | \alpha, \beta} (Z_{m+i} | B \cap \bar{B}') \Pr(B \cap \bar{B}') - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \alpha, \beta) + \\
&\quad + M \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \alpha, \beta) + E_{Z_{m+i} | \alpha, \beta} (Z_{m+i} | \bar{B}) \Pr(\bar{B}) \\
&= M \Pr(M < Z_{m+i} < L_2 | \alpha, \beta) + E(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + \\
&\quad - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \alpha, \beta) + M \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \alpha, \beta) + \\
&\quad + E(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta)
\end{aligned}$$

Simplificando el resultado anterior, queda demostrado que:

$$\begin{aligned}
E(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) &= E(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + E(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + \\
&\quad + M \Pr(Z_{m+i} > M | \alpha, \beta) - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \alpha, \beta)
\end{aligned}$$

De acuerdo con (4.69), tenemos:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}} (\text{Var}(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta)) + \\
&\quad + E((N_{n+1})^2 | \mathbf{N}) \text{Var}_{\alpha, \beta | \mathbf{Z}} (E(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta)) + \\
&\quad + \text{Var}(N_{n+1} | \mathbf{N}) E^2(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z})
\end{aligned}$$

donde, con base en lo anterior:

$$\text{Var}(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) = \text{Var}(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + \text{Var}(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta),$$

$$\begin{aligned} E(Z_{ret_{m+i}} | \alpha, \beta) &= E(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + E(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \alpha, \beta) + \\ &+ M \Pr(Z_{m+i} > M | \alpha, \beta) - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \alpha, \beta) \end{aligned}$$

y, de acuerdo con (4.65),

$$\begin{aligned} E(Z_{ret_{m+i}} | \mathbf{Z}) &= E(Z_{m+i} I_{B \cap \bar{B}'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(Z_{m+i} I_{\bar{B}}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + \\ &+ M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) - L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.7.10** (Varianza del monto agregado de siniestros retenidos,  $X_{ret}$ , en un reaseguro stop loss). *En un reaseguro stop loss,*

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(X^2 I_{C \cap \bar{C}'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - E^2(X I_{C \cap \bar{C}'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\ &+ E(X^2 I_{\bar{C}}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - E^2(X I_{\bar{C}}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \quad (4.74) \end{aligned}$$

donde  $C = \{X : X > d\}$  y  $C' = \{X : X < L_3\}$ .

*Demostración.* Sea

$$X_{ret} = X - [\min(X, L_3) - d] I_C(X)$$

con  $C = \{X : X > d\}$ , el monto agregado de siniestros retenidos en un reaseguro stop loss.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \text{Var}_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{ret} | C) \Pr(C) + \text{Var}_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{ret} | \bar{C}) \Pr(\bar{C}) \\
&= \text{Var}_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{ret} | C \cap C') \Pr(C \cap C') + \\
&\quad + \text{Var}_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{ret} | C \cap \bar{C}') \Pr(C \cap \bar{C}') + \\
&\quad + \text{Var}_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{ret} | \bar{C}) \Pr(\bar{C})
\end{aligned}$$

donde  $C' = \{X : X < L_3\}$  y, por tanto,

$C \cap C' = \{X : d < X < L_3\}$  y  $C \cap \bar{C}' = \{X : X > L_3\}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \text{Var}_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(d | C \cap C') \Pr(C \cap C') + \\
&\quad + \text{Var}_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X - L_3 + d | C \cap \bar{C}') \Pr(C \cap \bar{C}') + \\
&\quad + \text{Var}_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X | \bar{C}) \Pr(\bar{C}) \\
&= \text{Var}_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X | C \cap \bar{C}') \Pr(C \cap \bar{C}') + \text{Var}_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X | \bar{C}) \Pr(\bar{C})
\end{aligned}$$

Y, finalmente:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \text{E}(X^2 I_{C \cap \bar{C}'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - \text{E}^2(X I_{C \cap \bar{C}'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad + \text{E}(X^2 I_{\bar{C}}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - \text{E}^2(X I_{\bar{C}}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N})
\end{aligned}$$

□

## 4.8. Tarificación en Reaseguro: Primas

El problema de reaseguro óptimo tal como lo hemos planteado, involucra la determinación de la prima que la cedente cobra a sus asegurados, así como la prima de reaseguro que se cobrará en el contrato. En ambos casos, se busca que las primas sean suficientes para cubrir los siniestros que se presenten en el portafolio.



Un principio de cálculo de prima es una regla que asigna una prima a un riesgo asegurado. Puesto que las primas que resultan de interés en el análisis del reaseguro son las que se cobrarán por todo el portafolio y no de forma individual, el riesgo asegurado será el total de los siniestros que se pagará en el portafolio. Es decir, a la cedente le interesa, por un lado, la distribución de la variable aleatoria del monto agregado de siniestros  $X$  para determinar el valor de  $P$ , mientras que le interesará la distribución del monto agregado de siniestros recuperados  $X_{rea}$  cuando se trate de determinar  $PR$ .

Existen diversos principios de cálculo de primas, los más comunes se pueden encontrar en Kaas *et al.* (2001). La mayoría de ellos se derivan suponiendo un comportamiento de la cedente frente al riesgo a través de funciones de utilidad. Un método comúnmente utilizado para calcular primas es el principio de utilidad equivalente o *zero utility* (Bühlmann, 1970). Consiste en encontrar aquella  $P$  que haga que la utilidad de la cedente si rechaza la operación sea igual a la utilidad esperada después de aceptar la póliza. Es decir,

$$u(y) = E[u(y + P - X)] \quad (4.75)$$

donde  $y$  es el capital inicial.

Por su parte, la prima de reaseguro,  $PR$ , algunas veces se determina por la propia naturaleza del contrato de reaseguro, como es el caso del **reaseguro cuota parte** en el que tanto primas como siniestros se reparten de forma proporcional, en cuyo caso hemos considerado, de acuerdo con (1.1),

$$PR = (1 - k) P.$$

El valor de  $PR$  siempre está relacionado con el valor que tenga  $P$ . En general es posible establecer que

$$PR \leq P.$$

Como se ha mencionado, el cálculo de la prima,  $P$ , es un problema previo a la decisión del reaseguro óptimo y por tanto marginal a nuestro análisis. Sin embargo, consideramos conveniente ahondar en este tema ya que, como veremos más adelante, el reaseguro óptimo dependerá del valor de  $P$  y  $PR$ .

Con el fin de apreciar el efecto que tiene el principio de cálculo de la prima de reaseguro en el reaseguro óptimo, hemos considerado diversos criterios para el cálculo de  $PR$ , los cuales se exponen más adelante.

La metodología que hemos utilizado para el cálculo de la prima del portafolio de riesgo,  $P$ , es la conocida como el principio del valor esperado. Que es el criterio de elección en seguros cuando se trata de riesgos homogéneos.

### 4.8.1. Principios de determinación de la prima

#### Principio del valor esperado

Este principio consiste, desde un punto de vista bayesiano, en calcular la prima como el valor esperado de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recargado por un margen de seguridad  $w \geq 0$ .

$$P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})(1 + w) \quad (4.76)$$

Partimos del hecho de que la base de la tarificación en seguros es el contar con un grupo suficientemente grande de asegurados, que se encuentran expuestos al mismo tipo de riesgo, pero que son afectados por siniestros individualmente. De acuerdo con la Ley de los Grandes Numeros, es de esperar que cuanto mayor sea el grupo, más se acercará el siniestro individual medio a un valor concreto. Por

ello, se considera razonable la nivelación del riesgo al cobrar la prima, esto es, elegir

$$P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$$

como prima de riesgo.

Sin embargo, con el fin de prevenir posibles variaciones en la siniestralidad que pudieran ocasionar una pérdida importante en cuanto a su solvencia, el asegurador realiza un recargo  $w$  a la prima de riesgo, tal como se presenta en (4.76).

Este margen de seguridad lo calculamos como aquel que, con una probabilidad  $\rho_1$  la prima de riesgo recargada por este margen sea suficiente para cubrir los montos de los siniestros que se presenten durante el período de vigencia de la póliza. Es decir, se busca  $w$  tal que,

$$P[X \leq E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})(1 + w)] = \rho_1.$$

De donde se obtiene que:

$$X_{\rho_1} = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})(1 + w)$$

donde  $X_{\rho_1}$  es el cuantil  $\rho_1$  de la distribución del monto agregado de siniestros.

Finalmente, sustituyendo este último resultado en (4.76), se obtiene que la prima del portafolio de riesgo se calcula como el cuantil  $\rho_1$  de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros.

$$P = X_{\rho_1} \tag{4.77}$$

Con esto se está planteando que se cobrará como prima una cantidad que, con cierto nivel de seguridad ( $\rho_1$ ), garantice que se podrá cubrir el monto acumulado

de los siniestros totales. Un asegurador busca que ese nivel de seguridad sea alto, es decir, que elegirá un valor elevado para  $\rho_1$ .

Un caso particular del principio del valor esperado será cuando  $P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ . Esto, de acuerdo con (4.76) equivale a no considerar un margen de seguridad en el cálculo de la prima, es decir,  $w = 0$ . Dicha selección de  $P$  corresponde a la versión bayesiana de la prima pura de riesgo, de la que hablamos en la revisión bibliográfica (apartado 3.1.1). De hecho, esta prima se obtiene considerando el principio de utilidad equivalente (4.75) y suponiendo una función de utilidad lineal (Kaas *et al.*, 2001). Con base en el teorema central del límite, es de esperarse que la distribución predictiva del monto agregado de siniestros,

$$X = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i},$$

sea simétrica. En tal caso,  $P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$  es equivalente a considerar como prima el cuantil  $\rho_1 = 0,50$  que es la mediana de la distribución. Dicha elección corresponde a una actitud de neutralidad al riesgo ya que es igualmente probable que la prima sea suficiente o no para pagar el monto total de siniestros en el portafolio.

Como se demuestra a continuación, elegir como prima un cuantil de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros es equivalente a reflejar mediante una función de utilidad la aversión al riesgo por parte de la compañía. Así, el principio del valor esperado se puede interpretar desde el punto de vista de la teoría de la decisión al considerar la función de utilidad (3.5),

$$u(P, X) = (P - X) (b_1 I_{(-\infty, X)}(P) - b_2 (1 - I_{(-\infty, X)}(P)))$$

con  $b_1$  y  $b_2$  constantes positivas.

Como se ha comentado en el apartado 3.1.3, la función de utilidad anterior es empleada por Migon y Moura (2005) para el cálculo de la prima. Sin embargo, en

su documento, ésta no establece ninguna restricción en cuanto a los valores de  $b_1$  y  $b_2$ . Consideramos que la cedente tendrá una mayor utilidad cuando  $X \leq P$ , lo cual supone  $b_1 > b_2$ .

La siguiente proposición enuncia cómo puede obtenerse el principio del valor esperado desde el punto de vista de la teoría de la decisión.

**Proposición 4.8.1.** *La elección de la prima,  $P$ , según el principio del valor esperado es equivalente a elegir  $P$  que maximice la utilidad esperada cuando*

$$u(P, X) = (P - X) (b_1 I_{(-\infty, X)}(P) - b_2 (1 - I_{(-\infty, X)}(P))) \quad (4.78)$$

con  $\rho_1 = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$ ,  $b_1 > 0$  y  $b_2 > 0$ .

*Demostración.* Consideremos una situación en que la cedente dispone de una cartera de contratos sobre un colectivo. Teniendo en cuenta toda la información disponible sobre su cartera, la cedente deberá decidir el monto de prima,  $P$ , que cobrará a sus asegurados.

El problema de determinar  $P$  es un problema de decisión cuyos elementos básicos son:

- Espacio de acciones  $A = \{a_P = \text{"elegir la prima } P\}$
- Espacio de sucesos inciertos:  $S = \{(I_{j1}, I_{j2}, \dots, I_{jR}) = \text{"La información proporcionada por las } R \text{ pólizas en el portafolio } n + 1, \text{ de las cuales hay } N_{n+1} \text{ que presentan siniestro, cuyo monto total es } X. \text{ Y hay } R - N_{n+1} \text{ que no resultan siniestradas, cuyo monto equivale a cero"}\}$
- Función de utilidad:  $U[a_P, (I_{j1}, I_{j2}, \dots, I_{jR})] = u(P, X)$ .

Como se define en (4.78).

$$u(P, X) = (P - X) (b_1 I_{(-\infty, X)}(P) - b_2 (1 - I_{(-\infty, X)}(P)))$$

donde  $b_1$  y  $b_2$  son constantes positivas y  $I_A(x) = 1$  si  $x \in A$ , y  $I_A(x) = 0$  en otro caso.

La acción bayes es la  $a_P$  que maximiza  $E_X(u(P, X))$  que viene dada por:

$$\begin{aligned}
 E_X(u(P, X)) &= E((P - X)(b_1 I_{(-\infty, X)}(P) - b_2(1 - I_{(-\infty, X)}(P)))) \\
 &= Pb_1 E(I_{(-\infty, X)}(P)) - Pb_2 E(1 - I_{(-\infty, X)}(P)) - b_1 E(XI_{(-\infty, X)}(P)) + \\
 &\quad + b_2 E(X) - b_2 E(XI_{(-\infty, X)}(P)) \\
 &= Pb_1 P(X \geq P) - Pb_2 P(X \leq P) - b_1 E(XI_{(-\infty, X)}(P)) + \\
 &\quad + b_2 E(X) - b_2 E(XI_{(-\infty, X)}(P))
 \end{aligned}$$

Derivando respecto de  $P$  e igualando a cero,

$$b_1 P(X \geq P) = b_2 P(X \leq P)$$

De aquí resulta que:

$$P(X \leq P) = \frac{b_1}{b_1 + b_2} \quad y \quad P(X \geq P) = \frac{b_2}{b_1 + b_2}$$

Como es fácil comprobar, se trata de un máximo, puesto que la segunda derivada es

$$-b_1 P(P) - b_2 P(P) < 0$$

Por tanto, la decisión óptima para la cedente es elegir la prima  $P$  que cumple:

$$P(X \leq P) = \frac{b_1}{b_1 + b_2} \quad y \quad P(X \geq P) = \frac{b_2}{b_1 + b_2}$$

Es decir, el valor de  $P$  óptimo es el cuantil  $\frac{b_1}{b_1+b_2}$  de la distribución del monto agregado de siniestros.

□

## Principio de utilidad exponencial

De acuerdo con Gómez (2000) "la función de utilidad exponencial es una buena elección para tarificación en seguros". En dicha función, presentada en (5.6) como

$$u(y) = \frac{1}{a} (1 - \exp(-ay)) \quad a > 0 \quad (4.79)$$

$a$  mide la aversión al riesgo de la compañía e  $y$  su riqueza o beneficio.

Gómez (2000) y Gerber y Pafumi (1998) calculan  $P$  a partir del principio de utilidad equivalente donde, como se ha definido en (4.75), la utilidad esperada se iguala antes y después del seguro,

$$u(y) = E[u(y + P - X)]. \quad (4.80)$$

Obteniendo como prima:

$$P = \frac{1}{a} \log E[\exp(aX) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}].$$

### 4.8.2. Determinación de la prima de reaseguro

En lo referente a la prima de reaseguro,  $PR$ , podemos afirmar que en la mayoría de los contratos no existe un método para su cálculo. Típicamente, la prima se

establece mediante el análisis del comportamiento en siniestralidad de la cartera que se reasegura. Independientemente del contrato que se trate y del principio del cálculo elegido, el valor de la prima de reaseguro tendrá una relación inversa con el límite de retención. Es decir, la prima de reaseguro,  $PR$ , será menor cuanto mayor sea el límite de retención de la cedente ( $k$ ,  $M$  ó  $d$ ) y viceversa. Esto se explica por el hecho de que, si la cedente decide retener un monto mayor de siniestros, será necesario que también retenga una cantidad mayor de prima para hacerle frente. En caso contrario, con una retención menor, será el reasegurador quien requiera una cesión de prima mayor para pagar su participación en los montos de siniestros. En cuanto a los reaseguros no proporcionales (**exceso de pérdida por riesgo y stop loss**) no existe una única metodología de cálculo para la prima de reaseguro. A tal efecto, consideramos conveniente utilizar el principio del valor esperado (definido en el apartado 4.8.1). Bajo los mismos argumentos expuestos arriba:

$$PR = X_{rea\rho_2} \quad (4.81)$$

Esta elección de prima de reaseguro garantiza, al reasegurador, que la cantidad que cobrará por el contrato será suficiente, con probabilidad  $\rho_2$ , para cubrir los siniestros que éste pagará a la cedente,  $X_{rea}$ .

Con el fin de apreciar la influencia que tiene el valor de  $PR$  en la decisión del reaseguro óptimo hemos considerado otra metodología comúnmente utilizada en el cálculo de la prima que cobra la cedente a sus asegurados.

### **Principio de utilidad exponencial**

Trasladando al reaseguro la idea del principio de utilidad equivalente presentada en la expresión (4.80). Si la cedente rechaza la operación obtendrá como beneficio  $P - X$ , mientras que, aceptando el reaseguro, su ganancia se verá afectada tanto por la prima que pagará al reasegurador como por los siniestros de los que él se



hará cargo, obteniendo así como ganancia la presentada en (2.3). Con base en esto y en (4.80), como una metodología alternativa consideraremos como prima de reaseguro,  $PR$ , aquella que iguale las siguientes utilidades esperadas:

$$E_{X|Z,N} [u (P - X)] = E_{X|Z,N} [u (P - X - PR + X_{rea})] \quad (4.82)$$

**Proposición 4.8.2.** *La prima de retención,  $PR$ , que se obtiene bajo (4.82) considerando como función de utilidad una exponencial, como se define en (4.79) es:*

$$PR = \frac{1}{a} \log \frac{E [\exp (aX) | Z, N]}{E [\exp (aX_{ret}) | Z, N]} \quad (4.83)$$

donde  $X_{ret} = X - X_{rea}$ .

*Demostración.* Encontrar  $PR$  que cumpla (4.82),

$$E_{X|Z,N} [u (P - X)] = E_{X|Z,N} [u (P - X - PR + X_{rea})],$$

suponiendo una función de utilidad exponencial, equivale a encontrar  $PR$  tal que:

$$E_{X|Z,N} \left( \frac{1}{a} [1 - \exp (-a (P - X))] \right) = E_{X|Z,N} \left( \frac{1}{a} [1 - \exp (-a (P - X - PR + X_{rea}))] \right)$$

Simplificando las constantes involucradas, la igualdad anterior se puede escribir como:

$$E_{X|Z,N} [\exp (aX)] = \exp (aPR) E_{X|Z,N} [\exp (a (X - X_{rea}))].$$

Finalmente, considerando que  $X_{ret} = X - X_{rea}$  y despejando  $PR$ ,

$$PR = \frac{1}{a} \log \frac{E[\exp(aX) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]}{E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]}$$

□

### Aproximación para el cálculo de la prima de reaseguro con función de utilidad exponencial

Observar que, el cálculo de la prima de reaseguro mediante el criterio (4.83) involucra la determinación de la función generadora de momentos de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros,

$$E[\exp(aX) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}], \quad (4.84)$$

y la del monto total que pagará la cedente

$$E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]. \quad (4.85)$$

Como se ha visto en el apartado 4.7.1, no existe una forma cerrada para la función de densidad predictiva del monto agregado de siniestros  $p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ . Por tanto, no es posible obtener, de forma analítica, (4.84) y (4.85). Sin embargo, podemos aproximarla con base en lo siguiente.

Sea

$$\exp(aX) = 1 + aX + \frac{a^2 X^2}{2!} + \frac{a^3 X^3}{3!} + \frac{a^4 X^4}{4!} + \dots + \frac{a^r X^r}{r!} + \dots$$

Si reemplazamos, en (4.84), la función exponencial por su expansión en serie de potencias hasta el grado 2 obtenemos una aproximación a la función generadora

del monto agregado de siniestros como sigue:

$$\begin{aligned} E[\exp(aX) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}] &= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}} \left( 1 + aX + \frac{a^2 X^2}{2!} \right) \\ &= 1 + aE(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2} E(X^2 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Mediante un procedimiento análogo y sustituyendo

$$\exp(aX_{ret}) = 1 + aX_{ret} + \frac{a^2 X_{ret}^2}{2!} + \frac{a^3 X_{ret}^3}{3!} + \frac{a^4 X_{ret}^4}{4!} + \dots + \frac{a^r X_{ret}^r}{r!} + \dots$$

hasta el grado 2 en (4.85) se obtiene como aproximación:

$$\begin{aligned} E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}] &= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}} \left( 1 + aX_{ret} + \frac{a^2 X_{ret}^2}{2!} \right) \\ &= 1 + aE(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2} E(X_{ret}^2 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Finalmente, sustituyendo (4.86) y (4.87) en (4.83) es posible calcular la prima de reaseguro bajo el principio de utilidad exponencial como:

$$PR = \frac{1}{a} \log \frac{1 + aE(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2} E(X^2 | \mathbf{Z}, \mathbf{N})}{1 + aE(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2} E(X_{ret}^2 | \mathbf{Z}, \mathbf{N})} \quad (4.88)$$

La prima de reaseguro propuesta en (4.88) variará en cada tipo de reaseguro con base en el primer y segundo momento de la variable aleatoria monto agregado de los siniestros retenidos  $X_{ret}$ .

De acuerdo con lo anterior, (4.88) dependerá de la retención elegida ( $\xi$ ) y del límite máximo de responsabilidad,  $L_i$  con  $i = 2, 3$ , establecido en el contrato

de reaseguro. Lo mismo ocurre en el criterio de cálculo de primas de reaseguro propuesto anteriormente en (4.81) ya que el monto de siniestros que paga el reasegurador,  $X_{rea}$ , varía en función de los mismos elementos.

Tanto la aversión al riesgo,  $a$ , como los momentos de la variable aleatoria  $X$  no dependen del tipo de reaseguro. El monto total de los siniestros reales de la cedente,  $X$ , dependerá de la siniestralidad del propio portafolio mientras que el valor de  $a$  reflejará el comportamiento de la cedente frente al riesgo.

# Capítulo 5

## Reaseguro Óptimo

Con base en lo planteado en los capítulos anteriores, a continuación se realiza el análisis de los tres problemas de decisión básicos incluidos en el problema de selección del reaseguro. Esto es, se caracteriza las condiciones óptimas de cada uno de los tres tipos de contrato de reaseguro considerados: cuota parte, exceso de pérdida por riesgo y stop loss.

### 5.1. Determinación de la proporción $k$ óptima para un reaseguro cuota parte

En un reaseguro cuota parte para el portafolio  $(n + 1)$ , la cedente debe determinar la proporción,  $k$ , que retendrá en cada siniestro. Recordemos que en este contrato, de acuerdo con (4.49), la cantidad que el reasegurador pagará en cada siniestro es:

$$Z_{rea_{m+i}} = \min [(1 - k)Z_{m+i}, L_1] \quad \forall Z_{m+i}, i = 1, 2, \dots, N_{n+1}.$$

siendo  $L_1$  el límite máximo de responsabilidad estipulado en el contrato.

Con base en el planteamiento del problema (apartado 4.1), el objetivo de la cedente en un reaseguro cuota parte es maximizar la ganancia, que viene dada por:

$$G = kP - \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} + \sum_{i=1}^{N_{n+1}} \min [(1 - k) Z_{m+i}, L_1] \quad (5.1)$$

Claramente, la ganancia depende de la proporción  $k$  elegida por la cedente ( $a_k$ ) y del monto global de los siniestros a través de  $N_{n+1}$  y  $Z_{m+i}$ . Al ser estos últimos variables aleatorias, al analizar el problema, la cedente no puede cuantificar el valor de  $G$  exacto que le proporcionará la elección de  $a_k$  (para cada  $k \in [0, 1]$ ), sino que evalúa cada elección mediante la ganancia esperada, obtenida mediante las distribuciones predictivas de  $N_{n+1}$  y  $Z_{m+i}$ .

Así, la acción bayes será la  $a_k^*$  que maximice  $E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|Z} (G)$ .

Como la proporción retenida por la cedente,  $k$ , la representamos por un valor del intervalo  $[0, 1]$ , el objetivo de la cedente es determinar el valor, en ese intervalo, que maximiza la expresión anterior.

**Proposición 5.1.1.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de reaseguro cuota parte, la ganancia esperada  $E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|Z} (G)$  viene dada por:*

$$kP - E(N_{n+1} | N) E(Z_{m+i} | Z) + (1 - k) E(N_{n+1} | N) E(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | Z) + E(N_{n+1} | N) L_1 \Pr(\bar{A}) \quad (5.2)$$

donde,  $A = \left\{ Z_{m+i} : Z_{m+i} \leq \frac{L_1}{(1-k)} \right\}$ .

*Demostración.* Sea  $G$  dada por (5.1)

$$\begin{aligned}
E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) &= E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}} \left( kP - \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} + \sum_{i=1}^{N_{n+1}} \min[(1-k)Z_{m+i}, L_1] \right) \\
&= E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} \left( kP - E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} \right) + \right. \\
&\quad \left. + E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} \min[(1-k)Z_{m+i}, L_1] \right) \right) \\
&= E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} \left( kP - N_{n+1} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{m+i}) + \right. \\
&\quad \left. + N_{n+1} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(\min[(1-k)Z_{m+i}, L_1]) \right) \\
&= kP - E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}(N_{n+1}) E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{m+i}) + \\
&\quad + E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}(N_{n+1}) E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(\min[(1-k)Z_{m+i}, L_1]) \\
&= kP - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) + \\
&\quad + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(\min[(1-k)Z_{m+i}, L_1])
\end{aligned}$$

Sean  $A = \left\{ Z_{m+i} : Z_{m+i} \leq \frac{L_1}{(1-k)} \right\}$ , y  $Z_{rea_{m+i}} = \min[(1-k)Z_{m+i}, L_1]$

$$\begin{aligned}
E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{rea_{m+i}}) &= E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{rea_{m+i}} | A) \Pr(A) + E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{rea_{m+i}} | \bar{A}) \Pr(\bar{A}) \\
&= E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}((1-k)Z_{m+i} | A) \Pr(A) + E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(L_1 | \bar{A}) \Pr(\bar{A}) \\
&= (1-k) E_{Z_{m+i}|\mathbf{Z}}(Z_{m+i} | A) \Pr(A) + L_1 \Pr(\bar{A}) \\
&= (1-k) E_{Z_{m+i}|\mathbf{Z}}(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i})) + L_1 \Pr(\bar{A}) \\
&= (1-k) E(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_1 \Pr(\bar{A})
\end{aligned}$$

Donde,

$$E(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) = \int_A z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i}$$

Finalmente, la expresión que resulta para  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$  es:

$$kP - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) + (1 - k) E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_1 \Pr(\bar{A})$$

□

Una vez obtenida la expresión de la ganancia esperada, podemos encontrar la solución al problema, es decir la proporción  $k$  que maximiza la ganancia esperada de la cedente.

**Proposición 5.1.2.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de reaseguro cuota parte, en el que*

*i. El límite máximo de responsabilidad estipulado por el reasegurador,  $L_1$ , es superior o igual al monto máximo por siniestro de las pólizas que componen el portafolio,  $Z_{max}$ , la proporción óptima a retener por la cedente,  $k^*$ , viene dada por:*

- a. Si  $P > E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,  $k^* = 1$ .*
- b. Si  $P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,  $k^* = k$ ,  $\forall k \in [0, 1]$ .*
- c. Si  $P < E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,  $k^* = 0$ .*

*ii. El límite máximo de responsabilidad estipulado por el reasegurador,  $L_1$ , es inferior al monto máximo por siniestro de las pólizas que componen el portafolio,  $Z_{max}$ , la proporción óptima a retener por la cedente viene dada por:*

- a. Si  $P > E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,  $k^* = 1$ .*
- b. Si  $P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,  $k^* = k$ ,  $\forall k \in [k_0, 1]$ , con*

$$k_0 = \min \left\{ k : F_{Z_{m+i}} \left( \frac{L_1}{1 - k} \right) = 1 \right\}.$$



c. Si  $P < E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , entonces

1. Si

$$P < E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{L_1} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i},$$

$$k^* = 0.$$

2. Si

$$E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{L_1} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} < P < E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$$

existe  $k^* \in (0, 1)$  y es tal que:

$$\frac{P}{E(N_{n+1} | \mathbf{N})} = E(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) \quad (5.3)$$

$$\text{con } A = \left\{ Z_{m+i} | \mathbf{Z} : Z_{m+i} \leq \frac{L_1}{(1-k)} \right\}.$$

*Demostración.* Sabemos, por la proposición 5.1.1 que  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$ , la ganancia esperada para la cedente, viene dada por:

$$kP - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) + (1-k) E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_1 \Pr(\bar{A})$$

$$\text{con } A = \left\{ Z_{m+i} : Z_{m+i} \leq \frac{L_1}{(1-k)} \right\}.$$

cuya expresión explícita en forma de integrales es:

$$kP - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) + (1-k) E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_1 \left(1 - F_{Z_{m+i} | \mathbf{Z}} \left(\frac{L_1}{1-k}\right)\right).$$

La decisión óptima será elegir la proporción  $k$  que maximice esta ganancia esperada, pero, naturalmente, dependerá de los valores de  $L_1$  y  $P$ .

i. Supongamos que  $L_1 \geq Z_{max}$ .

En este caso, como  $L_1 \leq \frac{L_1}{1-k}$ ,

$$\int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} = \int_0^{\infty} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} = E(Z_{m+i} | \mathbf{Z})$$

y,

$$F_{Z_{m+i} | \mathbf{Z}} \left(\frac{L_1}{1-k}\right) = 1.$$

Por lo que:

$$E_{N_{n+1} | \mathbf{N}} E_{Z_{n+1} | \mathbf{Z}}(G) = k(P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z})).$$

De acuerdo con el Teorema 4.7.1,

$$E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}),$$

por tanto, la ganancia esperada por la cedente cuando el límite máximo de responsabilidad estipulado por el reasegurador es superior o igual al

monto máximo por siniestro de las pólizas que componen el portafolio,  $L_1 \geq Z_{max}$ , es:

$$E_{N_{n+1}|N}E_{Z_{n+1}|Z}(G) = k(P - E(X | Z, N)).$$

De la expresión anterior, resulta, claramente que:

- a. Si  $P > E(X | Z, N)$ , entonces,  $E_{N_{n+1}|N}E_{Z_{n+1}|Z}(G)$  es una función creciente de  $k$  y, por tanto, la proporción óptima para la cedente se obtiene en  $k^* = 1$ . Es decir, se recomienda a la cedente no optar por un reaseguro cuota parte en estas condiciones.
- b. Si  $P = E(X | Z, N)$ ,

$$E_{N_{n+1}|N}E_{Z_{n+1}|Z}(G) = 0, \forall k.$$

Por tanto, cualquier proporción  $k \in [0, 1]$  que elija resulta equivalente.

- c. Si  $P < E(X | Z, N)$ , entonces,  $E_{N_{n+1}|N}E_{Z_{n+1}|Z}(G)$  es una función decreciente de  $k$ . Así, la proporción óptima para la cedente se obtiene en  $k^* = 0$ . Esto es, se recomienda a la cedente no retener riesgo alguno.
- ii. Si  $L_1 < Z_{max}$ , el reasegurador fija un límite máximo de responsabilidad que no es superior al mayor de los montos posibles y, además, se cumple  $L_1 < Z_{max}(1 - k)$ . Es decir, pueden ocurrir siniestros cuyo monto no sea totalmente compartido en la proporción pactada, ya que, en ellos, el reasegurador no cumple con la parte total de su cuota.

En este caso, para analizar la ganancia esperada por la cedente,

$$E_{N_{n+1}|N}E_{Z_{n+1}|Z}(G),$$

$$kP - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) + (1-k) E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} + \\ + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_1 \left( 1 - F_{Z_{m+i} | \mathbf{Z}} \left( \frac{L_1}{1-k} \right) \right),$$

calculamos su primera derivada respecto de  $k$ :

$$P + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \left( \frac{L_1}{1-k} \right)^2 p_{z_{m+i}|z} \left( \frac{L_1}{1-k} \right) - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} + \\ - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \left( \frac{L_1}{1-k} \right)^2 p_{z_{m+i}|z} \left( \frac{L_1}{1-k} \right)$$

simplificando:

$$\frac{d}{dk} E_{N_{n+1} | \mathbf{N}} E_{Z_{n+1} | \mathbf{Z}}(G) = P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} \quad (5.4)$$

Ahora bien, distinguiamos:

a. Si  $P > E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ :

Con base en el Teorema 4.7.1,

$$E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}).$$

Por otro lado:

$$E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) > \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i}.$$

Con lo anterior, se puede escribir:

$$P > E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) > E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i}$$

Y, por tanto, en (5.4),

$$\frac{d}{dk} E_{N_{n+1} | \mathbf{N}} E_{\mathbf{Z}_{n+1} | \mathbf{Z}}(G) > 0, \quad (5.5)$$

de donde se concluye que la ganancia esperada,  $E_{N_{n+1} | \mathbf{N}} E_{\mathbf{Z}_{n+1} | \mathbf{Z}}(G)$  es creciente, por lo que la proporción óptima se obtiene no reasegurando el portafolio, es decir,

$$k^* = 1.$$

b. Si  $P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , resulta que, de acuerdo con (5.4), si

$$F_{Z_{m+i}} \left( \frac{L_1}{1-k} \right) < 1,$$

$$\frac{d}{dk} E_{N_{n+1} | \mathbf{N}} E_{\mathbf{Z}_{n+1} | \mathbf{Z}}(G) = P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} > 0.$$

Sin embargo, si

$$F_{Z_{m+i}} \left( \frac{L_1}{1-k} \right) = 1,$$

$$\frac{d}{dk} E_{N_{n+1}|\mathcal{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}} (G) = P - E(N_{n+1} | \mathcal{N}) \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} = 0.$$

Así, sea

$$k_0 = \min \left\{ k : F_{Z_{m+i}} \left( \frac{L_1}{1-k} \right) = 1 \right\},$$

resulta que:

$E_{N_{n+1}|\mathcal{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}} (G)$  crece en  $[0, k_0]$  y es constante,

$$E_{N_{n+1}|\mathcal{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}} (G) = 0,$$

en el intervalo  $[k_0, 1]$ . Por tanto,

$$k^* = k, \forall k \in [k_0, 1].$$

c. Finalmente, demostramos el resultado cuando  $P < E(X | \mathbf{Z}, \mathcal{N})$ .

De acuerdo con (5.4),

$$\frac{d}{dk} E_{N_{n+1}|\mathcal{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}} (G) = P - E(N_{n+1} | \mathcal{N}) \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i}.$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{d^2}{dk^2} E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = -E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \frac{L_1^2}{(1-k)^3} p_{z_{m+i}|\mathbf{z}} \left( \frac{L_1}{1-k} \right).$$

Claramente,  $\forall k \in [0, 1]$ ,

$$\frac{d^2}{dk^2} E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) < 0.$$

Es decir,  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$  es una función cóncava de  $k$ . Por lo tanto, si existe un punto crítico en el intervalo  $[0, 1]$ , será máximo.

1. Sea  $k_0 = \min \left\{ k : F_{Z_{m+i}} \left( \frac{L_1}{1-k} \right) = 1 \right\}$ ,

$$\frac{d}{dk} E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} < 0$$

$$\forall k \in [k_0, 1].$$

Es decir,  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$  es decreciente. Y, por tanto, la proporción óptima es  $k^* = 0$ .

2. Para que exista un máximo en  $(0, 1)$  se ha de cumplir que

$$\left[ \frac{d}{dk} E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) \right]_{k=0} > 0,$$

esto es, que la ganancia esperada crezca en  $k = 0$ . De acuerdo con (5.4), lo anterior ocurre si

$$P > E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{L_1} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i}.$$

En tal caso, el máximo habrá de cumplir

$$P = E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i}.$$

Se sabe que

$$L_1 < \frac{L_1}{1-k} \quad \forall k \in (0, 1).$$

Por lo tanto, si  $L_1 < Z_{max}$  y

$$E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{L_1} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} < P < E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$$

la proporción óptima,  $k^*$ , es aquella que verifica:

$$\frac{P}{E(N_{n+1} | \mathbf{N})} = E(Z_{m+i} I_A(Z_{m+i}) | \mathbf{Z})$$

$$\text{con } A = \left\{ Z_{m+i} | \mathbf{Z} : Z_{m+i} \leq \frac{L_1}{(1-k)} \right\}.$$

□

Con base en lo anterior, podemos concluir que solamente se recomendará a la cedente un reaseguro cuota parte cuando la prima que cobra a sus asegurados,  $P$ , sea tal que

$$P \leq E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}).$$

Encontrar un valor específico para  $k$  dependerá de las distribuciones predictivas



del número y el monto de siniestros. En particular, suponemos que la prima se elige como el valor esperado de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros,

$$P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}),$$

ya que un valor de prima por debajo no sería adecuado para la cedente.

Como se ha comentado, en el apartado 4.8.1, es de esperarse que la distribución predictiva del monto agregado de siniestros sea simétrica. Por tanto, la selección de la prima, como el valor esperado del monto agregado de siniestros, coincide con la mediana de la distribución de  $X$ . Esa selección de la prima,  $\rho_1 = 0,50$ , corresponde a una actitud de neutralidad al riesgo.

Esa es también la valoración al riesgo que hemos hecho al suponer que la utilidad de la ganancia es la ganancia ( $u(G) = G$ ). Es posible que la cedente no sea neutra sino adversa al riesgo, en tal caso se considera que vale la pena ajustar una función de utilidad sobre la ganancia, que tenga en cuenta su aversión al riesgo.

Borch fue el primero en mostrar cómo la teoría de la utilidad podía ser usada para resolver problemas de las ciencias actuariales. Borch (1961) utiliza el criterio de maximización de utilidad de la ganancia para determinar la proporción  $k$  óptima en un reaseguro cuota parte utilizando una función de utilidad cuadrática y suponiendo que el monto agregado de siniestros se distribuye según una  $Ex(1)$ . Borch (1968) utiliza el mismo criterio desde el punto de vista del reasegurador. Gerber y Pafumi (1998) calculan la proporción  $k$  óptima cuando el valor del dinero de la cedente es medido a partir de una función de utilidad exponencial, y el monto agregado de siniestros sigue una distribución  $N(\mu, \sigma)$ , mientras que, a modo de discusión, Lee (1998) lo hace, suponiendo que dicha distribución es  $Ga(\alpha, \beta)$ .

En Bowers et al. (1997) y Gerber y Pafumi (1998) se presentan las funciones de utilidad que podrían ser de interés en seguros.

Los casos presentados arriba parten de criterios clásicos, y simplifican el modelo

suponiendo que no existe un límite máximo de responsabilidad, supuesto que en ningún caso es real. En la actualidad, todos los contratos de reaseguro establecen un monto máximo que pagará el reasegurador.

Por todo esto, a continuación se presenta el planteamiento del problema de decisión para un reaseguro cuota parte en el que la cedente mide el valor del dinero con base en una función de utilidad.

En el problema de reaseguro óptimo, planteado con anterioridad, supongamos que la aversión al riesgo de la cedente es reflejada mediante una función de utilidad exponencial

$$u(G) = -\exp(-aG) \quad a > 0 \quad (5.6)$$

La elección de esta función de utilidad supone que la cedente es adversa al riesgo y que su aversión es constante, concretamente será el valor  $a$ .

La aversión al riesgo por parte de la cedente al suponer esta función de utilidad se verifica, ya que:

$$\begin{aligned} u'(G) &= a \exp(-aG) > 0 \\ u''(G) &= -a^2 \exp(-aG) < 0 \end{aligned}$$

Es decir, (5.6) es una función creciente y cóncava.

La proporción  $k$  óptima será aquella que maximice  $E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|Z}(u(G))$ . Donde,  $G$  es la ganancia al final del período, cuya expresión bajo un reaseguro cuota parte es:

$$G = kP - \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} + \sum_{i=1}^{N_{n+1}} \min [(1-k) Z_{m+i}, L_1] \quad (5.7)$$

**Proposición 5.1.3.** *En el problema de decisión planteado, la  $E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|Z} (u(G))$  viene dada por:*

$$- \exp(-akP) M_{N_{n+1}|N} (\log M_{Y_i}(a)) \quad (5.8)$$

donde,  $Y_i = Z_{m+i} - \min [(1-k) Z_{m+i}, L_1]$  y  $M_W(t)$  es la función generadora de momentos de la variable aleatoria  $W$ .

### **Demostración**

Sean  $u(G)$  dada por (5.6) y  $G$  dada por (5.7),  $E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|Z} (u(G))$  se calcula como:

$$\begin{aligned} & E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|Z} \left( - \exp \left\{ -akP + a \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} - a \sum_{i=1}^{N_{n+1}} \min [(1-k) Z_{m+i}, L_1] \right\} \right) = \\ & - \exp(-akP) E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|Z} \left( \exp \left\{ a \sum_{i=1}^{N_{n+1}} (Z_{m+i} - \min [(1-k) Z_{m+i}, L_1]) \right\} \right) = \\ & - \exp(-akP) E_{N_{n+1}|N} \left( \prod_{i=1}^{N_{n+1}} E_{Z_{n+1}|Z} (\exp \{a (Z_{m+i} - \min [(1-k) Z_{m+i}, L_1])\}) \right) = \\ & - \exp(-akP) E_{N_{n+1}|N} (E_{Z_{m+i}|Z} (\exp \{a (Z_{m+i} - \min [(1-k) Z_{m+i}, L_1])\}))^{N_{n+1}} \end{aligned}$$

Sean  $Y_i = Z_{m+i} - \min [(1-k) Z_{m+i}, L_1]$  y  $M_W(t)$  la función generadora de momentos de la variable aleatoria  $W$ .

$$\begin{aligned}
E_{N_{n+1}|\mathcal{N}}E_{Z_{n+1}|\mathcal{Z}}(u(G)) &= -\exp(-akP) E_{N_{n+1}|\mathcal{N}}(M_{Y_i}(a))^{N_{n+1}} \\
&= -\exp(-akP) E_{N_{n+1}|\mathcal{N}}(\exp\{N_{n+1} \log M_{Y_i}(a)\}) \\
&= -\exp(-akP) M_{N_{n+1}|\mathcal{N}}(\log M_{Y_i}(a))
\end{aligned}$$

## 5.2. Determinación del deducible óptimo para un reaseguro exceso de pérdida

A diferencia del reaseguro cuota parte, en el que el reasegurador participa en el pago de cada siniestro en la misma proporción<sup>1</sup>, en el reaseguro exceso de pérdida por riesgo, el reasegurador pagará solamente si el siniestro supera una cantidad monetaria pactada en el contrato, dicha cantidad,  $M$ , se denomina deducible y será determinada por la cedente. Por su parte, el reasegurador especifica la cantidad máxima que estará dispuesto a pagar por encima del deducible. Esto último se considera una decisión previa a nuestro problema, reflejando este hecho al considerar que  $L_2$  es fija.

Suponiendo que el portafolio  $(n + 1)$  se reasegura bajo un exceso de pérdida por riesgo, la cedente deberá encontrar la cantidad  $M$  óptima.

De acuerdo con lo anterior y considerando que la cedente es neutra al riesgo, su objetivo será maximizar la ganancia obtenida bajo este esquema de reaseguro, cuya expresión (ver 4.4) es:

$$G = P - \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} - PR + \sum_{i=1}^{N_{n+1}} [\min[Z_{m+i}, L_2] - M] I_B(Z_{m+i}) \quad (5.9)$$

---

<sup>1</sup>siempre y cuando no supere el límite máximo de responsabilidad

donde  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$ .

Con base en esto, la acción bayes es la  $a_M$  que maximiza  $E_{N_{n+1}|N}E_{Z_{n+1}|Z}(G)$ .

De acuerdo con la expresión (5.9), la ganancia esperada dependerá, entre otros, de la prima de reaseguro,  $PR$ . Como se ha comentado, en el apartado 4.8.2, en el reaseguro exceso de pérdida por riesgo no existe una forma predeterminada para el cálculo de  $PR$ . Sin embargo, su valor dependerá del deducible,  $M$ . Para hacer notar este hecho, en lo sucesivo, hacemos explícita dicha relación de  $PR$  como función de  $M$ .

**Proposición 5.2.1.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de reaseguro exceso de pérdida por riesgo, la ganancia esperada  $E_{N_{n+1}|N}E_{Z_{n+1}|Z}(G)$  viene dada por:*

$$P - E(N_{n+1} | N) E(Z_{m+i} | Z) - PR(M) + E(N_{n+1} | N) E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | Z) + E(N_{n+1} | N) L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | Z) - E(N_{n+1} | N) M \Pr(Z_{m+i} > M | Z) \quad (5.10)$$

donde,  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$  y  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ .

*Demostración.* Considerando la expresión de  $G$  para el reaseguro exceso de pérdida por riesgo presentada en (5.9),  $E_{N_{n+1}|N}E_{Z_{n+1}|Z}(G)$  se calcula como:

$$E_{N_{n+1}|N}E_{Z_{n+1}|Z} \left( P - \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} - PR(M) + \sum_{i=1}^{N_{n+1}} [\min[Z_{m+i}, L_2] - M] I_B(Z_{m+i}) \right)$$

Tomando en cuenta la propiedad lineal de la esperanza, la expresión de arriba es equivalente a:

$$E_{N_{n+1}|N} \left( P - E_{Z_{n+1}|Z} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} \right) - PR(M) + E_{Z_{n+1}|Z} \left( \sum_{i=1}^{N_{n+1}} [\min[Z_{m+i}, L_2] - M] I_B(Z_{m+i}) \right) \right)$$

Así:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{N_{n+1}|\mathbf{N}}\mathbb{E}_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) &= \\
&= \mathbb{E}_{N_{n+1}|\mathbf{N}}(P - N_{n+1}\mathbb{E}_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{m+i}) + \\
&\quad -PR(M) + N_{n+1}\mathbb{E}_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}([\min[Z_{m+i}, L_2] - M]I_B(Z_{m+i}))) \\
&= P - \mathbb{E}_{N_{n+1}|\mathbf{N}}(N_{n+1})\mathbb{E}_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{m+i}) + \\
&\quad -PR(M) + \mathbb{E}_{N_{n+1}|\mathbf{N}}(N_{n+1})\mathbb{E}_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}([\min[Z_{m+i}, L_2] - M]I_B(Z_{m+i})) \\
&= P - \mathbb{E}(N_{n+1} | \mathbf{N})\mathbb{E}(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) - PR(M) + \\
&\quad + \mathbb{E}(N_{n+1} | \mathbf{N})\mathbb{E}_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}([\min[Z_{m+i}, L_2] - M]I_B(Z_{m+i})) \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Sean  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$ ,  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$  y  
 $Z_{rea_{m+i}} = [\min[Z_{m+i}, L_2] - M]$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}([\min[Z_{m+i}, L_2] - M]I_B(Z_{m+i})) &= \mathbb{E}_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{rea_{m+i}} | B) \Pr(B) \\
&= \mathbb{E}_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{rea_{m+i}} | B \cap B') \Pr(B) \Pr(B' | B) + \\
&\quad + \mathbb{E}_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{rea_{m+i}} | B \cap \overline{B}') \Pr(B) \Pr(\overline{B}' | B)
\end{aligned}$$

Como  $B \cap B' = \{Z_{m+i} : M < Z_{m+i} < L_2\}$  y  $B \cap \overline{B}' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > L_2\}$   
entonces

$$\begin{aligned}
& E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}([\min [Z_{m+i}, L_2] - M] I_B(Z_{m+i})) = \\
& = E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{m+i} - M | B \cap B') \Pr(B \cap B') + \\
& \quad + E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(L_2 - M | B \cap \bar{B}') \Pr(B \cap \bar{B}') \\
& = E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{m+i} - M | B \cap B') \Pr(M < Z_{m+i} < L_2 | \mathbf{Z}) + \\
& \quad + E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(L_2 - M | B \cap \bar{B}') \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) \\
& = E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(Z_{m+i} | B \cap B') \Pr(M < Z_{m+i} < L_2 | \mathbf{Z}) + \\
& \quad - M \Pr(M < Z_{m+i} < L_2 | \mathbf{Z}) + \\
& \quad + (L_2 - M) \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z})
\end{aligned}$$

Con lo anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
& E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}([\min [Z_{m+i}, L_2] - M] I_B(Z_{m+i})) = \\
& E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) - M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z})
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Donde,

$$E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) = \int_{B \cap B'} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i}$$

Finalmente, sustituyendo el resultado (5.12) en (5.11) se obtiene

$E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$  como:

$$\begin{aligned}
& P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) - PR(M) + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + \\
& \quad + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z})
\end{aligned}$$

□

**Proposición 5.2.2.** Sea  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$  una función diferenciable de  $M$ , su primera y segunda derivadas, respectivamente, son:

$$\frac{d}{dM}E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = -\frac{d}{dM}PR(M) - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) \quad (5.13)$$

$$\frac{d^2}{dM^2}E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = -\frac{d^2}{dM^2}PR(M) + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) p_{z_{m+i}|\mathbf{z}}(M). \quad (5.14)$$

*Demostración.* De acuerdo con (5.10), la ganancia esperada,  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$ , viene dada por:

$$P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) - PR + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + \\ + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z})$$

con  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$  y  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ ,

cuya expresión explícita en forma de integrales es:

$$P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) - PR(M) + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_M^{L_2} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} + \\ + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_2 \int_{L_2}^{\infty} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) M \int_M^{\infty} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i}.$$

Por tanto, derivando respecto de  $M$  se obtiene:



$$\frac{d}{dM} E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = -\frac{d}{dM} PR(M) - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}).$$

Y, derivando la expresión anterior, nuevamente respecto de  $M$ , concluimos que:

$$\frac{d^2}{dM^2} E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = -\frac{d^2}{dM^2} PR(M) + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) p_{z_{m+i}|\mathbf{z}}(M).$$

□

**Proposición 5.2.3.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de reaseguro exceso de pérdida por riesgo, en el que la prima de reaseguro,  $PR$ , no depende del deducible,  $M$ , el deducible óptimo a retener por la cedente viene dado por  $M^* = 0$ .*

*Demostración.* De acuerdo con (5.13), la primera derivada de la ganancia esperada respecto de  $M$  es:

$$\frac{d}{dM} E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = -\frac{d}{dM} PR(M) - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z})$$

Ahora bien, si la prima de reaseguro,  $PR$ , no depende de  $M$ , entonces

$$\frac{d}{dM} PR(M) = 0$$

y, por tanto,

$$\frac{d}{dM} E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) < 0.$$

Así, la ganancia esperada,  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$ , es una función decreciente de  $M$ . Por lo que el deducible óptimo para la cedente se obtiene en  $M^* = 0$ . Es decir, el reaseguro óptimo exceso de pérdida por riesgo en este caso consiste en ceder todos los riesgos al reasegurador.  $\square$

Desde nuestro punto de vista, como hemos comentado, la prima de reaseguro,  $PR$ , debe estar relacionada con el deducible,  $M$ . De acuerdo con el apartado 4.8.2, la relación que existe entre  $PR(M)$  y  $M$  es inversa, de donde,

$$\frac{d}{dM}PR(M) < 0. \quad (5.15)$$

Es decir,  $PR(M)$  es decreciente de  $M$ .

A continuación analizamos los deducibles óptimos obtenidos con base en las distintas formas en que podría comportarse  $PR$  respecto de  $M$ .

**Proposición 5.2.4.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de reaseguro exceso de pérdida por riesgo, en el que la prima de reaseguro,  $PR(M)$ , es una función lineal o cóncava del deducible,  $M$ , el deducible óptimo a retener por la cedente viene dado por:*

a.  $M^* = 0$ , si

$$PR(0) < E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{L_2} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}).$$

b.  $M^* = L_2$ , si

$$PR(0) > E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{L_2} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}).$$

*Demostración.* i. Sea  $PR(M)$  una función lineal, decreciente de  $M$ ,

$$PR = a + bM,$$

con  $b < 0$ .

Entonces,

$$\frac{d}{dM}PR(M) = b$$

Así, de acuerdo con (5.13) y (5.14),

$$\frac{d}{dM}E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = -b - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z})$$

y

$$\frac{d^2}{dM^2}E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = E(N_{n+1} | \mathbf{N}) p_{z_{m+i}|\mathbf{z}}(M) > 0.$$

Es decir, la ganancia esperada  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$  es una función convexa de  $M$ .

ii. Si  $PR$  es cóncava de  $M$ , entonces:

$$\frac{d^2}{dM^2}PR(M) < 0.$$

Por tanto, de acuerdo con (5.14):

$$\frac{d^2}{dM^2} E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = -\frac{d^2}{dM^2} PR(M) + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) p_{z_{m+i}|\mathbf{z}}(M) > 0.$$

Es decir, la ganancia esperada es una función convexa de  $M$ .

Con base en lo anterior, si  $PR(M)$  es lineal o cóncava de  $M$ , la ganancia esperada es una función convexa de  $M$ . Por tanto, si existe  $M_0$  que haga que la primera derivada de la ganancia esperada se iguale a cero, esto es,  $M_0$  tal que:

$$-\frac{d}{dM} PR(M) = E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}),$$

$M_0$  es mínimo.

Por lo anterior, el deducible que maximiza la ganancia esperada solamente podrá ser  $M^* = 0$  ó  $M^* = L_2$ . Por tanto, el problema de encontrar el deducible óptimo consiste en comparar la ganancia esperada en ambos casos.

De acuerdo con (5.10), la ganancia esperada,  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$ , viene dada por:

$$\begin{aligned} P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) - PR(M) + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + \\ + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde,  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$  y  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ .

Por tanto, si  $M = 0$ , de acuerdo con (5.16), la ganancia esperada para la cedente es:

$$\begin{aligned}
E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G(M=0)) &= P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) - PR(0) + \\
&+ E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{L_2} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} + \\
&+ E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_2 \int_{L_2}^{\infty} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Por su parte, si  $M = L_2$ , la cedente no reasegura el portafolio, por lo que  $PR(L_2) = 0$ . Así, de acuerdo con (5.16), la ganancia esperada para la cedente es:

$$E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G(M=L_2)) = P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}). \quad (5.18)$$

Ahora bien,

a. El deducible óptimo es  $M^* = 0$ , si

$$E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G(M=0)) > E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G(M=L_2)).$$

Es decir, si:

$$PR(0) < E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{L_2} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}).$$

b. El deducible óptimo es  $M^* = L_2$ , si

$$\mathbb{E}_{N_{n+1}|\mathbf{N}}\mathbb{E}_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G(M=L_2)) > \mathbb{E}_{N_{n+1}|\mathbf{N}}\mathbb{E}_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G(M=0)).$$

Es decir, si:

$$PR(0) > \mathbb{E}(N_{n+1} | \mathbf{N}) \int_0^{L_2} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} + \mathbb{E}(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}).$$

□

**Proposición 5.2.5.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de reaseguro exceso de pérdida por riesgo, en el que la prima de reaseguro,  $PR(M)$ , es una función convexa del deducible,  $M$ , si existe  $M^* \in [0, L_2]$  que verifique:*

$$-\frac{d}{dM}PR(M) = \mathbb{E}(N_{n+1} | \mathbf{N}) \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}), \quad (5.19)$$

será máximo si:

$$\mathbb{E}(N_{n+1} | \mathbf{N}) p_{z_{m+i}|\mathbf{z}}(M^*) < \frac{d^2}{dM^2}PR(M^*).$$

*Demostración.* Para analizar la ganancia esperada por la cedente,

$\mathbb{E}_{N_{n+1}|\mathbf{N}}\mathbb{E}_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$ , nos basamos en su primera derivada respecto de  $M$  que, de acuerdo con (5.13), es:

$$\frac{d}{dM}\mathbb{E}_{N_{n+1}|\mathbf{N}}\mathbb{E}_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = -\frac{d}{dM}PR(M) - \mathbb{E}(N_{n+1} | \mathbf{N}) \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) \quad (5.20)$$

Como ya se ha comentado, la relación que existe entre  $PR(M)$  y  $M$  es inversa, de donde, de acuerdo con (5.15),

$$\frac{d}{dM}PR(M) < 0.$$

Por tanto, es posible plantear que, si existe un valor  $M^* \in (0, L_2)$ , que haga

$$\frac{d}{dM}E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = 0,$$

es tal que verifique:

$$-\frac{d}{dM}PR(M) = E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}).$$

Comprobar que  $M^*$  es un máximo requiere analizar la segunda derivada de la ganancia esperada, la cual, con base en (5.14), es:

$$\frac{d^2}{dM^2}E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{Z_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = -\frac{d^2}{dM^2}PR(M) + E(N_{n+1} | \mathbf{N})p_{z_{m+i}|\mathbf{z}}(M). \quad (5.21)$$

Si  $PR(M)$  es convexa de  $M$ ,

$$\frac{d^2}{dM^2}PR(M) > 0.$$

En tal caso, con base en (5.21), es posible que  $M^*$  sea máximo si verifica:

$$E(N_{n+1} | \mathbf{N}) p_{z_{m+i}|z}(M^*) < \frac{d^2}{dM^2} PR(M^*).$$

□

De acuerdo con lo anterior, el valor óptimo para  $M$  dependerá tanto de las distribuciones predictivas del número y el monto de siniestros como del principio de cálculo bajo el cual se calcule la prima de reaseguro,  $PR(M)$ .

Como se ha mostrado, una elección de prima de reaseguro,  $PR(M)$ , lineal o cóncava respecto de  $M$  lleva a resultados óptimos extremos, esto es,  $M^* = 0$  ó  $M^* = L_2$ . Por lo que, desde nuestro punto de vista, una elección de  $M^*$  óptima fuera de esos valores, sólo se daría con  $PR(M)$  convexa de  $M$ . Este es precisamente el comportamiento que tienen los principios de cálculo que se proponen, en el apartado 4.8.2, para la determinación de la prima de reaseguro en los contratos no proporcionales (Kaluszka, 2005).

Con objeto de presentar las soluciones que se obtienen bajo dichos principios, a continuación se presenta el resultado considerando que la prima de reaseguro se determina con base en el principio exponencial. Por su parte, los resultados obtenidos cuando la prima de reaseguro se calcula con base en el principio del valor esperado se presentan en el siguiente capítulo, mediante una aplicación práctica.

**Proposición 5.2.6.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de reaseguro exceso de pérdida por riesgo, en el que el límite máximo de responsabilidad estipulado por el reasegurador,  $L_2$ , es superior o igual al monto máximo por siniestro de las pólizas que componen el portafolio y la prima de reaseguro,  $PR(M)$ , se calcula con base en el principio de utilidad exponencial, el resultado óptimo es reasegurar todo el portafolio.*

*Demostración.* Bajo el principio de utilidad exponencial (apartado 4.8.2), según (4.83), la prima de reaseguro se determina como:



$$PR(M) = \frac{1}{a} \log \frac{E[\exp(aX) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]}{E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]}. \quad (5.22)$$

con  $a > 0$ .

Puesto que (5.22) es una función convexa de  $M$ , con base en la proposición 5.2.5, si existe un deducible óptimo  $M^* \in [0, L_2]$  es tal que verifique (5.19),

$$-\frac{d}{dM} PR(M) = E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}). \quad (5.23)$$

Ahora bien, derivando  $PR(M)$ , ecuación (5.22), con respecto a  $M$ , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dM} PR(M) &= -\frac{1}{a} \frac{E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]}{E[\exp(aX) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]} \frac{d}{dM} \frac{E[\exp(aX) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]}{E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]} \\ &= -\frac{1}{aE[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]} \frac{d}{dM} E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}] \end{aligned} \quad (5.24)$$

Encontrar  $M^*$  requiere determinar (5.24). Puesto que no es posible conocer analíticamente la función generadora de momentos del monto agregado de siniestros retenidos, su derivada,

$$\frac{d}{dM} E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}],$$

será aproximada sustituyendo la función exponencial por su expansión en serie de potencias hasta el grado 2, de tal forma que:

$$\frac{d}{dM} E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}] = \frac{d}{dM} \left( 1 + aE(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2!} E(X_{ret}^2 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \right)$$

De acuerdo con la expresión (4.45)

$$X_{ret} = X - X_{rea}$$

Y, por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dM} E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}] &= \frac{d}{dM} \left( 1 + aE(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2!} E(X_{ret}^2 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \right) \\ &= a \frac{d}{dM} E(X - X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2!} \frac{d}{dM} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\ &\quad + \frac{a^2}{2!} \frac{d}{dM} E^2(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \\ &= -a \frac{d}{dM} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2} \frac{d}{dM} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\ &\quad - a^2 E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \frac{d}{dM} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \\ &= -a \frac{d}{dM} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) (1 + aE(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})) + \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \frac{d}{dM} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \end{aligned}$$

Sustituyendo el resultado anterior en (5.24)

$$\frac{d}{dM} PR(M) = \frac{\frac{d}{dM} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) (1 + aE(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})) - \frac{a}{2} \frac{d}{dM} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})}{E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]} \quad (5.25)$$

Por otro lado, de acuerdo con (4.54), el monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo es:

$$X_{rea} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} [\min [Z_{m+i}, L_2] - M] I_B(Z_{m+i})$$

con  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$ .

Y, de acuerdo con (4.64), su esperanza viene dada por:

$$\begin{aligned} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) [E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z})] + \\ &\quad - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

Derivando  $E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$  con respecto a  $M$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dM} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \\ &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \frac{d}{dM} [E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z})] + \\ &\quad - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \frac{d}{dM} (M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z})) \\ &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \frac{d}{dM} \left[ \int_M^{L_2} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} + L_2 \int_{L_2}^{\infty} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} \right] + \\ &\quad - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \frac{d}{dM} \left( M \int_M^{\infty} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i} \right) \\ &= -E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

Por tanto, en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo

$$\frac{d}{dM} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = -E(N_{n+1} | \mathbf{N}) \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}). \quad (5.26)$$

Con base en lo anterior, que la expresión (5.25) cumpla la condición de optimalidad (5.23) requiere:

$$\frac{d}{dM} PR(M) = \frac{d}{dM} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}).$$

Observemos que, en (5.25), esto se cumple cuando  $X_{ret} = 0$ , ya que el límite máximo de responsabilidad,  $L_2$ , es superior o igual al monto máximo por siniestro de las pólizas que componen el portafolio y, por tanto, el reasegurador participa en todos los siniestros en las mismas condiciones. Es decir, el reaseguro óptimo se consigue reasegurando todo el portafolio.  $\square$

Finalmente, es importante comentar que el reaseguro óptimo también dependerá de la prima que la cedente cobre a sus asegurados,  $P$ . A tal efecto, si suponemos que  $P$  se elige como el valor esperado de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 5.2.7.** *Si una cedente se plantea un reaseguro exceso de pérdida por riesgo para un portafolio de seguros de vida, en el que la prima que cobra a sus asegurados es:*

$$P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}),$$

*el deducible óptimo a retener por la cedente viene dado por:*

- i. Si  $PR(M) > E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,  $M^* = L_2$ .*
- ii. Si  $PR(M) = E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,  $M^* = M \forall M \in [0, L_2]$ .*
- iii. Si  $PR(M) < E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,  $M^*$  que maximice  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$ , la ganancia esperada.*

*Demostración.* Sabemos, por la proposición 5.2.1, que la ganancia esperada para la cedente en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo,  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$ , viene dada por:

$$P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) - PR(M) + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + E(N_{n+1} | \mathbf{N}) L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z}) - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}). \quad (5.27)$$

donde,  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$  y  $B' = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} < L_2\}$ .

Por otro lado, de acuerdo con (4.64), el valor esperado del monto agregado de siniestros recuperados es:

$$\begin{aligned} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= E(N_{n+1} | \mathbf{N}) [E(Z_{m+i} I_{B \cap B'}(Z_{m+i}) | \mathbf{Z}) + L_2 \Pr(Z_{m+i} > L_2 | \mathbf{Z})] + \\ &\quad - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) M \Pr(Z_{m+i} > M | \mathbf{Z}). \end{aligned}$$

Usando el resultado anterior, es posible reescribir la ganancia esperada, (5.27), como:

$$E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) - PR(M) + E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$$

Si, además, se considera que  $P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , de acuerdo con el teorema 4.7.1,

$$E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}).$$

Y, por tanto,

$$E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - PR(M). \quad (5.28)$$

Ahora bien, distinguimos:

i. Si  $PR(M) > E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , de acuerdo con (5.28),

$$E_{N_{n+1}|\mathbf{N}} E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) < 0.$$

Por otro lado, si la cedente decide no contratar un reaseguro exceso de pérdida por riesgo en estas condiciones, es decir, si  $M = L_2$ , por definición  $PR(L_2) = 0$ . Y, por tanto, de acuerdo con (5.27):

$$E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z})$$

Como

$$P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$$

y,

$$E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(N_{n+1} | N) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}).$$

se obtiene, finalmente:

$$E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = 0.$$

Por lo que se concluye que, la ganancia esperada bajo estas condiciones, será mayor si la cedente decide no reasegurar el portafolio. Es decir, el deducible óptimo es  $M^* = L_2$ .

ii. Por otro lado, si  $PR(M) = E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , de acuerdo con (5.28),

$$E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - PR(M) = 0.$$

Por tanto, cualquier deducible  $M \in [0, L_2]$  que elija la cedente resulta equivalente.

iii. Si  $PR(M) < E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , de acuerdo con (5.28),

$$E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) > 0.$$

En ese caso, la cedente se planteará un reaseguro exceso de pérdida por riesgo y el óptimo será  $M^*$  que maximice la ganancia esperada,

$$E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G) = P - E(N_{n+1} | \mathbf{N}) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) - PR(M) + E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$$

□

### 5.3. Determinación de la prioridad óptima para un reaseguro stop loss

En el reaseguro stop loss, a diferencia de los otros reaseguros planteados, el reasegurador no participa directamente sobre cada monto individual, sino que lo hace para el resultado final del portafolio. Considerando esto, opera de una forma similar al reaseguro exceso de pérdida por riesgo, que se ha definido arriba, es decir, en este tipo de reaseguro, el reasegurador pagará a la cedente solamente si el monto agregado  $X$  supera una cantidad  $d$ , denominada prioridad. Si esto ocurriese, entonces, el reasegurador pagará la diferencia entre las dos cantidades,  $X - d$ , siempre y cuando el monto obtenido no supere la cantidad máxima que el reasegurador estará dispuesto a pagar por encima de la prioridad. Como en los otros casos, consideramos que esa decisión del reasegurador es previa a nuestro problema, y por tanto suponemos  $L_3$  fija.

La cedente deberá determinar la prioridad óptima para el contrato, en caso de optar por un reaseguro stop loss para el portafolio  $(n + 1)$ .

Suponiendo que la cedente es neutra al riesgo, tendrá como objetivo maximizar su ganancia, cuya expresión se presenta a continuación:

$$G = P - X - PR + [\min(X, L_3) - d] I_C(X) \quad (5.29)$$

Donde  $C = \{X : X > d\}$ .

La expresión anterior involucra la prima de reaseguro que la cedente paga por el contrato,  $PR$ . Como se ha comentado, en el apartado 4.8.2, en el reaseguro stop loss una regla fija para determinar  $PR$ . Supondremos, como en el caso anterior, que ésta es función de la prioridad, haciendo explícita su relación al escribir  $PR(d)$  en lo sucesivo.

Con base en el planteamiento del problema, en el apartado 4.1, se define la acción óptima como aquella que maximiza  $E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|Z}(G)$ . Sin embargo, como se ha comentado arriba, el reaseguro stop loss opera con base en el monto agregado de siniestros  $X$ . Por ello, consideramos la acción bayes la  $a_d$  que maximiza  $E_{X|N,Z}(G)$ .

**Proposición 5.3.1.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de reaseguro stop loss, la ganancia esperada viene dada por:*

$$E_{X|Z,N}(G) = P - E(X | Z, N) - PR(d) + E(X I_{C \cap C'}(X) | Z, N) + L_3 \Pr(X > L_3 | Z, N) - d \Pr(X > d | Z, N) \quad (5.30)$$

donde,  $C = \{X : X > d\}$  y  $C' = \{X : X < L_3\}$ .

*Demostración.* Considerando  $G$  como en (5.29):



$$\begin{aligned}
E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) &= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(P - X - PR(d) + [\min(X, L_3) - d] I_C(X)) \\
&= P - E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X) - PR(d) + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}([\min(X, L_3) - d] I_C(X))
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Sean  $C = \{X : X > d\}$ ,  $C' = \{X : X < L_3\}$  y  $X_{rea} = [\min(X, L_3) - d]$ .

$$\begin{aligned}
E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}([\min[X, L_3] - d] I_C(X)) &= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{rea} | C) \Pr(C) \\
&= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{rea} | C \cap C') \Pr(C) \Pr(C' | C) + \\
&\quad + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X_{rea} | C \cap \bar{C}') \Pr(C) \Pr(\bar{C}' | C)
\end{aligned}$$

Como  $C \cap C' = \{X : d < X < L_3\}$  y  $C \cap \bar{C}' = \{X : X > L_3\}$  entonces

$$\begin{aligned}
E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}([\min[X, L_3] - d] I_C(X)) &= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X - d | C \cap C') \Pr(C \cap C') + \\
&\quad + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(L_3 - d | C \cap \bar{C}') \Pr(C \cap \bar{C}') \\
&= E_{X|\mathbf{Z}}(X - d | C \cap C') \Pr(d < X < L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad + E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(L_3 - d | C \cap \bar{C}') \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \\
&= E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(X | C \cap C') \Pr(d < X < L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad - d \Pr(d < X < L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad + (L_3 - d) \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N})
\end{aligned}$$

Con lo anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}([\min[X, L_3] - d] I_C(X)) &= \\
&E(X I_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N})
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Donde,

$$E(XI_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = \int_{C \cap C'} X p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX.$$

Sustituyendo el resultado (5.32) en (5.31) se obtiene que:

$$\begin{aligned} E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) &= P - E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - PR(d) + E(XI_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\ &+ L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \end{aligned}$$

□

**Proposición 5.3.2.** Sea  $E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G)$  una función diferenciable de  $d$ , su primera y segunda derivadas, respectivamente, son:

$$\frac{d}{dd} E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) = -\frac{d}{dd} PR(d) - \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \quad (5.33)$$

$$\frac{d^2}{dd^2} E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) = -\frac{d^2}{dd^2} PR(d) + p_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(d). \quad (5.34)$$

*Demostración.* De acuerdo con (5.30), la ganancia esperada para la cedente, viene dada por:

$$\begin{aligned} E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) &= P - E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - PR(d) + E(XI_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\ &+ L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \end{aligned}$$

con  $C = \{X : X > d\}$  y  $C' = \{X : X < L_3\}$ ,

cuya expresión explícita en forma de integrales es:

$$\begin{aligned} E_{X|Z,N}(G) &= P - E(X | Z, N) - PR(d) + \int_d^{L_3} X p(X | Z, N) dX + \\ &+ L_3 \int_{L_3}^{\infty} p(X | Z, N) dX - d \int_d^{\infty} p(X | Z, N) dX. \end{aligned}$$

Derivando respecto de  $d$  se obtiene:

$$\frac{d}{dd} E_{X|Z,N}(G) = -\frac{d}{dd} PR(d) - \Pr(X > d | Z, N)$$

Derivando la expresión anterior, nuevamente respecto de  $d$ , se obtiene:

$$\frac{d^2}{dd^2} E_{X|Z,N}(G) = -\frac{d^2}{dd^2} PR(d) + p_{X|Z,N}(d).$$

□

**Proposición 5.3.3.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de stop loss, en el que la prima de reaseguro,  $PR$ , no depende de la prioridad,  $d$ , la prioridad óptima a retener por la cedente viene dado por  $d^* = 0$ .*

*Demostración.* De acuerdo con (5.33), la primera derivada de la ganancia esperada respecto de  $d$  es:

$$\frac{d}{dd} E_{X|Z,N}(G) = -\frac{d}{dd} PR(d) - \Pr(X > d | Z, N)$$

Ahora bien, si la prima de reaseguro,  $PR$ , no depende de  $d$ , entonces

$$\frac{d}{dd}PR(d) = 0$$

y, por tanto,

$$\frac{d}{dd}E_{X|Z,N}(G) < 0.$$

Así, la ganancia esperada,  $E_{X|Z,N}(G)$ , es una función decreciente de  $d$ . Por lo que el deducible óptimo para la cedente se obtiene en  $d^* = 0$ . Es decir, el reaseguro óptimo en este caso consiste en no retener riesgo alguno.  $\square$

También en este caso consideramos que la prima de reaseguro,  $PR$ , debe estar relacionada con la prioridad,  $d$ . De acuerdo con el apartado 4.8.2, la relación que existe entre  $PR(d)$  y  $d$  es inversa, de donde,

$$\frac{d}{dd}PR(d) < 0. \tag{5.35}$$

Es decir,  $PR(d)$  es decreciente de  $d$ .

A continuación analizamos los deducibles óptimos obtenidos con base en las distintas formas en que podría comportarse  $PR$  respecto de  $d$ .

Debido a la similitud entre los reaseguros exceso de pérdida por riesgo y stop loss, los resultados óptimos que se obtienen en ambos son equivalentes, considerando que en el primero se tomará en cuenta el monto individual de siniestros, no así en el reaseguro stop loss en el que el interés se centra en los montos totales. Por tanto, los resultados y sus demostraciones son análogos y se presentan a continuación.

**Proposición 5.3.4.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de reaseguro stop loss, en el que la prima de reaseguro,  $PR(d)$ , es una función lineal o cóncava de la prioridad,  $d$ , la prioridad óptima a retener por la cedente viene dado por:*

a.  $d^* = 0$ , si

$$PR(0) < \int_0^{L_3} X p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX + L_3 \int_{L_3}^{\infty} p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX.$$

b.  $d^* = L_3$ , si

$$PR(0) > \int_0^{L_3} X p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX + L_3 \int_{L_3}^{\infty} p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX.$$

*Demostración.* i. Sea  $PR(d)$  una función lineal, decreciente de  $d$ ,

$$PR = a + bd,$$

con  $b < 0$ .

Entonces,

$$\frac{d}{dd} PR(d) = b$$

Así, de acuerdo con (5.33) y (5.34),

$$\frac{d}{dd} E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) = -b - \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$$

y

$$\frac{d^2}{dd^2} E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) = p_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(d) > 0.$$

De acuerdo con lo anterior, la ganancia esperada  $E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G)$  es una función convexa de  $d$ .

ii. Si  $PR$  es cóncava de  $d$ , entonces:

$$\frac{d^2}{dM^2}PR(d) < 0.$$

Por tanto, de acuerdo con (5.34):

$$\frac{d^2}{dd^2}E_{X|Z,N}(G) = -\frac{d^2}{dd^2}PR(d) + p_{X|Z,N}(d) > 0. \quad (5.36)$$

Es decir, la ganancia esperada es una función convexa de  $d$ .

Entonces, si  $PR(d)$  es lineal o cóncava de  $d$ , la ganancia esperada es una función convexa. Por lo que, si existe  $d_0$  que haga que la primera derivada de la ganancia esperada se iguale a cero, esto es,  $d_0$  tal que:

$$-\frac{d}{dd}PR(d) = \Pr(X > d | Z, N)$$

$d_0$  es mínimo.

Por lo anterior, el deducible que maximiza la ganancia esperada solamente podrá ser  $d^* = 0$  ó  $d^* = L_3$ . Por lo que el problema de encontrar el deducible óptimo consiste en comparar la ganancia esperada en ambos casos.

De acuerdo con (5.30), la ganancia esperada,  $E_{X|Z,N}(G)$ , viene dada por:

$$\begin{aligned} E_{X|Z,N}(G) &= P - E(X | Z, N) - PR(d) + E(XI_{C \cap C'}(X) | Z, N) + \\ &+ L_3 \Pr(X > L_3 | Z, N) - d \Pr(X > d | Z, N) \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde,  $C = \{X : X > d\}$  y  $C' = \{X : X < L_3\}$ .

Por tanto, si  $d = 0$ , de acuerdo con (5.37), la ganancia esperada para la cedente es:

$$\begin{aligned}
E_{X|Z,N}(G(d=0)) &= P - E(X | Z, N) - PR(0) + \int_0^{L_3} X p(X | Z, N) dX + \\
&\quad + L_3 \int_{L_3}^{\infty} p(X | Z, N) dX
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Por su parte, si  $d = L_3$ , la cedente no reasegura el portafolio, por lo que  $PR(L_3) = 0$ . Así, de acuerdo con (5.37), la ganancia esperada para la cedente es:

$$E_{X|Z,N}(G(d=L_3)) = P - E(X | Z, N). \tag{5.39}$$

Ahora bien,

a. El deducible óptimo es  $d^* = 0$ , si

$$E_{X|Z,N}(G(d=0)) > E_{X|Z,N}(G(d=L_3)).$$

Es decir, si:

$$PR(0) < \int_0^{L_3} X p(X | Z, N) dX + L_3 \int_{L_3}^{\infty} p(X | Z, N) dX.$$

b. El deducible óptimo es  $d^* = L_3$ , si

$$E_{X|Z,N}(G(d=L_3)) > E_{X|Z,N}(G(d=0)).$$

Es decir, si:



$$PR(0) > \int_0^{L_3} X p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX + L_3 \int_{L_3}^{\infty} p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX.$$

□

**Proposición 5.3.5.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de reaseguro stop loss, en el que la prima de reaseguro,  $PR$ , es una función convexa de la prioridad,  $d$ , si existe  $d^* \in [0, L_3]$  que verifique:*

$$-\frac{d}{dd}PR(d) = \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \quad (5.40)$$

será máximo si:

$$p_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(d) < \frac{d^2}{dd^2}PR(d).$$

*Demostración.* Para analizar la ganancia esperada por la cedente,  $E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G)$ , nos basamos en su primera derivada respecto de  $d$  que, de acuerdo con (5.33), es:

$$\frac{d}{dd}E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) = -\frac{d}{dd}PR(d) - \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}). \quad (5.41)$$

De acuerdo con el apartado 4.8.2, la relación que existe entre  $PR(d)$  y  $d$  es inversa, de donde,

$$\frac{d}{dd}PR(d) < 0.$$

Es decir,  $PR(d)$  es decreciente de  $d$ .

Por tanto, es posible plantear que, si existe un valor  $d^* \in (0, L_3)$ , que haga

$$\frac{d}{dd} E_{X|Z,N}(G) = 0,$$

es tal que verifique:

$$-\frac{d}{dd} PR(d) = \Pr(X > d | Z, N).$$

Comprobar que  $d^*$  es un máximo requiere analizar la segunda derivada de la ganancia esperada, la cual, con base en (5.34), es:

$$\frac{d^2}{dd^2} E_{X|Z,N}(G) = -\frac{d^2}{dd^2} PR(d) + p_{X|Z,N}(d). \quad (5.42)$$

Si  $PR(d)$  es convexa de  $d$ ,

$$\frac{d^2}{dd^2} PR(d) > 0.$$

En tal caso, con base en (5.42), es posible que  $d^*$  sea máximo si verifica:

$$p_{X|Z,N}(d) < \frac{d^2}{dd^2} PR(d).$$

□

En el reaseguro stop loss, el valor óptimo para  $d$  depende tanto del principio de cálculo de la prima de reaseguro,  $PR(d)$ , como de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros  $p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$  que, como se ha visto, no es posible obtener analíticamente.

Como se ha mostrado, una elección de prima de reaseguro,  $PR(d)$ , lineal o cóncava respecto de  $d$  lleva a resultados óptimos extremos, esto es,  $d^* = 0$  ó  $d^* = L_3$ . Por lo que, una elección de  $d^*$  óptima fuera de esos valores, sólo se daría con  $PR(d)$  convexa de  $d$ .

La prima de reaseguro calculada tanto con el principio del valor esperado como con el exponencial es convexa de la retención (Kaluszka, 2005).

Con objeto de presentar las soluciones que se obtienen bajo dichos principios, a continuación se presenta el resultado considerando que la prima de reaseguro se determina con base en el principio exponencial. Por su parte, los resultados obtenidos cuando la prima de reaseguro se calcula con base en el principio del valor esperado se presentan en el siguiente capítulo, mediante una aplicación práctica.

**Proposición 5.3.6.** *Si una cedente se plantea reasegurar un portafolio de seguros de vida mediante un contrato de reaseguro stop loss, en el que la prima de reaseguro  $PR(d)$ , se calcula con base en el principio de utilidad exponencial y el límite máximo de responsabilidad,  $L_3$ , es lo suficientemente grande para que el reasegurador participe en la totalidad de la pérdida que supera la prioridad  $d$ , el resultado óptimo es reasegurar todo el portafolio.*

*Demostración.* Bajo el principio exponencial (apartado 4.8.2), según (4.83), la prima de reaseguro se determina como:

$$PR(d) = \frac{1}{a} \log \frac{E[\exp(aX) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]}{E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]} \quad (5.43)$$

con  $a > 0$ .

Puesto que (5.43) es una función convexa de  $d$ , de acuerdo con base en la proposición 5.3.5, si existe un deducible óptimo  $d^* \in [0, L_3]$  es tal que verifique (5.40),

$$-\frac{d}{dd}PR(d) = \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \quad (5.44)$$

Ahora bien, derivando  $PR(d)$ , ecuación (5.43), con respecto a  $d$ , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dd}PR(d) &= -\frac{1}{a} \frac{E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]}{E[\exp(aX) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]} \frac{d}{dd} \frac{E[\exp(aX) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]}{E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]} \\ &= -\frac{1}{aE[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]} \frac{d}{dd} E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}] \end{aligned} \quad (5.45)$$

Encontrar  $d^*$  requiere determinar (5.45). Puesto que no es posible conocer analíticamente la función generadora de momentos del monto agregado de siniestros retenidos, su derivada será aproximada sustituyendo la función exponencial por su expansión en serie de potencias hasta el grado 2, de tal forma que:

$$\frac{d}{dd} E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}] = \frac{d}{dd} \left( 1 + aE(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2!} E(X_{ret}^2 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \right)$$

De acuerdo con la expresión (4.45)

$$X_{ret} = X - X_{rea}$$

Y, por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dd} E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}] &= \frac{d}{dd} \left( 1 + aE(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2!} E(X_{ret}^2 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \right) \\
&= a \frac{d}{dd} E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2!} \frac{d}{dd} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad + \frac{a^2}{2!} \frac{d}{dd} E^2(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \\
&= -a \frac{d}{dd} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \frac{a^2}{2} \frac{d}{dd} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad - a^2 E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \frac{d}{dd} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \\
&= -a \frac{d}{dd} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) (1 + aE(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})) + \\
&\quad + \frac{a^2}{2} \frac{d}{dd} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})
\end{aligned}$$

Sustituyendo el resultado anterior en (5.45), tenemos:

$$\frac{d}{dd} PR(d) = \frac{\frac{d}{dd} E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) (1 + aE(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})) - \frac{a}{2} \frac{d}{dd} \text{Var}(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})}{E[\exp(aX_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}]}. \quad (5.46)$$

Por otro lado, según la expresión (4.57), el monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro stop loss es:

$$X_{rea} = [\min(X, L_3) - d] I_C(X)$$

con  $C = \{X : X > d\}$ .

Y, de acuerdo con (4.67), su esperanza viene dada por:

$$\begin{aligned}
E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \\
&E(X I_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}).
\end{aligned}$$

Derivando  $E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$  con respecto a  $d$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dd}E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \\
 &= \frac{d}{dd} [E(XI_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N})] \\
 &= \frac{d}{dd} \int_d^{L_3} X p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX - \frac{d}{dd} d \int_d^{\infty} X p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + L_3 \int_{L_3}^{\infty} p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX \\
 &= -\Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}).
 \end{aligned}$$

Por tanto, en un reaseguro stop loss

$$\frac{d}{dd}E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = -\Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}). \quad (5.47)$$

Con base en lo anterior, que la expresión (5.46) cumpla la condición de optimalidad (5.44) requiere:

$$\frac{d}{dd}PR(d) = \frac{d}{dd}E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}).$$

Observemos que, en (5.46), esto se cumple cuando  $X_{ret} = 0$ , ya que el límite máximo de responsabilidad,  $L_3$ , es lo suficientemente grande para que el reasegurador participe en la totalidad de la pérdida que supera la prioridad  $d$ . Es decir, el reaseguro óptimo se consigue reasegurando todo el portafolio.

□

Al igual que en los otros contratos, el reaseguro óptimo stop loss también dependerá de la prima que la cedente cobre a sus asegurados,  $P$ . Por ejemplo, si suponemos que  $P$  se elige como el valor esperado de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 5.3.7.** *Si una cedente se plantea un reaseguro stop loss para un portafolio de seguros de vida, en el que la prima que cobra a sus asegurados es:*

$$P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}),$$

*la prioridad óptima a retener por la cedente viene dada por:*

- i. Si  $PR(d) > E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,  $d^* = L_3$ .*
- ii. Si  $PR(d) = E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,  $d^* = d \forall d \in [0, L_3]$ .*
- iii. Si  $PR(d) < E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,  $d^*$  que maximice la ganancia esperada,  $E_{X|\mathbf{N},\mathbf{Z}}(G)$ .*

*Demostración.* Sabemos, por la proposición 5.3.1, que la ganancia esperada para la cedente en un reaseguro stop loss viene dada por:

$$E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) = P - E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - PR(d) + E(XI_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \quad (5.48)$$

donde,  $C = \{X : X > d\}$  y  $C' = \{X : X < L_3\}$ .

Por otro lado, de acuerdo con (4.67), el valor esperado del monto agregado de siniestros recuperados es:

$$E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(XI_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}).$$

Usando el resultado anterior, es posible reescribir la ganancia esperada, (5.48), como:

$$E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) = P - E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - PR(d) + E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$$

Si, además, se considera que  $P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ,

$$E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) = E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - PR(d). \quad (5.49)$$

Por tanto:

i. Si  $PR(d) > E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , de acuerdo con (5.49),

$$E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) < 0.$$

Por otra parte, si la cedente decide no contratar un reaseguro stop loss bajo estas condiciones, obviamente,  $PR(L_3) = 0$ . Por lo que, de acuerdo con (5.48):

$$E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) = P - E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 0$$



Con base en lo anterior se puede concluir que la ganancia esperada bajo estas condiciones, será mayor si la cedente decide no reasegurar el portafolio. Es decir, la prioridad óptima es  $d^* = L_3$ .

ii. Si  $PR(d) = E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , de acuerdo con (5.49),

$$E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) = E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - PR(d) = 0.$$

Por tanto, cualquier prioridad  $d \in [0, L_3]$  que elija la cedente resulta equivalente.

iii. Si  $PR(d) < E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , de acuerdo con (5.49),

$$E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) > 0.$$

En ese caso, la cedente se planteará un reaseguro stop loss y el optimo será  $d^*$  que maximice la ganancia esperada,

$$E_{X|\mathbf{Z},\mathbf{N}}(G) = P - E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - PR(d) + E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$$

□

Un criterio alternativo para la determinación de la prioridad óptima se presenta a continuación.

### 5.3.1. Reaseguro óptimo stop loss bajo un esquema de aversión al riesgo

Como se ha planteado, en la proposición 4.8.1, el principio del valor esperado, que consiste en considerar

$$P = X_{\rho_1},$$

se obtiene planteándolo como un problema de decisión al considerar que las preferencias de la cedente se reflejan en la función de utilidad (4.78)

$$u(P, X) = (P - X) (b_1 I_{(-\infty, X)}(P) - b_2 (1 - I_{(-\infty, X)}(P)))$$

con  $\rho_1 = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$ .

Para resolver el problema de reaseguro óptimo, la cedente, teóricamente, estará interesada en el resultado final de su operación. Es decir, considerando las primas que pagará al reasegurador  $PR$  y el monto agregado de siniestros que recuperará,  $X_{rea}$ , estará interesada tanto en la prima que finalmente recibirá, **la prima de retención**

$$P_{ret} = P - PR,$$

como en **el monto agregado de siniestros retenidos**

$$X_{ret} = X - X_{rea}.$$

Reflejando este hecho en la función de utilidad (4.78), podemos considerar que, para el problema de decisión planteado en el apartado 4.1, las preferencias de la cedente se reflejan en la función de utilidad

$$u(P_{ret}, X_{ret}) = (P_{ret} - X_{ret}) (b_1 I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret}) - b_2 (1 - I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret}))). \quad (5.50)$$

Por tanto, la acción bayes será aquella que maximice  $E_{X|Z, N}(u(P_{ret}, X_{ret}))$ .

**Proposición 5.3.8.** *En el problema de decisión planteado para encontrar el reaseguro óptimo. Si consideramos la función de utilidad (5.50), la  $E_{X|Z, N}(u(P_{ret}, X_{ret}))$  se calcula como*

$$b_1 P_{ret} - P_{ret} (b_1 + b_2) F_{X_{ret}|Z, N}(P_{ret}) + b_2 E(X_{ret} | Z, N) + \\ - (b_1 + b_2) E(X_{ret} I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret}) | Z, N) \quad (5.51)$$

*Demostración.* De acuerdo con (5.50)

$$u(P_{ret}, X_{ret}) = (P_{ret} - X_{ret}) (b_1 I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret}) - b_2 (1 - I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret}))).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E_{X|Z, N}(u(P_{ret}, X_{ret})) &= \\ &= E_{X|Z, N} [(P_{ret} - X_{ret}) (b_1 I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret}) - b_2 (1 - I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret})))] \\ &= b_1 P_{ret} E_{X|Z, N}(I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret})) - b_2 P_{ret} E_{X|Z, N}(1 - I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret})) + \\ &\quad - b_1 E_{X|Z, N}(X_{ret} I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret})) + b_2 E_{X|Z, N}(X_{ret} (1 - I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret}))) \\ &= b_1 P_{ret} \Pr(P_{ret} < X_{ret} | Z, N) - b_2 P_{ret} \Pr(P_{ret} > X_{ret} | Z, N) + \\ &\quad - b_1 E_{X|Z, N}(X_{ret} I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret})) + b_2 E_{X|Z, N}(X_{ret}) + \\ &\quad - b_2 E_{X|Z, N}(X_{ret} I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret})) \\ &= b_1 P_{ret} - P_{ret} (b_1 + b_2) F_{X_{ret}|Z, N}(P_{ret}) + b_2 E(X_{ret} | Z, N) + \\ &\quad - (b_1 + b_2) E(X_{ret} I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret}) | Z, N) \end{aligned}$$

□

## Determinación de la prioridad óptima

La solución a la prioridad óptima en un reaseguro stop loss, bajo un esquema de aversión al riesgo, será aquella  $d$  que maximice la ganancia esperada de la cedente obtenida en (5.51).

$$\begin{aligned} E_{X|Z,N}(u(P_{ret}, X_{ret})) &= b_1 P_{ret} - P_{ret} (b_1 + b_2) F_{X_{ret}|Z,N}(P_{ret}) + b_2 E(X_{ret} | Z, N) + \\ &\quad - (b_1 + b_2) E(X_{ret} I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret}) | Z, N) \end{aligned}$$

**Proposición 5.3.9.** *En el problema de decisión planteado, en este apartado, para el reaseguro stop loss,  $E_{X|Z,N}(u(P_{ret}, X_{ret}))$  viene dada por:*

$$\begin{aligned} &b_1 P_{ret} - P_{ret} (b_1 + b_2) F_{X_{ret}|Z,N}(P_{ret}) + b_2 [E(X | Z, N) - E(X I_{C \cap C'}(X) | Z, N)] + \\ &- b_2 [L_3 \Pr(X > L_3 | Z, N) - d \Pr(X > d | Z, N)] - (b_1 + b_2) [d \Pr(P_{ret} < d < X < L_3 | Z, N)] + \\ &- (b_1 + b_2) [E(X I_{C_2}(X) | Z, N) + E(X I_{C_3}(X) | Z, N) - (L_3 - d) \Pr(X > L_3 | Z, N)] + \\ &+ (b_1 + b_2) [(L_3 - d) \Pr(X > L_3 + P_{ret} - d) - E(X I_{C_4}(X) | Z, N)] \end{aligned} \tag{5.52}$$

*Demostración.* De forma general, como se establece en (5.52),  $E_{X|Z,N}(u(P_{ret}, X_{ret}))$  se calcula como:

$$\begin{aligned} &b_1 P_{ret} - P_{ret} (b_1 + b_2) F_{X_{ret}|Z,N}(P_{ret}) + b_2 E(X_{ret} | Z, N) + \\ &\quad - (b_1 + b_2) E(X_{ret} I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret}) | Z, N) \end{aligned} \tag{5.53}$$

En particular, en un reaseguro stop loss, de acuerdo con (4.68),

$$\begin{aligned}
E(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + E(XI_{C \cap \bar{C}'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad - L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + E(XI_{\bar{C}}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) \\
&= E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - E(XI_{C \cap C'}(X) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
&\quad - L_3 \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + d \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N})
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Por su parte:

$$\begin{aligned}
E(X_{ret} I_{(-\infty, X_{ret})}(P_{ret}) | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) &= \\
&= E_{X|\mathbf{Z}, \mathbf{N}}(X_{ret} | D) \Pr(D) \\
&= E_{X|\mathbf{Z}, \mathbf{N}}(X_{ret} | C \cap D) \Pr(C \cap D) + E_{X|\mathbf{Z}, \mathbf{N}}(X_{ret} | \bar{C} \cap D) \Pr(\bar{C} \cap D) \\
&= E_{X|\mathbf{Z}, \mathbf{N}}(X_{ret} | C \cap C' \cap D) \Pr(C \cap C' \cap D) + \\
&\quad + E_{X|\mathbf{Z}, \mathbf{N}}(X_{ret} | C \cap \bar{C}' \cap D) \Pr(C \cap \bar{C}' \cap D) + \\
&\quad + E_{X|\mathbf{Z}, \mathbf{N}}(X_{ret} | \bar{C} \cap D) \Pr(\bar{C} \cap D) \\
&= E_{X|\mathbf{Z}, \mathbf{N}}(X_{ret} | C_1) \Pr(C_1) + E_{X|\mathbf{Z}, \mathbf{N}}(X_{ret} | C_2) \Pr(C_2) + \\
&\quad + E_{X|\mathbf{Z}, \mathbf{N}}(X_{ret} | C_3) \Pr(C_3) + E_{X|\mathbf{Z}, \mathbf{N}}(X_{ret} | C_4) \Pr(C_4)
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
C &= \{X : X > d\}, C' = \{X : X < L_3\}, D = \{X_{ret} : X_{ret} > P_{ret}\}, E = \{d : d > P_{ret}\}, \\
C_1 &= \{C \cap C' \cap D\} = \{X : P_{ret} < d < X < L_3\}, C_2 = \{C \cap \bar{C}' \cap D \cap E\} = \{X : X > L_3\}, \\
C_3 &= \{C \cap \bar{C}' \cap D \cap \bar{E}\} = \{X : X > L_3 + P_{ret} - d\} \text{ y} \\
C_4 &= \{\bar{C} \cap D\} = \{X : P_{ret} < X < d\}.
\end{aligned}$$

Haciendo explícito el cálculo de las esperanzas involucradas:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} (X_{ret} I_{(-\infty, X_{ret})} (P_{ret}) \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = \\
& = \mathbb{E}_{X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (d \mid C_1) \Pr (C_1) + \mathbb{E}_{X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (X - L_3 + d \mid C_2) \Pr (C_2) + \\
& \quad + \mathbb{E}_{X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (X - L_3 + d \mid C_3) \Pr (C_3) + \mathbb{E}_{X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (X - L_3 + d \mid C_4) \Pr (C_4) \\
& = \mathbb{E}_{X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (d \mid C_1) \Pr (C_1) + \mathbb{E}_{X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (X - L_3 + d \mid C_2) \Pr (C_2) + \\
& \quad + \mathbb{E}_{X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (X - L_3 + d \mid C_3) \Pr (C_3) + \mathbb{E}_{X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (X \mid C_4) \Pr (C_4)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} (X_{ret} I_{(-\infty, X_{ret})} (P_{ret}) \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = \\
& = d \Pr (P_{ret} < d < X < L_3 \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \mathbb{E} (X I_{C_2} (X) \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
& \quad + \mathbb{E} (X I_{C_3} (X) \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - (L_3 - d) \Pr (X > L_3 \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
& \quad - (L_3 - d) \Pr (X > L_3 + P_{ret} - d) + \mathbb{E} (X I_{C_4} (X) \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N})
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Sustituyendo (5.54) y (5.55) en (5.53) se obtiene  $\mathbb{E}_{X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (u (P_{ret}, X_{ret}))$ :

$$\begin{aligned}
& b_1 P_{ret} - P_{ret} (b_1 + b_2) F_{X_{ret} \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (P_{ret}) + b_2 [\mathbb{E} (X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - \mathbb{E} (X I_{C \cap C'} (X) \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N})] + \\
& - b_2 [L_3 \Pr (X > L_3 \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - d \Pr (X > d \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N})] - (b_1 + b_2) [d \Pr (P_{ret} < d < X < L_3 \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N})] + \\
& - (b_1 + b_2) [\mathbb{E} (X I_{C_2} (X) \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \mathbb{E} (X I_{C_3} (X) \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - (L_3 - d) \Pr (X > L_3 \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N})] + \\
& + (b_1 + b_2) [(L_3 - d) \Pr (X > L_3 + P_{ret} - d) - \mathbb{E} (X I_{C_4} (X) \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N})]
\end{aligned}$$

□

La prioridad  $d$  óptima, bajo este esquema, es aquella que maximiza la ganancia esperada, cuya expresión es (5.52). La maximización consiste en encontrar  $d$  que consiga igualar la primera derivada de (5.52) a cero, esto es,

$$\frac{d}{dd} E_{X|Z,N} (u(P_{ret}, X_{ret})),$$

cuya expresión se determina a continuación:

**Proposición 5.3.10.** *La expresión  $\frac{d}{dd} E_{X|Z,N} (u(P_{ret}, X_{ret}))$  tiene la solución:*

$$\begin{aligned} & -b_1 \frac{d}{dd} PR + (b_1 + b_2) \frac{d}{dd} PR \Pr(X_{ret} < P_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + (b_1 + b_2) (P - PR) \frac{d}{dd} PR p_{x_{ret}|Z,N} (P - PR) + \\ & + b_2 \Pr(X > d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - (b_1 + b_2) \Pr(d < X < L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - (b_1 + b_2) (P - PR) \\ & \quad \times p_{x|Z,N} (L_3 + P - PR - d) \left( \frac{d}{dd} PR + 1 \right) - (b_1 + b_2) \Pr(X > L_3 | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\ & - (b_1 + b_2) \left[ \Pr(X > L_3 + P - PR - d | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + (P - PR) \frac{d}{dd} PR p_{x|Z,N} (P - PR) \right] \end{aligned}$$

*Demostración.* Haciendo explícitos los términos involucrados en (5.52)

$$\begin{aligned} & b_1 (P - PR) - (P - PR) (b_1 + b_2) \int_0^{P-PR} p(X_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX_{ret} + b_2 \int_0^\infty X p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX + \\ & - b_2 \left[ \int_d^{L_3} X p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX + L_3 \int_{L_3}^\infty p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX - d \int_d^\infty p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX \right] - (b_1 + b_2) \\ & \times \left[ d \int_d^{L_3} p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX + \int_{L_3}^\infty X p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX + \int_{L_3+P-PR-d}^\infty X p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX \right] + \\ & + (b_1 + b_2) \left[ (L_3 - d) \int_{L_3}^\infty p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX + (L_3 - d) \int_{L_3+P-PR-d}^\infty p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX \right] + \\ & - (b_1 + b_2) \int_{P-PR}^d X p(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) dX \end{aligned}$$

Derivando con respecto a  $d$ :

$$\begin{aligned}
& -b_1 \frac{d}{dd} PR + (b_1 + b_2) \frac{d}{dd} PR \Pr(X_{ret} < P_{ret} \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + (b_1 + b_2) (P - PR) \frac{d}{dd} PR p_{x_{ret} \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (P - PR) + \\
& + b_2 \Pr(X > d \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - (b_1 + b_2) \Pr(d < X < L_3 \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - (b_1 + b_2) (L_3 + P - PR - d) \\
& \quad \times p_{x \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (L_3 + P - PR - d) \left( \frac{d}{dd} PR + 1 \right) - (b_1 + b_2) \Pr(X > L_3 \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
& - (b_1 + b_2) \left[ \Pr(X > L_3 + P - PR - d \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - (L_3 - d) p_{x \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (L_3 + P - PR - d) \left( \frac{d}{dd} PR + 1 \right) \right] + \\
& - (b_1 + b_2) (P - PR) \frac{d}{dd} PR p_{x \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (P - PR)
\end{aligned}$$

Finalmente, resolviendo los términos y simplificando, se obtiene como

$$\frac{d}{dd} E_{X \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (u(P_{ret}, X_{ret})) :$$

$$\begin{aligned}
& -b_1 \frac{d}{dd} PR + (b_1 + b_2) \frac{d}{dd} PR \Pr(X_{ret} < P_{ret} \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + (b_1 + b_2) (P - PR) \frac{d}{dd} PR p_{x_{ret} \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (P - PR) + \\
& + b_2 \Pr(X > d \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - (b_1 + b_2) \Pr(d < X < L_3 \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) - (b_1 + b_2) (P - PR) \\
& \quad \times p_{x \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (L_3 + P - PR - d) \left( \frac{d}{dd} PR + 1 \right) - (b_1 + b_2) \Pr(X > L_3 \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + \\
& - (b_1 + b_2) \left[ \Pr(X > L_3 + P - PR - d \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}) + (P - PR) \frac{d}{dd} PR p_{x \mid \mathbf{Z}, \mathbf{N}} (P - PR) \right]
\end{aligned}$$

□



# Capítulo 6

## Aplicación práctica

Con el fin de ejemplificar el análisis del reaseguro óptimo, a continuación se presenta un caso práctico en el que se propone soluciones a partir de los modelos supuestos para las variables del número y monto de siniestros.

Consideremos que una compañía debe elegir la retención óptima para un portafolio de vida colectivo.

Teniendo en cuenta toda la información disponible y de acuerdo con el modelo de decisión planteado en el capítulo anterior, el asegurador directo deberá decidir, en cada tipo de reaseguro, la proporción,  $k$ , o el deducible,  $M$ , que retendrá en cada siniestro. O bien, la prioridad  $d$  que retendrá sobre el monto total de ellos. Una vez elegida la retención óptima en cada tipo de reaseguro, se realiza la comparación que permite resolver el análisis global.

Los resultados que se presentan son obtenidos a partir de la evaluación de sendas distribuciones predictivas correspondientes en cada uno de los modelos presentados en el capítulo anterior. En algunos casos, no ha sido posible su evaluación analítica, para éstos, se utilizaron métodos numéricos que permitieran resolver el problema.

## 6.1. Datos

Se cuenta con experiencia en siniestralidad de una compañía de seguros, tanto para el número como para el monto de siniestros del mismo tipo de riesgo, correspondiente a  $n = 9$  portafolios de seguro de vida colectivo.

Para mantener la confidencialidad de la fuente, no se revela el nombre de la compañía de seguros, así como tampoco el período exacto de tiempo al cual pertenecen, ni los montos en la unidad monetaria que corresponde.

El **número de siniestros** de cada portafolio se presenta en la Tabla 6.1.

**Tabla 6.1:** Número de siniestros

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N_j$	1.491	1.456	1.416	1.517	1.545	1.341	1.166	1.224	1.018

La media y la desviación típica de los datos presentados en la Tabla 6.1 son:

$$\bar{N} = 1.352,67$$

$$S_N = 180,75$$

El número total de siniestros en los 9 portafolios es

$$m = \sum_{j=1}^n N_j = 12.174.$$

El número de pólizas en cada portafolio es  $R = 2.020.000$ .

Para el **monto individual de siniestros** tenemos una muestra de tamaño  $N_j$  para cada portafolio y, por tanto, un total de  $m = 12.174$  registros. Debido a su tamaño, no incluiremos dicha muestra en este trabajo, pero sí un resumen de su comportamiento.

Con el fin de simplificar los cálculos computacionales, todos los montos que consideraremos se presentan en miles de euros, considerando que es una escala razonable, tanto para la presentación de los resultados, como para la realización de cálculos.

Dada su independenciam, hemos considerado el monto individual de siniestros como una sola muestra,  $Z$ , de tamaño  $m$ , cuyo histograma se presenta en la Figura 6.1. La media y la desviación típica de dicha muestra son:

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= 16,367 \\ S_Z &= 20,903\end{aligned}$$

La información resumida para el monto individual de siniestros de cada portafolio,  $Z_j$ , puede verse en el apéndice C.

Con la información del número y monto individual de siniestros, tenemos el **monto agregado de siniestros** para cada portafolio,  $X_j = \sum_{i=1}^{N_j} Z_{ji}$ . Dichas cantidades se muestran en la Tabla 6.2, cuya media y desviación típica son,

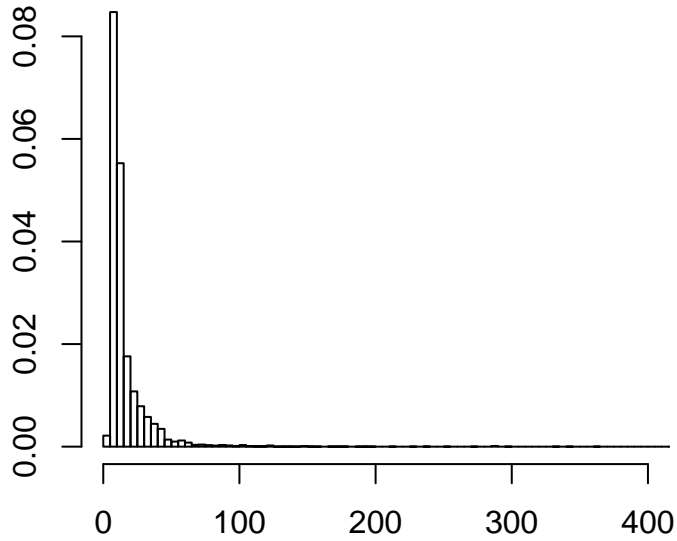
$$\begin{aligned}\bar{X} &= 22.139 \\ S_X &= 2.024,\end{aligned}$$

respectivamente.

**Tabla 6.2:** Monto agregado de siniestros

1	2	3	4	5	6	7	8	9
23.038	25.192	21.772	21.205	22.252	19.284	20.541	25.161	20.804

A continuación se presenta la primera parte del análisis, que consiste, en realizar



**Figura 6.1:** Histograma del monto individual de siniestros

inferencia bayesiana para las variables aleatorias relacionadas con el problema de reaseguro óptimo.

## 6.2. Distribuciones predictivas del número de siniestros

### *Distribuciones predictivas de $N_{n+1}$ suponiendo un Modelo Poisson*

Utilizando la distribución previa mínimo informativa (4.11), se obtiene que la distribución predictiva para el número de siniestros del portafolio  $n+1$ , de acuerdo con (4.26), es

$$\text{Pg} \left( N_{n+1} \mid 12.174 + \frac{1}{2}, \frac{1}{9}, 1 \right).$$

Por tanto, el número esperado de siniestros en el portafolio  $n + 1$  será de:

$$E(N_{n+1} \mid \mathbf{N}) = 1.352,72$$

y su desviación típica:

$$\text{DT}(N_{n+1} \mid \mathbf{N}) = 38,77$$

Por su parte, el uso de distribuciones previas conjugadas permite incorporar la información de los expertos en el problema. En este caso, con la información proporcionada por la cedente se puede afirmar que:

$$E(\lambda) = 1.346 = \gamma\nu$$

ya que espera obtener 1 siniestro de cada 1.500 asegurados. De forma análoga se puede establecer que:

$$P[\lambda \leq 1.682] = 0,95.$$

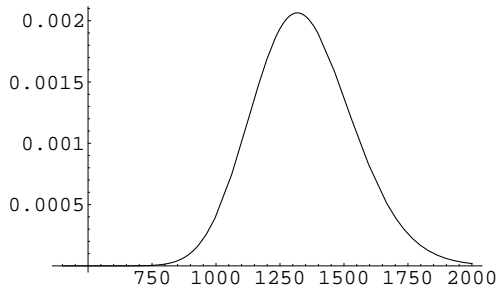
Considerando lo anterior, y resolviendo las ecuaciones involucradas, se obtiene

que los valores para los hiperparámetros de la distribución previa (4.12) son:

$$\gamma = 47,6419$$

$$\nu = 28,2525$$

En la Figura 6.2 representamos gráficamente la distribución inicial conjugada para el parámetro  $\lambda$ , que es una distribución  $\text{Ga}(47,6419, 28,2525)$ .



**Figura 6.2:** Distribución Inicial Conjugada para el parámetro  $\lambda$

La distribución predictiva que se obtiene en este caso para el número de siniestros es

$$\text{Pg} \left( N_{n+1} \mid 12.221,64, \left( 9 + \frac{1}{28,2525} \right)^{-1}, 1 \right).$$

Cuyo valor esperado y desviación típica son:

$$E(N_{n+1} \mid \mathbf{N}) = 1.352,64$$

$$\text{DT}(N_{n+1} \mid \mathbf{N}) = 38,76$$

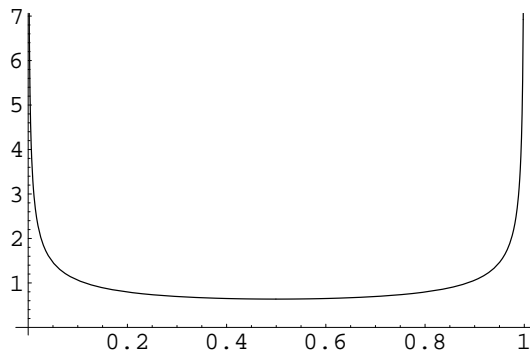
### ***Distribuciones predictivas de $N_{n+1}$ suponiendo un Modelo Binomial***

En este apartado se presentan las distribuciones predictivas obtenidas al suponer que  $N_{n+1}$  sigue una distribución  $\text{Bi}(R, \phi)$ . Con  $R = 2.020.000$ .

De acuerdo con (4.13), la distribución previa mínimo informativa obtenida se presenta en la Figura 6.3. Su valor esperado y desviación típica son:

$$E(\phi) = 0.5$$

$$DT(\phi) = 0.353553$$



**Figura 6.3:** Distribución previa mínimo informativa para el parámetro  $\phi$

Utilizando la información de la muestra, de acuerdo con (4.20), la distribución posterior que se obtiene para el parámetro  $\phi$  es una

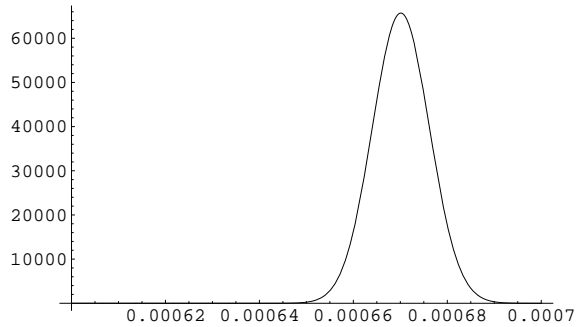
$Beta(\phi | 12.174 + \frac{1}{2}, 18.154.425 + \frac{1}{2})$  cuya gráfica se presenta en la Figura 6.4.

La esperanza y la desviación típica a-posteriori que se obtienen para la probabilidad de ocurrencia de un siniestro,  $\phi$ , son:

$$E(\phi | N, 2.020.000) = 0,0006706$$

$$DT(\phi | N, 2.020.000) = 0,0000061$$

Finalmente, con esta información, y de acuerdo con (4.28), se obtuvo que la dis-



**Figura 6.4:** Distribución posterior para el parámetro  $\phi$  utilizando previa mínimo informativa

tribución predictiva para el número de siniestros es

$$\text{Bb} \left( N_{n+1} \mid 12.174 + \frac{1}{2}, 18.154.425 + \frac{1}{2}, 2.020.000 \right).$$

Cuya esperanza y desviación típica predictivas son:

$$E(N_{n+1} \mid \mathbf{N}) = 1.352,72$$

$$\text{DT}(N_{n+1} \mid \mathbf{N}) = 38,76$$

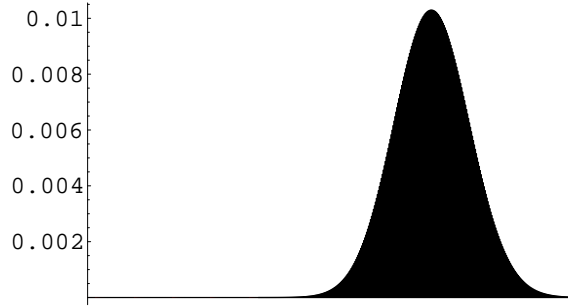
En la Figura 6.5 se presenta la distribución predictiva obtenida  $N_{n+1}$  utilizando previa mínimo informativa.

En cuanto a la distribución previa conjugada, la información proporcionada por el asegurador permite afirmar que:

$$E(\phi) = \frac{1}{1.500}$$

y,





**Figura 6.5:** Distribución predictiva de  $N$  utilizando previa mínimo informativa

$$P \left[ \phi \leq \frac{1}{1.200} \right] = 0,95.$$

Considerando lo anterior, y de acuerdo con las características de la distribución previa conjugada (4.14), se obtiene como valores para los hiperparámetros:

$$\alpha_{\phi} = 0,01301$$

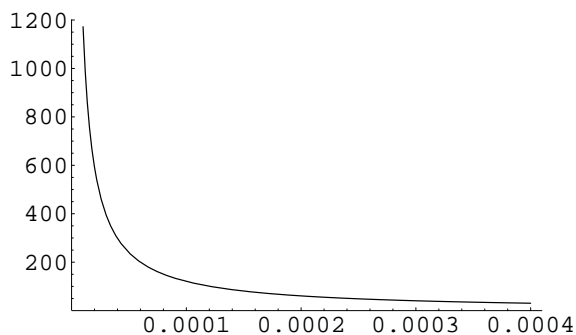
$$\beta_{\phi} = 19,5074$$

La gráfica de la distribución conjugada  $\text{Be}(\phi \mid 0,01301, 19,5074)$  se presenta en la Figura 6.6. Su valor esperado y desviación típica son:

$$E(\phi) = 0,0006667$$

$$\text{DT}(\phi) = 0,0056979$$

De acuerdo con (4.21), la distribución posterior que se obtiene para el parámetro  $\phi$ , cuya gráfica se presenta en la Figura 6.7, es una



**Figura 6.6:** Distribución previa conjugada para el parámetro  $\phi$

$Beta(\phi \mid 12.174, 013, 18.154.444, 51)$ .

La esperanza y la desviación típica a-posteriori que se obtienen para la probabilidad de ocurrencia de un siniestro,  $\phi$ , son:

$$E(\phi \mid \mathbf{N}, 2.020.000) = 0.0006701$$

$$DT(\phi \mid \mathbf{N}, 2.020.000) = 0.0000061$$

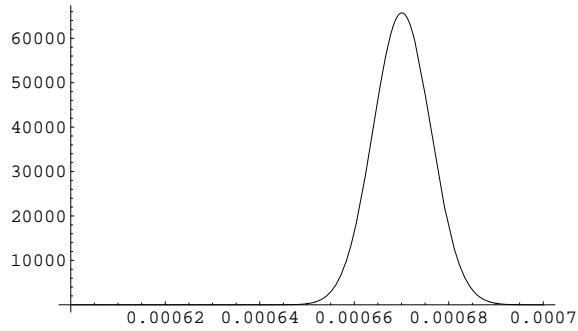
Finalmente, con base en (4.29), la distribución predictiva que se obtiene al utilizar una previa conjugada es:

$$Bb(N_{n+1} \mid 12.174, 013, 18.154.444, 51, 2.020.000) .$$

El valor esperado y la desviación típica obtenidas son:

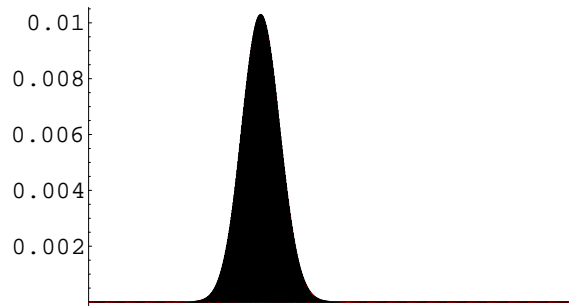
$$E(N_{n+1} \mid \mathbf{N}) = 1.352, 67$$

$$DT(N_{n+1} \mid \mathbf{N}) = 38, 76$$



**Figura 6.7:** Distribución posterior para el parámetro  $\phi$  utilizando previa conjugada

Cuyo grafo se muestra en la Figura 6.8.



**Figura 6.8:** Distribución predictiva de  $N$  utilizando previa conjugada

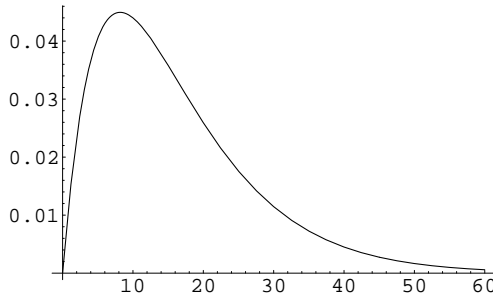
## 6.3. Distribuciones predictivas del monto individual de siniestros

### *Distribución predictiva de $Z_{m+1}$ con $\alpha$ conocido y previa mínimo informativa*

Consideramos ahora el monto de un siniestro en el portafolio  $n + 1$ .

Para este tipo de datos, es usual considerar  $\alpha = 2$  teniendo en cuenta que  $\sqrt{\alpha}$  es el factor de proporcionalidad entre su valor esperado y su desviación típica. En todos los casos en que se supone  $\alpha$  conocido, se usará ese valor. Por tanto, se asume que  $Z_{ji} \sim \text{Ga}(\alpha = 2, \beta)$ .

En cuanto al parámetro  $\beta$ , si se utiliza la previa no informativa (4.15) y se incorpora la información muestral, según (4.30), la distribución predictiva del monto del siniestro  $m + 1$  resulta  $p_1(Z_{m+1} | \mathbf{Z}) = \text{Gg}(Z_{m+1} | 24.348, \frac{1}{199.250}, 2)$ , cuya gráfica se muestra en la Figura 6.9.

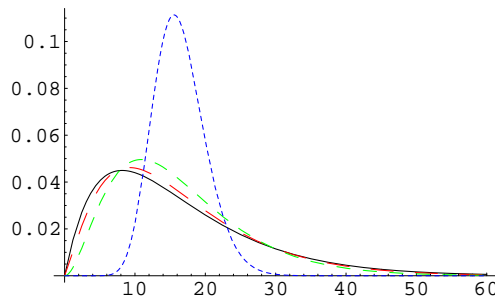


**Figura 6.9:** Distribución Predictiva para  $Z$  con  $\alpha = 2$  y previa mínima informativa

La esperanza y la desviación típica de esta distribución son:

$$\begin{aligned} E(Z_{m+1} | \mathbf{Z}) &= 16,36748 \\ \text{DT}(Z_{m+1} | \mathbf{Z}) &= 11,57427 \end{aligned}$$

Con el fin de mostrar que la elección  $\alpha = 2$  es adecuada, en la Figura 6.10 se muestra la distribución predictiva que se obtiene para distintas opciones de  $\alpha$ . La línea continua representa la distribución predictiva cuando  $\alpha = 2$ , en líneas discontinuas se va apreciando cómo, mientras  $\alpha$  incrementa, la distribución predictiva del monto individual de siniestros va perdiendo su sesgo hasta, incluso, llegar a presentar cierta simetría con un valor  $\alpha = 20$ . Consecuentemente, se puede afirmar que la varianza de la distribución va disminuyendo. Lo lógico es que la distribución predictiva del monto individual de siniestros presente un sesgo a la derecha ya que existe mayor probabilidad de ocurrencia de siniestros con montos menores y probabilidad de ocurrencia muy pequeña de siniestros con montos grandes. Por lo anterior, suponer un valor no coherente de  $\alpha$  puede llevar a resultados erróneos en la predicción de los siniestros que espera la cedente, esencial no sólo para determinar el reaseguro óptimo sino también la prima que cobrará a sus asegurados.



**Figura 6.10:** Distribución Predictiva de  $Z$  con  $\alpha = 2$ ,  $\alpha = 2, 3$ ,  $\alpha = 3$  y  $\alpha = 20$ .

### ***Distribución predictiva de $Z_{m+1}$ con $\alpha$ desconocido y previa mínimo informativa***

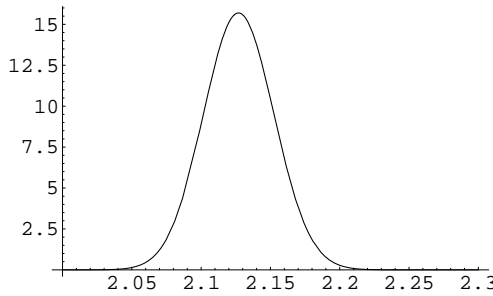
El supuesto de  $\alpha$  desconocido requiere el análisis de su distribución posterior marginal que, de acuerdo con (4.24), es:

$$\pi_2(\alpha | \mathbf{Z}) \propto \frac{\sqrt{\alpha \text{PG}(1, \alpha) - 1} \left( \prod_{i=1}^m Z_i^\alpha \right) \Gamma(\alpha m)}{\Gamma^m(\alpha) (m\bar{Z})^{\alpha m}}$$

Mediante integración numérica es posible obtener la constante de integración y presentar, en la Figura 6.11, la distribución  $\pi_2(\alpha | \mathbf{Z})$ . Cuya valor esperado y desviación típica son:

$$E(\alpha | \mathbf{Z}) = 2,12728$$

$$DT(\alpha | \mathbf{Z}) = 0,02542$$

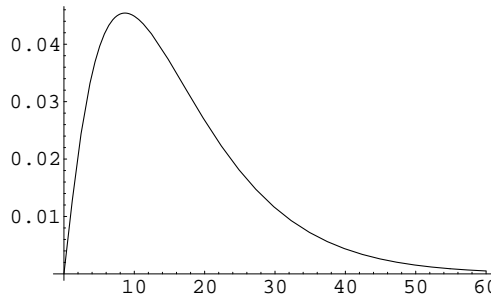


**Figura 6.11:** Distribución Posterior Marginal de  $\alpha$ .

De acuerdo con (4.31), la distribución predictiva del monto individual de siniestros cuando ambos parámetros del modelo son desconocidos no presenta una forma analítica cerrada, ni se aproxima a alguna otra distribución conocida, como se aprecia, nuevamente, en la expresión (6.1) donde se presenta la distribución predictiva normalizada.

$$p_2(Z_{m+1} | \mathbf{Z}) = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha PG(1, \alpha) - 1} \left( \prod_{i=1}^m Z_i^\alpha \right) Z_{m+1}^{\alpha-1}}{\Gamma^{m+1}(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + \alpha m)}{(m\bar{Z} + Z_{m+1})^{\alpha + \alpha m}} d\alpha}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha PG(1, \alpha) - 1} \left( \prod_{i=1}^m Z_i^\alpha \right) Z_{m+1}^{\alpha-1}}{\Gamma^{m+1}(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha + \alpha m)}{(m\bar{Z} + Z_{m+1})^{\alpha + \alpha m}} dz_{m+1} d\alpha} \quad (6.1)$$

Utilizando nuevamente integración numérica, y con base en la información muestral, se obtiene la distribución predictiva representada en la Figura 6.12.



**Figura 6.12:** Distribución Predictiva para  $Z$  con  $\alpha$  desconocido y previa mínimo informativa

Los valores de la esperanza y la desviación típica son:

$$E(Z_{m+1} | \mathbf{Z}) = 16,3674$$

$$DT(Z_{m+1} | \mathbf{Z}) = 11,2234$$

Como se puede apreciar, la desviación típica obtenida en este caso es menor que cuando se supone  $\alpha = 2$ , esto se atribuye a que si bien el valor supuesto para  $\alpha$  conocido es compatible con los datos, se queda un poco por debajo de, por ejemplo, la mediana o la moda, cuyos valores son, respectivamente, 2, 12718 y 2, 12696. Sin embargo, suponer  $\alpha = 2$  no sólo es coherente con los datos y con el valor utilizado en la práctica para este tipo de portafolios, sino que, como se ha

demostrado en el caso anterior, un valor de  $\alpha$  mayor a 2 hace que la distribución predictiva disminuya su sesgo a la derecha. Por tanto, partiendo de que la cedente prefiere quedarse por arriba en su predicción, seguimos considerando adecuado suponer  $\alpha = 2$  en los casos donde este parámetro se supone conocido, con su correspondiente incremento en la desviación típica de la distribución predictiva.

***Distribución predictiva de  $Z_{m+1}$  con  $\alpha$  conocido y previa conjugada para  $\beta$***

Teniendo en cuenta que  $\alpha = 2$  y que  $E(Z_{ji} | \alpha, \beta) = \alpha\beta$ , resulta que  $\beta$  es la mitad del valor esperado del monto de un siniestro. La información previa proporcionada por el asegurador permite afirmar:

$$E(\beta) = 8,5$$

En términos de los hiperparámetros de la previa dada por (4.17) :

$$\frac{1}{\tau(\varphi - 1)} = 8,5$$

Por otro lado, se ha establecido que:

$$P[\beta < 12,5] = 0,95$$

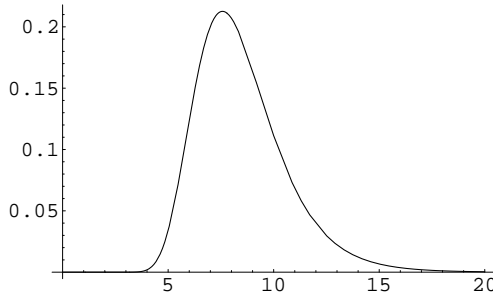
Resolviendo las ecuaciones correspondientes, se obtienen los valores de los hiperparámetros de la distribución previa, que son:

$$\varphi = 17,3974$$

$$\tau = 0,00717$$

Por tanto, la distribución previa es  $IG(\beta | 17,3974, 0,00717)$ . Su representación gráfica se muestra en la Figura 6.13.



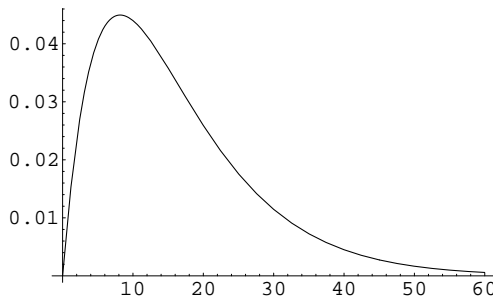


**Figura 6.13:** Distribución Previa Conjugada para el parámetro  $\beta$  con  $\alpha = 2$

La desviación típica de la distribución previa obtenida es:

$$DT(\beta) = 2,166$$

De acuerdo con (4.32), utilizando esta distribución previa, se obtiene como distribución predictiva una Gg  $(24.365, 4, \frac{1}{199.389}, 2)$  cuya gráfica se muestra en la Figura 6.14.



**Figura 6.14:** Distribución Predictiva para Z con  $\alpha = 2$  y previa conjugada para  $\beta$

El valor esperado y la desviación típica que se obtienen son:

$$E(Z_{m+1} | \mathbf{Z}) = 16,3672$$
$$DT(Z_{m+1} | \mathbf{Z}) = 11,5741$$

Como puede observarse, las distribuciones predictivas presentadas para diferentes especificaciones en las distribuciones previas son prácticamente idénticas. Esto se debe al tamaño de información con el que se cuenta. En otras palabras, la verosimilitud es la que está dominando.

## 6.4. Monto agregado de siniestros

Como se introdujo en el Capítulo 4, el valor de la prima del portafolio de riesgo se basa en la distribución predictiva del monto agregado de siniestros. De las ecuaciones (4.36), (4.38), (4.40), (4.41), (4.43) y (4.44) se concluye que no es posible obtener explícitamente esta distribución.

Sin embargo, en todos los casos, la distribución predictiva del monto agregado de siniestros se ha logrado expresar como una mixtura de distribuciones, en la mayoría de los casos conocidas. Este hecho ha permitido la obtención de una muestra de dichas distribuciones predictivas a través de métodos de simulación.

Choy y Chan (2003) muestran cómo a partir de la representación de distribuciones como mixtura, es posible obtener a través de métodos de simulación como los MCMC un análisis bayesiano en aplicaciones de seguros.

Así, mientras mayor sea el número de simulaciones realizadas, se espera que la muestra sea lo más parecida a la población de la cual se está muestreando. Si bien no se tiene una expresión cerrada para cada distribución predictiva, al contar con sus realizaciones se puede obtener características de la distribución tales como la esperanza, la varianza, percentiles o intervalos de confianza.

Por su parte, se ha calculado la esperanza y la desviación típica teóricas a través de los momentos de las distribuciones predictivas del número y el monto individual de siniestros, como se ha planteado en el apartado 4.7.1.

A continuación se presenta los resultados obtenidos para la distribución predictiva del monto agregado de siniestros. El número de simulaciones realizadas en todos los casos es de 50.000.

**CASO 1.- Distribución predictiva de  $X$  suponiendo un Modelo Poisson,  $\alpha$  conocido y previas mínimo informativas**

De acuerdo con ( 4.36), la distribución predictiva del monto agregado de siniestros se obtiene mediante la mixtura:

$$p_1(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} \text{Gg} \left( x | \alpha m, (m\bar{Z})^{-1}, N_{n+1}\alpha \right) \times \text{Pg} \left( N_{n+1} | m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, 1 \right)$$

Una muestra de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros,  $p_1(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , es obtenida como sigue:

1. Se obtiene una muestra -**Muestra A.1**- de la distribución  $\text{Pg}(N_{n+1} | m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, 1)$
2. Cada valor de  $N_{n+1}$ , de la Muestra A.1, se sustituye en el hiperparámetro

$$\text{Gg} \left( x | \alpha m, (m\bar{Z})^{-1}, N_{n+1}\alpha \right)$$

y se genera un dato de la **Muestra B.1**.

A su vez, los paquetes estadísticos utilizados no permiten obtener directamente simulaciones de las distribuciones Poisson–Gamma y Gamma–Gamma. El problema se resuelve al poder expresarlas también como una mixtura de distribuciones, como vemos a continuación.

### Muestra A.1

Una muestra de la distribución predictiva del número de siniestros se obtiene al expresar, según (4.26), la distribución  $\text{Pg}(N_{n+1} | m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, 1)$  como la mixtura:

$$\int_0^{\infty} \text{Pn}(N_{n+1} | \lambda) \text{Ga}\left(\lambda | m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right) d\lambda$$

Para obtener una muestra de  $N_{n+1}$  que siga esta distribución:

1. Se obtiene una muestra para el parámetro  $\lambda$  de la distribución

$$\text{Ga}\left(\lambda | m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right)$$

2. Como en el procedimiento anterior, para cada dato de la muestra obtenida para  $\lambda$ , se obtiene un valor de la muestra de  $N_{n+1}$  de la distribución  $\text{Pn}(N_{n+1} | \lambda)$ .

### Muestra B.1

Una vez que se obtiene la muestra del número de siniestros, se realiza la simulación de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros, obteniendo la muestra de la distribución que estamos buscando. En este caso, la distribución  $\text{Gg}(x | \alpha m, (m\bar{Z})^{-1}, N_{n+1}\alpha)$  se escribe, según (4.35), mediante una mixtura

como:

$$\int_0^{\infty} \text{Ga}(x | N_{n+1}\alpha, \beta) \text{IG}\left(\beta | \alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}}\right) d\beta$$

Finalmente, muestreando de esta distribución, se obtiene realizaciones de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros mediante lo siguiente:

1. Se obtiene una muestra del parámetro  $\beta$  que sigue una distribución  $\text{IG}\left(\beta | \alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}}\right)$ . Al no ser posible obtener directamente una muestra de esta distribución, se usa el hecho de que  $\frac{1}{\beta} \sim \text{Ga}\left(\beta | \alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}}\right)$ .
2. Usando la muestra obtenida en el procedimiento anterior, se obtiene finalmente realizaciones de la distribución  $\text{Ga}(x | N_{n+1}\alpha, \beta)$ .

## Resultados

Con el fin de obtener una muestra que represente lo más posible la distribución de interés, se realizaron 50.000 simulaciones con el procedimiento descrito anteriormente.

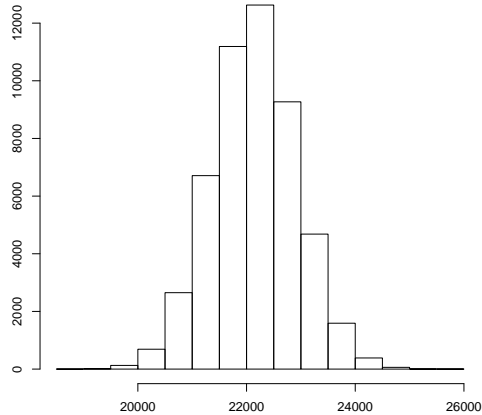
En la Figura 6.15 se presenta un histograma de la distribución obtenida.

Puesto que el monto agregado de siniestros se construye a partir de una suma de variables aleatorias, por el teorema central del límite y el tamaño de la muestra -como es de esperarse- esta suma converge a una distribución Normal, comportamiento que puede apreciarse en el histograma.

La esperanza y la desviación típica muestrales son:

$$\bar{X}_{sim} = 22.143$$

$$S_{sim} = 775,545$$



**Figura 6.15:** Histograma de la Muestra de la Distribución Predictiva del Monto Agregado de Siniestros con  $\alpha = 2$  y previas mínimo informativas

Con base en la muestra obtenida, un intervalo de confianza muestral al 95 %<sup>1</sup> para la distribución predictiva del monto agregado de siniestros es:

$$(20.634, 23.688)$$

Los valores teóricos de la esperanza y la desviación típica, para la distribución predictiva del monto agregado de siniestros son:

$$E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 22.141$$

$$DT(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 777,177$$

---

<sup>1</sup>En lo sucesivo, el intervalo de confianza muestral al 95 % se ha calculado como el percentil 0.025 para el límite inferior y el 0.975 para el límite superior.

Como es de esperarse, el valor esperado y la desviación típica de la muestra son muy cercanos a su correspondiente valor teórico.

En la siguiente tabla se muestran los cuantiles obtenidos de la muestra:

$\rho_1$	0,99	0,95	0,90	0,75	0,50	0,35	0,20
$X_{\rho_1}$	23.971	23.419	23.136	22.665	22.140	21.842	21.490

Como ya se demostró, en el Capítulo 4, una de las ventajas de conocer una muestra de la distribución predictiva es la posibilidad de realizar el cálculo de la prima que ha de cobrar el asegurador directo. Con base en el principio del valor medio, esta prima será el cuantil  $\rho_1$  de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros.

Recordemos que dependiendo del cuantil que el asegurador directo decida que será la prima total del portafolio, estará considerando un porcentaje de margen de seguridad  $w$ .

En la tabla que se presenta a continuación se establece la relación entre el cuantil y el margen de seguridad equivalente.

$\rho_1$	0,99	0,95	0,90	0,75
$w\%$	8,27	5,77	4,50	2,37

Notar que, sólo han sido expuestos los primeros cuatro cuantiles -de los presentados en la tabla anterior-, esto se debe a que a partir del cuantil  $X_{0,50}$  el monto de cada uno de ellos es menor que el valor esperado de la distribución y, por lo tanto, son cuantiles que no serían recomendados como prima del portafolio, pues, bajo el principio del valor medio, estaríamos hablando de un descuento a la prima y no de un margen de seguridad. El valor esperado de la distribución predictiva corresponde al cuantil  $X_{0,5003}$ .

**CASO 2.- Distribución predictiva de  $X$  suponiendo un Modelo Poisson,  $\alpha$  desconocido y previas mínimo informativas**

Como se ha planteado en (4.37), en este caso, también el monto agregado de siniestros se describe mediante una mixtura, en la que la distribución posterior marginal de  $\alpha$  no presenta una forma analítica cerrada.

$$p_2(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) \propto \int_0^\infty \int_0^\infty \text{Ga}(N_{n+1}\alpha, \beta) \text{IG}\left(\beta | \alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}}\right) \frac{\sqrt{\alpha \text{PG}(1, \alpha) - 1} \left(\prod_{i=1}^m Z_i^\alpha\right) \Gamma(\alpha m)}{\Gamma^m(\alpha) (m\bar{Z})^{\alpha m}} d\alpha d\beta$$

La distribución predictiva del monto agregado de siniestros condicionada a  $N_{n+1}$  es:

$$p_2(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = \sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} p_2(X | \mathbf{Z}, N_{n+1}) \text{Pg}\left(N_{n+1} | m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, 1\right)$$

Una muestra de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros,  $p_2(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , es obtenida de forma análoga al algoritmo presentado en el Caso 1, con la única variante de muestrear de la distribución posterior en dos partes, como más adelante se detalla. El algoritmo queda como sigue:

1. Se obtiene una muestra -**Muestra A.2**- para  $N_{n+1}$  de la distribución  $\text{Pg}(N_{n+1} | m + \frac{1}{2}, \frac{1}{n}, 1)$ .
2. La **Muestra B.2** se obtiene al muestrear de la distribución  $p_2(X | \mathbf{Z}, N_{n+1})$ , utilizando en el hiperparámetro correspondiente la Muestra A.2 obtenida para  $N_{n+1}$

La **Muestra A.2** se obtiene de forma idéntica que la Muestra A.1, cuyo procedimiento se detalló en el Caso 1.



## Muestra B.2

Una vez que se obtiene la muestra del número de siniestros, sus valores son utilizados dentro de la simulación de la distribución La muestra para  $p_2(X | \mathbf{Z}, N_{n+1})$ .

Realizaciones de esta distribución se obtienen mediante el siguiente algoritmo:

1. Se obtiene la **Muestra C** de la distribución posterior marginal de  $\alpha$  mediante el método aceptación-rechazo.
2. Utilizando la muestra obtenida en 1, se simulan valores para la distribución posterior del parámetro  $\beta | \alpha$ , que, según (4.23), es una IG  $(\beta | \alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}})$ , muestreada a partir de la distribución  $\text{Ga}(\alpha m, \frac{1}{m\bar{Z}})$  tal como en el caso 1.
3. Usando la muestra obtenida en el procedimiento anterior, se obtienen finalmente realizaciones de la distribución  $\text{Ga}(x | N_{n+1}\alpha, \beta)$ .

## Muestra C

Vamos a describir cómo funciona el método aceptación-rechazo, y a presentar la aplicación del algoritmo para nuestro caso concreto, del cual se obtiene la muestra denominada Muestra C.

### Método aceptación-rechazo

Se trata de un método de simulación de cantidades aleatorias provenientes de distribuciones cuyo tratamiento analítico resulta complicado, dificultando la posibilidad de obtener simulaciones directamente de esa distribución. En este caso, no podemos expresar la distribución  $\pi(\alpha | \mathbf{Z})$  como una mixtura o como alguna transformación que permitiera obtener muestras de ella.

Partiendo de que se desea generar una muestra de la distribución  $\pi(\alpha | \mathbf{Z})$ .

Suponiendo que:

1. Conocemos otra distribución con función de densidad  $p(\alpha)$ , que se denomina distribución importante, de la que es fácil simular observaciones, y
2. Que existe y se conoce una constante,  $M$ , tal que  $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$  se cumple

$$\pi(\alpha | \mathbf{Z}) \leq Mp(\alpha)$$

en el soporte de  $\pi(\alpha | \mathbf{Z})$ .

El algoritmo está basado en el siguiente resultado:

**Teorema 6.4.1.** *El algoritmo:*

1. Generar  $\alpha^{(j)} \sim p(\alpha)$
2. Generar  $u \sim Un_{[0,1]}$
3. Aceptar  $\alpha^{(j)}$  si  $u \leq \frac{\pi(\alpha^{(j)} | \mathbf{Z})}{Mp(\alpha^{(j)})}$
4. Regresar al paso 1 en otro caso.

produce una muestra aleatoria de tamaño  $r$   $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(r)}$ , con  $\alpha^{(j)} \sim \pi(\alpha | \mathbf{Z})$ . Y por lo tanto  $\pi(\alpha | \mathbf{Z})$  es la función de densidad de la distribución  $\alpha$  condicionada a  $u \leq \frac{\pi(\alpha | \mathbf{Z})}{Mp(\alpha)}$ .

*Demostración.* (ver Robert C. P. y Casella G. (1999)) □

Es fácil comprobar que (Robert C. P. y Casella G. 1999) la probabilidad de aceptación en el algoritmo es  $\frac{1}{M}$ , por lo tanto se busca que  $M$  sea lo más pequeño posible. Por tanto, su valor óptimo es el máximo del cociente  $\frac{\pi(\alpha | \mathbf{Z})}{p(\alpha)}$ .

La eficiencia de este método radica en la elección tanto de  $p(\alpha)$  como de la constante  $M$ , puesto que si se parte de una buena elección de la distribución importante eso se notará en un valor pequeño de  $M$ .

El método de aceptación-rechazo es usado para obtener muestras de la distribución objetivo sin necesidad de conocer la distribución completa, partiendo únicamente del núcleo de la densidad objetivo. En efecto, sean:

$\pi^*(\alpha | \mathbf{Z})$  la distribución posterior marginal no normalizada,  $c$  la constante de proporcionalidad y  $M^*$  una constante tal que,  $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$ , se cumple:

$$\pi^*(\alpha | \mathbf{Z}) \leq M^* p(\alpha)$$

resultando  $M = c \times M^*$ . Por lo que la condición  $u \leq \frac{\pi(\alpha | \mathbf{Z})}{Mp(\alpha)}$  es equivalente a  $u \leq \frac{\pi^*(\alpha | \mathbf{Z})}{M^*p(\alpha)}$ . En consecuencia de lo planteado, puede utilizarse la distribución  $\pi^*(\alpha | \mathbf{Z})$  en el algoritmo presentado arriba.

**Obtención de la Muestra C** La finalidad, en nuestro caso, es obtener una muestra de la distribución posterior marginal de  $\alpha$  mediante el método de aceptación-rechazo. Partiremos de que la distribución objetivo es:

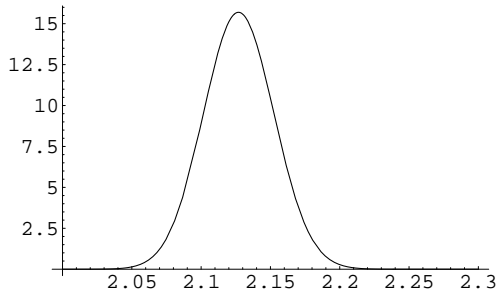
$$\pi(\alpha | \mathbf{Z}) \propto \frac{\sqrt{\alpha PG(1, \alpha) - 1} \left( \prod_{i=1}^m Z_i^\alpha \right) \Gamma(\alpha m)}{\Gamma^m(\alpha) (m\bar{Z})^{\alpha m}}$$

Con el fin de graficar la distribución  $\pi(\alpha | \mathbf{Z})$  y conocer algunas características de ella, se ha calculado numéricamente la constante de la distribución. En la Figura 6.16 se muestra su gráfica en línea continua, como se representará en lo sucesivo. La esperanza y la desviación típica posteriores son:

$$E(\alpha | \mathbf{Z}) = 2,12728$$

$$DT(\alpha | \mathbf{Z}) = 0,02542$$

Para la aplicación del algoritmo aceptación-rechazo proponemos como distribución importante una distribución



**Figura 6.16:** Distribución Posterior Marginal de  $\alpha$ .

$N(\hat{\alpha}, \hat{\sigma})$ , donde:

$$\hat{\alpha} = \arg.\text{máx. } \pi(\alpha | \mathbf{Z})$$

$$\hat{\sigma} = (-D^2 \log \pi(\alpha | \mathbf{Z}) |_{\alpha=\hat{\alpha}})^{-\frac{1}{2}}$$

siendo  $D^2(\cdot)$  la segunda derivada de la función argumento.

Esta elección de la función importante se basa en el hecho de que para un tamaño de muestra muy grande (como es el caso), esta es la distribución asintótica de la distribución posterior marginal (Berger, 1985a, pp. 224).

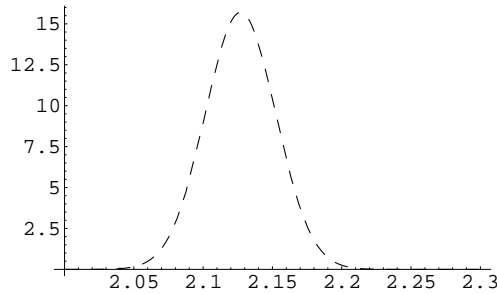
El argumento máximo de la distribución posterior marginal se ha calculado sobre el logaritmo,  $\log \pi(\alpha | \mathbf{Z})$ , de la distribución posterior marginal, siendo equivalente a maximizar  $\pi(\alpha | \mathbf{Z})$ . En el Apéndice D se muestran los resultados obtenidos para el  $\log \pi(\alpha | \mathbf{Z})$ , su primera y segunda derivadas.

Los valores numéricos obtenidos para la estimación de los parámetros son:

$$\hat{\alpha} = 2,12696$$

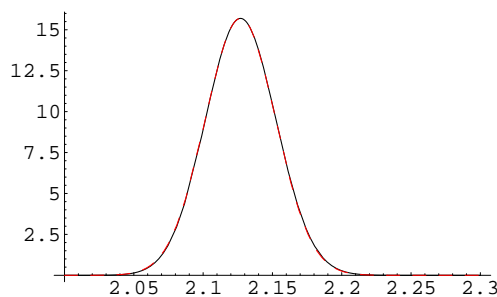
$$\hat{\sigma} = 0,02542$$

Con estos valores, se obtiene como distribución importante la distribución  $N(2, 12696, 0, 02542)$ , cuya gráfica se presenta en la Figura 6.17 en trazo discontinuo, como se representa en lo sucesivo.



**Figura 6.17:** Distribución Importante

Como puede comprobarse, observando la Figura 6.18, es casi imposible apreciar la diferencia de la distribución objetivo y la distribución importante, aún sin ser multiplicada por la constante  $M$ . Estas dos distribuciones se encuentran muy cercanas puesto que el tamaño de muestra es muy grande. Ya intuitivamente podemos pensar en un valor de la constante  $M$  cercano a 1, lo cual justificaremos teóricamente a continuación.



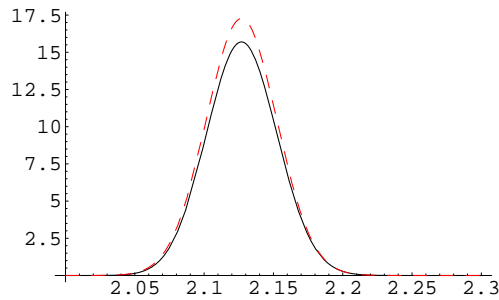
**Figura 6.18:** Distribución Objetivo y Distribución Importante

Como se ha comentado, el valor óptimo para  $M$  se obtiene como el máximo del

cociente  $\frac{\pi(\alpha|\mathbf{Z})}{p(\alpha)}$ . Calculando este valor óptimo, en nuestro caso, se obtiene un valor de  $M$  que podría considerarse igual a 1. Un valor  $M = 1$  estaría diciendo que  $\pi(\alpha | \mathbf{Z})$  y  $p(\alpha)$  representan a la misma distribución.

Dentro del algoritmo hemos considerado  $M = 1.1$ , valor que garantiza una probabilidad de aceptación muy alta, concretamente de 0,91.

En la Figura 6.19 se puede observar que al multiplicar la distribución importante por este valor, efectivamente se está envolviendo a la función objetivo.



**Figura 6.19:** Distribución Objetivo - Distribución Importante Modificada

Se llevaron a cabo realizaciones de la distribución objetivo hasta obtener una muestra de tamaño 50.000. La media y la desviación típica muestrales son:

$$\bar{\alpha}_{sim} = 2,12700$$

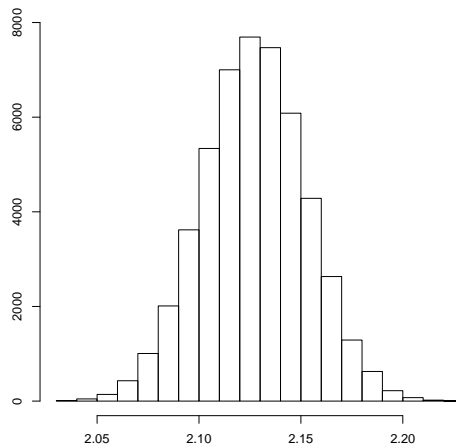
$$S_{sim} = 0,02542$$

Un intervalo al 95 % es el siguiente:

$$(2,07712, 2,17684)$$

En la Figura 6.20 se presenta el histograma de la muestra obtenida para la distri-

bución posterior marginal de  $\alpha$ .



**Figura 6.20:** Histograma de la muestra de la distribución posterior marginal de  $\alpha$

## Resultados

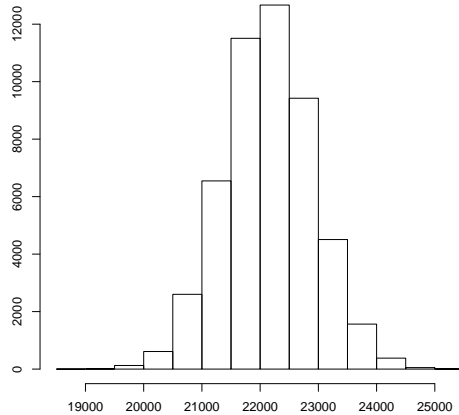
Se obtuvo una muestra de tamaño 50.000 de realizaciones de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros, cuyo histograma se muestra en la Figura 6.21.

De forma análoga, la distribución obtenida presenta el comportamiento de una distribución Normal.

La media y la desviación típica muestrales son:

$$\bar{X}_{sim} = 22.144$$

$$S_{sim} = 765,122$$



**Figura 6.21:** Histograma de la Muestra de la Distribución Predictiva del Monto Agregado de Siniestros con  $\alpha$  desconocido y previas mínimo informativas

Se puede apreciar que estos valores son muy cercanos a los obtenidos en el Caso 1, con una desviación típica menor en aproximadamente 10 unidades.

El intervalo de confianza al 95 % obtenido para esta muestra es:

$$(20.660, 23.660)$$

Los valores teóricos de la esperanza y la desviación típica, para la distribución predictiva del monto agregado de siniestros son:

$$E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 22.141$$

$$DT(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 769,403$$

A nivel teórico también existe una diferencia en cuanto a la esperanza y la des-



viación típica con respecto a los resultados teóricos del Caso 1, este caso presenta una menor desviación típica.

Los cuantiles en este caso son:

$\rho_1$	0,99	0,95	0,90	0,75	0,50	0,35	0,20
$X_{\rho_1}$	23.973	23.421	23.123	22.652	22.137	21.844	21.505

En la tabla que se presenta a continuación se establece la relación entre el cuantil y el margen de seguridad equivalente.

$\rho_1$	0,99	0,95	0,90	0,75
$w \%$	8,27	5,78	4,43	2,31

El valor esperado teórico de la distribución predictiva corresponde al cuantil  $X_{0,502}$ , por ello en la tabla anterior únicamente presentamos los valores del margen de seguridad correspondientes a los cuantiles que serían aceptables ( $w \geq 0$ ).

### **CASO 3.- Distribución predictiva de $X$ suponiendo un Modelo Poisson, $\alpha$ conocido y previas conjugadas**

Según (4.40) la distribución predictiva del monto agregado de siniestros, condicionada al número de siniestros  $N_{n+1}$ , que se obtiene al considerar las distribuciones conjugadas  $p_3(X | Z, N)$  es igual a:

$$\sum_{N_{n+1}=1}^{\infty} \text{Gg} \left( x \mid \alpha m + \varphi, \left( \frac{1}{\tau} + m \bar{Z} \right)^{-1}, N_{n+1} \alpha \right) \\ \times \text{Pg} \left( N_{n+1} \mid m + \gamma, \left( n + \frac{1}{\nu} \right)^{-1}, 1 \right)$$

Una muestra de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros,  $p_3(X | Z, N)$ , es obtenida de forma idéntica al algoritmo presentado en el Caso 1. La diferencia simplemente consiste en cambiar los diferentes valores de los hiperparámetros que se obtienen en el análisis. Es decir:

- a. En el paso 1 del algoritmo, la muestra se obtendrá de una distribución  $\text{Pg}\left(N_{n+1} | m + \gamma, \left(n + \frac{1}{\nu}\right)^{-1}, 1\right)$ , al generar:
  - Una muestra para  $\lambda \sim \text{Ga}\left(\lambda | m + \gamma, \left(n + \frac{1}{\nu}\right)^{-1}\right)$ , y posteriormente,
  - Una muestra para  $N_{n+1}$  de la distribución  $\text{Pn}(N_{n+1} | \lambda)$ .
- b. En el paso 2 del algoritmo, y partiendo de la muestra obtenida en el inciso a, se obtiene una muestra de la distribución

$$\text{Gg}\left(x | \alpha m + \varphi, \left(\frac{1}{\tau} + m\bar{Z}\right)^{-1}, N_{n+1}\alpha\right),$$

obteniendo:

- Una muestra para  $\beta$  de la distribución  $\text{IG}\left(\alpha m + \varphi, \left(\frac{1}{\tau} + m\bar{Z}\right)^{-1}\right)$ , y con esta muestra se obtienen,
- Realizaciones de la distribución  $\text{Ga}(x | N_{n+1}\alpha, \beta)$ .

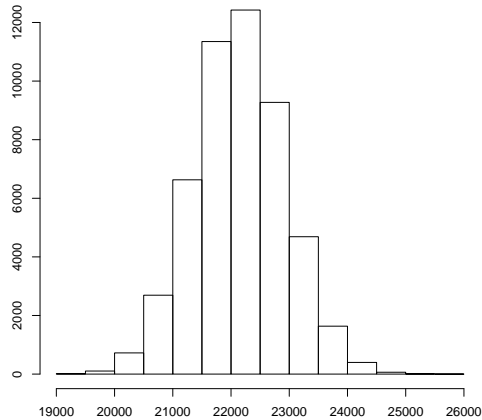
## Resultados

Se realizaron 50.000 simulaciones del monto agregado de siniestros, cuyo histograma se presenta en la Figura 6.22.

La media y la desviación típica que se obtienen para la muestra son:

$$\bar{X}_{sim} = 22.144$$

$$S_{sim} = 778,303$$



**Figura 6.22:** Histograma de la Muestra de la Distribución Predictiva del Monto Agregado de Siniestros con  $\alpha = 2$  y previas conjugadas

Como puede apreciarse, al comparar con los otros dos casos, el valor de la media muestral en los tres es muy cercano, mientras que la desviación típica muestral en este caso es mayor que los dos anteriores, no muy alejado del Caso 1.

El intervalo de confianza al 95 % en este caso es:

$$(20.629, 23.689)$$

Los valores teóricos de la esperanza y la desviación típica, para la distribución predictiva del monto agregado de siniestros son:

$$E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 22.139$$

$$DT(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 777,03$$

Los cuantiles en este caso son:

$\rho_1$	0,99	0,95	0,90	0,75	0,50	0,35	0,20
$X_{\rho_1}$	23.979	23.432	23.142	22.664	22.138	21.843	21.491

En la tabla que se presenta a continuación se establece la relación entre el cuantil y el margen de seguridad equivalente.

$\rho_1$	0,99	0,95	0,90	0,75
$w\%$	8,32	5,84	4,53	2,38

En este caso, el valor esperado teórico de la distribución predictiva se encuentra en el cuantil  $X_{0,5003}$ . Los cálculos exactos nos dicen que considerando como prima el cuantil  $X_{0,50}$  de la distribución, estaríamos por debajo de la esperanza teórica (mínima prima que se recomienda cobrar, donde  $w = 0$ ).

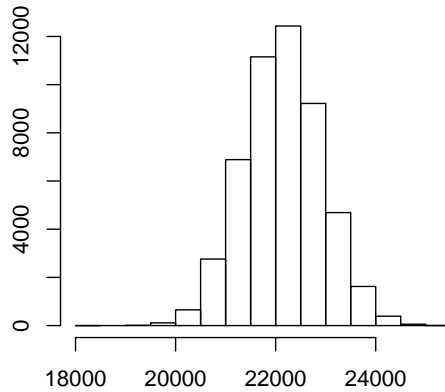
***CASO 4.- Distribución predictiva de  $X$  suponiendo un Modelo Binomial,  $\alpha$  conocido y previas mínimo informativas***

En la Figura 6.23 se presenta el histograma de las observaciones obtenidas para la distribución predictiva del monto agregado de siniestros (4.41). En la muestra simulada, la media y la desviación típica son:

$$\bar{X}_{sim} = 22.139$$

$$S_{X_{sim}} = 777,351$$

en la Tabla 6.3 se presentan los valores de algunos cuantiles de la distribución predictiva simulada.



**Figura 6.23:** Histograma de la muestra de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con  $\alpha = 2$  y previas mínimo informativas, considerando que  $N_{n+1}$  sigue una distribución  $\text{Bi}(2.020.000, \phi)$ .

**Tabla 6.3:** Cuantiles de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con  $\alpha = 2$  y previas mínimo informativas, considerando que  $N_{n+1}$  sigue una distribución  $\text{Bi}(2.020.000, \phi)$ .

$\rho_1$	0,99	0,95	0,90	0,75	0,50	0,35	0,20
$X_{\rho_1}$	23.972	23.431	23.142	22.663	22.134	21.830	21.478

El valor esperado y la desviación típica teóricos son:

$$E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 22.141$$

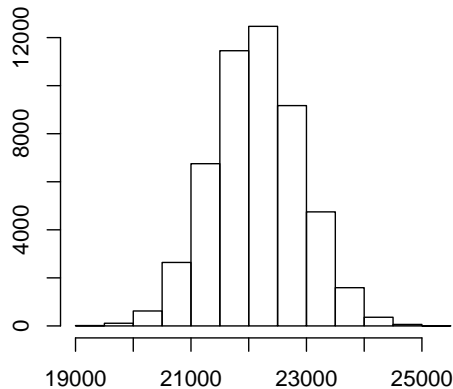
$$\text{DT}(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 777,003$$

**CASO 5.- Distribución predictiva de  $X$  suponiendo un Modelo Binomial,  $\alpha$  desconocido y previas mínimo informativas**

A partir de la muestra obtenida para la distribución marginal posterior de  $\alpha$  en el Caso 2. Se obtuvieron observaciones de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros, los cuales se presentan en el histograma de la Figura 6.24. La media y la desviación típica obtenidas son:

$$\bar{X}_{sim} = 22.143$$

$$S_{X_{sim}} = 769,221$$



**Figura 6.24:** Histograma de la muestra de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con  $\alpha$  desconocido y previas mínimo informativas, considerando que  $N_{n+1}$ , el número de siniestros del próximo período, sigue una distribución  $Bi(2.020.000, \phi)$

en la Tabla 6.4 se presentan los valores de algunos cuantiles de la distribución

predictiva simulada.

**Tabla 6.4:** Cuantiles de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con  $\alpha$  desconocido y previas mínimo informativas, considerando que  $N_{n+1}$  sigue una distribución Bi (2.020.000,  $\phi$ ).

$\rho_1$	0,99	0,95	0,90	0,75	0,50	0,35	0,20
$X_{\rho_1}$	23.955	23.421	23.137	22.661	22.135	21.842	21.493

El valor esperado y la desviación típica obtenidos son:

$$E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 22.141$$

$$DT(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 769,227$$

**CASO 6.- Distribución predictiva de  $X$  suponiendo un Modelo Binomial,  $\alpha$  conocido y previas conjugadas**

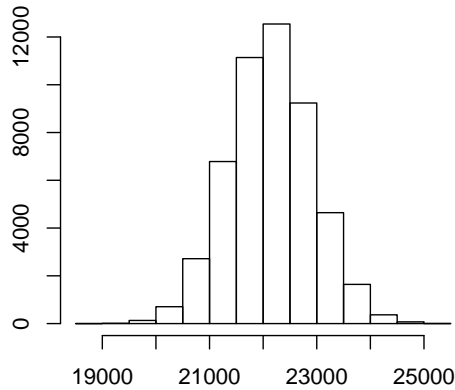
El histograma de las observaciones obtenidas para el monto agregado de siniestros se presenta en la Figura 6.25.

Los resultados obtenidos para la muestra de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros se presentan en el histograma de la Figura 6.25. La media y la desviación típica obtenidas son:

$$\bar{X}_{sim} = 22.139$$

$$S_{X_{sim}} = 780,229$$

en la Tabla 6.5 se presentan los valores de algunos cuantiles de la distribución predictiva simulada.



**Figura 6.25:** Histograma de la muestra de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con  $\alpha = 2$  y previas conjugadas, considerando que  $N_{n+1}$  sigue una distribución  $\text{Bi}(2.020.000, \phi)$

**Tabla 6.5:** Cuantiles de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros con  $\alpha = 2$  y previas conjugadas, considerando que  $N_{n+1}$  sigue una distribución  $\text{Bi}(2.020.000, \phi)$ .

$\rho_1$	0,99	0,95	0,90	0,75	0,50	0,35	0,20
$X_{\rho_1}$	23.966	23.431	23.138	22.663	22.137	21.835	21.480

Los valores teóricos de la esperanza y la desviación típica obtenidos son:

$$E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 22.139$$

$$DT(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = 776,966$$



## 6.5. Una solución a la proporción óptima en un reaseguro cuota parte

En este apartado se realiza una aplicación práctica de los resultados presentados en la proposición 5.1.2. A partir de ellos se ha concluido que un reaseguro cuota parte se recomendará a la cedente cuando

$$P \leq E(X | Z, N).$$

En lo sucesivo supondremos que la prima se elige como el valor esperado de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros,

$$P = E(X | Z, N),$$

siendo esta elección previa al reaseguro.

Los valores ofertados por el reasegurador para el límite máximo de responsabilidad,  $L_1$ , en este portafolio, son: 20, 35 y 50. Ninguno de estos valores supera el monto máximo por siniestro de las pólizas que componen el portafolio. Por tanto, nos situamos en el caso *ii.(b.)* de la proposición 5.1.2.

Teniendo en cuenta los resultados que ahí se presentan, desde un punto de vista teórico, cualquier  $k \in [k_0, 1]$ , con

$$k_0 = \min \left\{ k : F_{Z_{m+i}} \left( \frac{L_1}{1-k} \right) = 1 \right\},$$

es equivalente a nivel utilidad esperada. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, consideramos que, con un resultado de ganancia esperada equivalente, la cedente va a preferir compartir el riesgo con el reasegurador. Es decir, consideramos que la cedente preferirá como resultado óptimo  $k^* = k_0$ .

El valor que toma  $k_0$  depende de la distribución predictiva del monto individual de siniestros y del límite máximo de responsabilidad estipulado por el reasegurador,  $L_1$ . Determinarlo requiere encontrar  $k$  tal que  $F_{Z_{m+i}}\left(\frac{L_1}{1-k}\right) = 1$  o bien, remontándonos a la maximización de la ganancia esperada, de acuerdo con (5.4), se busca  $k$  tal que:

$$\frac{d}{dk} E_{N_{n+1}|N} E_{Z_{n+1}|Z}(G) = P - E(N_{n+1} | N) \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | Z) dZ_{m+i} = 0$$

En la condición anterior, como

$$P = E(X | Z, N)$$

y, de acuerdo con el Teorema 4.7.1,

$$E(X | Z, N) = E(N_{n+1} | N) E(Z_{m+i} | Z),$$

la proporción  $k$  óptima es aquella que verifica:

$$E(Z_{m+i} | Z) = \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | Z) dZ_{m+i} \quad (6.2)$$

Es decir,  $k$  óptima es tal que:

$$\frac{L_1}{1-k} \rightarrow \infty \quad (6.3)$$

Los valores del lado izquierdo de la ecuación de optimización (6.2), para cada uno de los casos analizados, se obtuvieron previamente en la inferencia bayesia-

na de las variables aleatorias relacionadas con el problema de reaseguro óptimo. Concretamente, se presentan en el apartado 6.3. Por su parte, el lado derecho, involucra el valor de la proporción  $k$  y del límite máximo de responsabilidad  $L_1$ . Se sabe que  $k$  solamente podrá tomar valores en el intervalo  $[0, 1]$ . En términos porcentuales, como suele presentarse,  $k$  irá del 0 al 100 %. Un valor  $k = 0\%$  significa que la cedente no retiene riesgo alguno y que estará cediendo todo el portafolio al reasegurador, mientras que un valor de  $k = 100\%$  implicará que la cedente no reasegurará ese portafolio de riesgo en las condiciones del contrato. Como ya vimos, en el apartado 4.8.2, la prima de reaseguro se modifica en concordancia, es decir, será menor cuanto mayor sea  $k$ , como se observa en la Tabla 6.6.

**Tabla 6.6:** Prima cedida al reasegurador en un reaseguro cuota parte, calculada para los valores de la proporción,  $k$ , que resultan de interés a la cedente.  $PR^{(1)}$  corresponde a los Casos 1, 2, 4 y 5, mientras que  $PR^{(2)}$  a los Casos 3 y 6.

$k\%$	$PR^{(1)}$	$PR^{(2)}$
0	22.141	22.139
10	19.927	19.925
20	17.713	17.711
30	15.499	15.497
40	13.284	13.283
50	11.070	11.070
60	8.856	8.856
70	6.642	6.642
80	4.428	4.428
90	2.214	2.214
100	0.000	0.000

El cálculo de la esperanza predictiva

$$E(Z_{m+1} I_A(Z_{m+1})) = \int_0^{\frac{L_1}{1-k}} Z_{m+i} p(Z_{m+i} | \mathbf{Z}) dZ_{m+i}$$

se realizó, en cada caso, para los diferentes valores de  $L_1$ .

Los resultados obtenidos para el reaseguro óptimo cuota parte se presentan en la Tabla 6.7. Como puede observarse, el valor de  $k$  tiende al 100 % y va siendo menor a medida que incrementa el límite máximo de responsabilidad  $L_1$ . Lo cual resulta lógico a partir del resultado (6.3).

Así mismo, puede observarse que no existe diferencia entre considerar un modelo u otro para el número de siniestros, así como tampoco al añadir información previa al modelo. Lo primero se explica porque la solución de reaseguro óptimo obtenida (6.2) no depende del modelo del número de siniestros sino exclusivamente de la distribución predictiva del monto individual de ellos. Lo segundo, porque, como se ha visto en la inferencia bayesiana, debido al tamaño de la muestra es la verosimilitud la que está dominando.

**Tabla 6.7:** Valores para la proporción  $k$  % óptima en un contrato de reaseguro cuota parte.

$L_1$	Modelo Poisson			Modelo Binomial		
	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
20	90	90	100	90	90	100
35	80	80	90	80	80	90
50	70	70	80	70	70	80

Por otro lado, con base en la proposición 5.1.2 un reaseguro cuota parte no será recomendado a la cedente si la prima que ésta cobra a sus asegurados es superior al valor esperado del monto agregado de siniestros. Esto puede significar que dicha cantidad será suficiente para asumir todo el riesgo y sus posibles desviaciones,

situación que puede deberse a que se cobre una prima muy elevada respecto del resultado en la siniestralidad del portafolio.

Esto último muestra la necesidad de un análisis detallado del problema antes de contratar un reaseguro, ya que cuando el óptimo se encuentra en  $k = 100\%$ , si no se analiza y se contrata el reaseguro, la cedente reduciría innecesariamente su ganancia sobre el portafolio, y esta reducción en un reaseguro cuota parte sería muy grande, debido a que las primas de reaseguro son elevadas, ya que, aún cuando la probabilidad de ocurrencia de los siniestros grandes es pequeña, la prima que se paga por ellos se calcula en la misma proporción en la que son cedidos.

Por último, las políticas de la cedente influirán en la decisión del reaseguro óptimo, en este sentido, deberá considerar las ventajas que representa el contratar un reaseguro cuota parte, las cuales se presentan a continuación:

- Es sencillo de administrar.
- Es un reaseguro que podría funcionar muy bien para compañías jóvenes o que se inicien en un nuevo ramo de seguro, y que al carecer de experiencia tengan dificultades para la determinación de la prima correcta.
- Tanto la cedente como el reasegurador asumen el riesgo de una posible estimación errónea en la prima.
- Es muy útil en riesgos individuales muy grandes que excedan límites de cuotas de retención en otros tipos de reaseguro.
- Si bien es cierto que este contrato no conduce a una homogenización de los siniestros que espera pagar un asegurador directo, sí tiene otras ventajas como lo son la garantía de una solvencia mejorada.

## 6.6. Una solución al deducible óptimo en un reaseguro exceso de pérdida

Desde un punto de vista teórico se ha demostrado que la elección del deducible óptimo en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo dependerá del principio de cálculo mediante el que se determine la prima,  $P$ , y la prima de reaseguro  $PR$ .

Este apartado tiene como objetivo mostrar, mediante una aplicación práctica, los resultados obtenidos para el deducible óptimo cuando la prima de reaseguro se calcula con base en el principio del valor esperado, introducido en el apartado 4.8.2. Es decir, de acuerdo con (4.81), la prima de reaseguro se calcula como el cuantil  $\rho_2$  de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros,

$$PR = X_{rea\rho_2}.$$

Por su parte, la prima  $P$  se elige como la esperanza del monto agregado de siniestros.

$$P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}).$$

La maximización de la ganancia esperada para este reaseguro,  $E_{N_{n+1}|\mathbf{N}}E_{\mathbf{Z}_{n+1}|\mathbf{Z}}(G)$ , con  $G$  como se define en (5.9)

$$\begin{aligned} G &= P - X - PR + X_{rea} \\ &= P - \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i} - PR + \sum_{i=1}^{N_{n+1}} [\min [Z_{m+i}, L_2] - M] I_B(Z_{m+i}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde  $B = \{Z_{m+i} : Z_{m+i} > M\}$ ,

se realiza a partir de 1.500 simulaciones del monto agregado de siniestros  $X$  y, a su vez, del monto agregado de siniestros recuperados  $X_{rea}$ .

Como se ha mostrado, en el caso del reaseguro cuota parte, prácticamente no existe diferencia al considerar distinta información previa ni diversos modelos para el número de siniestros. Por tanto, las simulaciones se realizaron para el Caso 1, en el que se utilizan previas mínimo informativas, el parámetro  $\alpha$  es conocido y el número de siniestros sigue un Modelo Poisson.

Determinar el valor del monto agregado de siniestros recuperados  $X_{rea}$  involucra tanto el deducible,  $M$ , como el límite máximo de responsabilidad  $L_2$ .

Se sabe que los valores que tomen  $M$  y  $L_2$  dependerán del tipo de portafolio que se analice, considerando que, por definición,  $M \leq L_2$ . La igualdad significa la retención total por parte de la cedente.

Los valores de  $L_2$  típicamente ofertados por el reasegurador para este portafolio son: 30, 50 y 70. En el análisis consideramos estos valores así como los deducibles que la cedente podría plantearse. Esto es: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 y 65.

Una vez establecidos los supuestos necesarios para el análisis, nos ocupamos de describir el método bajo el cual realizamos las simulaciones, las cuales fueron obtenidas, para cada combinación posible de  $M$  y  $L_2$ , a partir de las distribuciones predictivas correspondientes para el número y monto individual de siniestros.

El algoritmo consistió en realizar 1.500 iteraciones de lo siguiente:

1. Se genera  $N_{n+1}$  a partir de la distribución predictiva (4.26)

$$\text{Pg} \left( N_{n+1} \mid 12.174 + \frac{1}{2}, \frac{1}{9}, 1 \right)$$

2. Para cada valor obtenido de  $N_{n+1}$  se generan los correspondientes montos individuales,

$$Z_{m+1}, Z_{m+2}, \dots, Z_{m+N_{n+1}},$$

con base en la distribución predictiva (4.30)

$$\text{Gg} \left( Z_{m+1} \mid 24.348, \frac{1}{199.250}, 2 \right)$$

3. Se obtiene una observación del monto agregado de siniestros a partir de

$$X = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{m+i}$$

4. Considerando los valores obtenidos en 2, se construye una muestra del monto individual de siniestros recuperados a partir de la expresión (4.53) en la que se establece que, en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo, el monto individual de siniestros retenidos recuperados se determina como:

$$Z_{rea_{m+i}} = \begin{cases} 0 & Z_{m+i} < M \\ Z_{m+i} - M & M < Z_{m+i} < L_2 \\ L_2 - M & Z_{m+i} > L_2 \end{cases}$$

5. Se obtiene una observación del monto agregado de siniestros recuperados sumando los valores obtenidos en 4.

$$X_{rea} = \sum_{i=1}^{N_{n+1}} Z_{rea_{m+i}}.$$

6. Se calcula la ganancia sustituyendo en (6.4) los valores de  $X$  y  $X_{rea}$  obte-



nidos, así como los de  $P$  y  $PR$ . El valor de  $PR$ , para cada combinación de  $M$  y  $L_2$ , se calculó con base en la muestra obtenida para el monto agregado de siniestros recuperados,  $X_{rea}$ . Por su parte  $P$  fue calculado teóricamente a partir del teorema 4.7.1, es decir,

$$P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(N_{n+1} | N) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}).$$

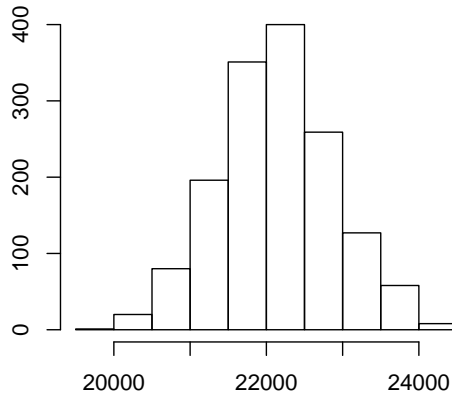
Finalmente, con base en las 1.500 simulaciones realizadas, se calcula la ganancia esperada correspondiente para cada una de las posibles combinaciones de  $L_2$  y  $M$ .

En la figura (6.26) se presenta el histograma de los montos agregados obtenidos. La media y la desviación típica muestrales son:

$$\bar{X}_{sim} = 22.126$$

$$S_{sim} = 754,779$$

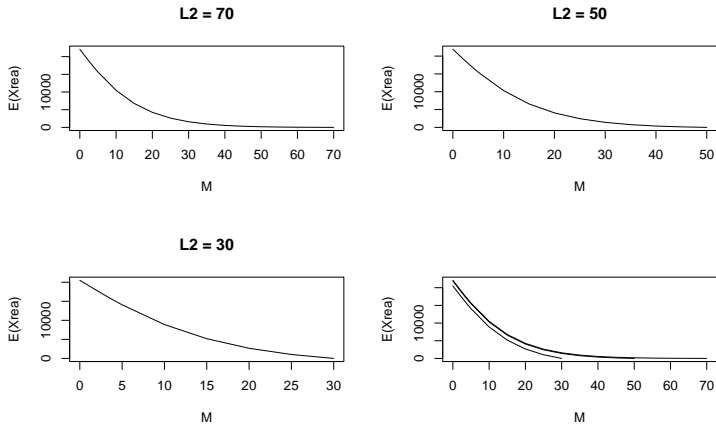
Por su parte, los histogramas de las muestras obtenidas para el monto agregado de siniestros recuperados se presentan en el Apéndice E. Como se puede observar, para un límite máximo de responsabilidad  $L_2$  fijo, cuando el deducible  $M$  incrementa, la distribución de  $X_{rea}$  va tomando valores menores. Dicho comportamiento obedece al hecho de que conforme  $M$  crece implica que el reasegurador participará en menor medida en los siniestros y, por ende, disminuye el monto que la cedente recuperará. Por ello, como también es posible apreciar, en valores altos de  $M$  la distribución comienza a sesgarse a la derecha. A nivel visual, este efecto se nota aún más cuando  $L_2 = 70$ . Esto último es lógico ya que mientras el deducible  $M$  se acerca al valor del límite máximo de responsabilidad  $L_2$ , el monto agregado de siniestros que la cedente recupera tiende a cero. Por otro lado, los valores que toma la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados son mayores cuando el deducible  $M$  permanece constante y el límite



**Figura 6.26:** Histograma de la muestra obtenida de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros

máximo de responsabilidad  $L_2$  incrementa. En este caso, el reasegurador participará en mayor medida en cada uno de los siniestros que superen del deducible.

Con todo lo anterior, es de esperar que, para  $L_2$  fijo, la esperanza de  $X_{rea}$  sea menor a medida que  $M$  crece. Esto se muestra en los gráficos presentados en la Figura 6.27. En el último de ellos es posible apreciar que, para un deducible  $M$  fijo, la esperanza de los siniestros que la cedente espera recuperar son mayores mientras  $L_2$  crece, así como el hecho de que esta diferencia tiende a ser menor al pasar de un límite  $L_2 = 50$  a  $L_2 = 70$ . Lo último está relacionado con la distribución predictiva del monto individual de siniestros ya que el hecho de que las medias sean cercanas querrá decir que hay muy pocos siniestros individuales que superen el valor 50. De hecho, el valor  $L_2 = 50$  corresponde, aproximadamente, al cuantil 0,97 de la distribución del monto individual de siniestros mientras que  $L_2 = 70$  al cuantil 0,98.

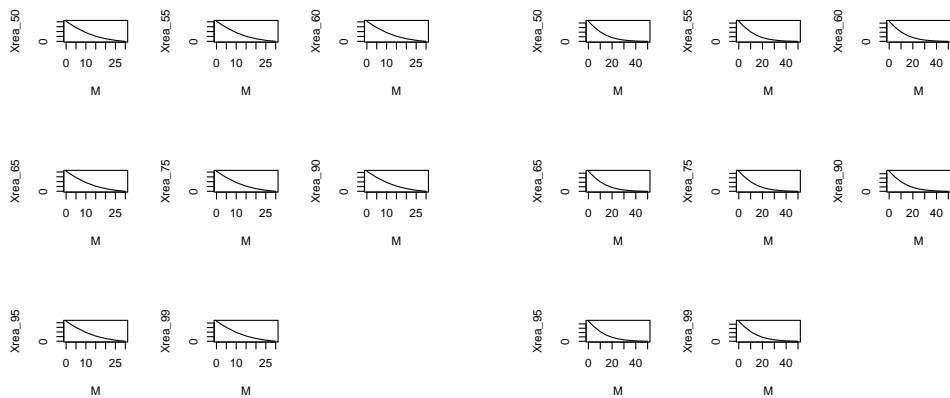


**Figura 6.27:** Medias predictivas del monto agregado de siniestros recuperados  $X_{rea}$  para cada límite máximo de responsabilidad  $L_2$  y deducible  $M$

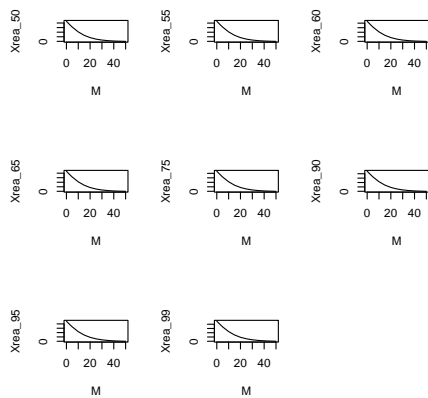
Como se ha comentado, en el apartado 4.8.2, la prima de reaseguro, calculada con base en

$$PR = X_{rea} \rho_2,$$

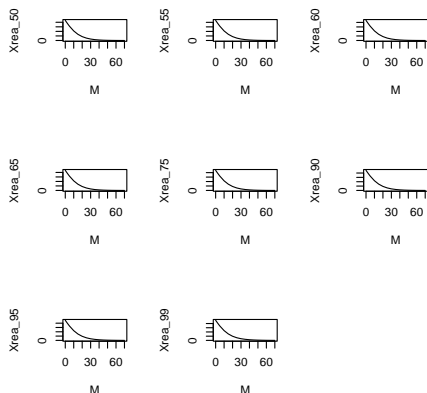
es decreciente del deducible  $M$ . Esto ocurre para cualquier valor de  $L_2$ , como puede apreciarse en la Figura 6.28.



(a)  $L_2 = 30$



(b)  $L_2 = 70$



(c)  $L_2 = 70$

**Figura 6.28:** Primas de reaseguro calculadas como  $PR = X_{rea\rho_2}$  para cada deducible

Con respecto al análisis de reaseguro óptimo. En la figura 6.29 se presenta los gráficos de la ganancia esperada, que se obtiene en cada una de las posibles combinaciones de  $M$  y  $L_2$ .

Como se puede observar, independientemente del valor de  $L_2$ , si la prima de reaseguro se calcula como la esperanza del monto agregado de siniestros recuperados (en el gráfico,  $PR = E(X_{rea})$ ), aún cuando en el gráfico parezca que hay una diferencia, la ganancia esperada se puede considerar constante, ya que la diferencia que existe es del orden  $10^{-6}$ . Elegir  $PR = E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$  se trata de un principio en el que la condición de optimización se cumple para toda  $M$ , tal como se demuestra teóricamente en la proposición 5.2.7, inciso *ii*. En la misma figura, observar que, para toda  $L_2$ , la utilidad es creciente a partir de  $\rho = 0,55$  (55 en el gráfico), en esos casos, la recomendación para la cedente será retener todos los siniestros sin contar con la protección del reaseguro. Desde un punto de vista teórico, esto puede explicarse a través de la proposición 5.2.7 (inciso *i*), donde se establece que, si  $PR(M) > E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , el deducible óptimo es  $M^* = L_2$ , es decir, se recomienda a la cedente no reasegurar bajo estas condiciones.

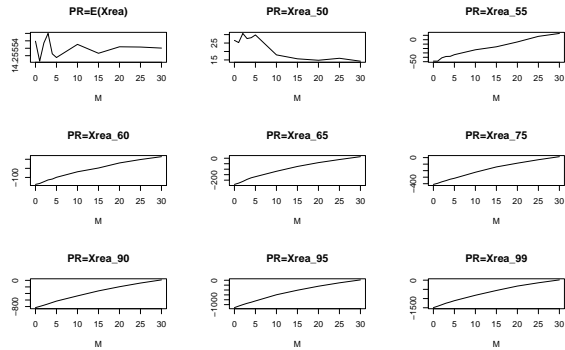
En la misma proposición (5.2.7, inciso *iii*) se concluye que es posible que la cedente se plantee un reaseguro exceso de pérdida por riesgo cuando

$$PR < E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}),$$

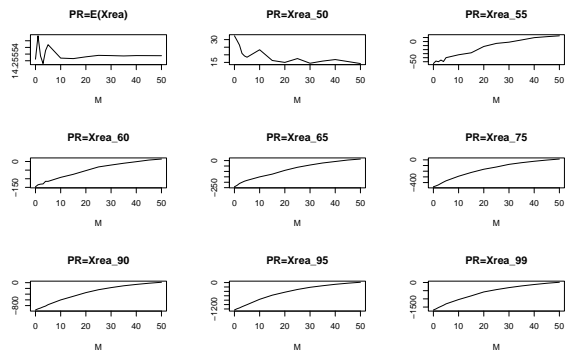
siendo el deducible óptimo  $M^*$  aquel que maximice la ganancia esperada.

Observemos que, en efecto, existe un deducible óptimo cuando la prima de reaseguro se calcula como  $PR = X_{rea0,50}$ . Este es precisamente un punto en el que  $PR$  es inferior a  $E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , como puede comprobarse en la Tabla 6.8.

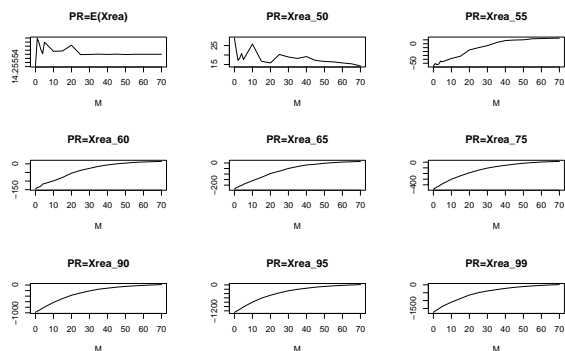
Así mismo, se puede comprobar que es posible plantearse un reaseguro en otros niveles de  $PR$ . Para ello, en la Figura 6.30 se muestra que la ganancia esperada tiene un óptimo distinto de  $L_2$  siempre que se cumpla la condición



(a)  $L_2 = 30$



(b)  $L_2 = 50$



(c)  $L_2 = 70$

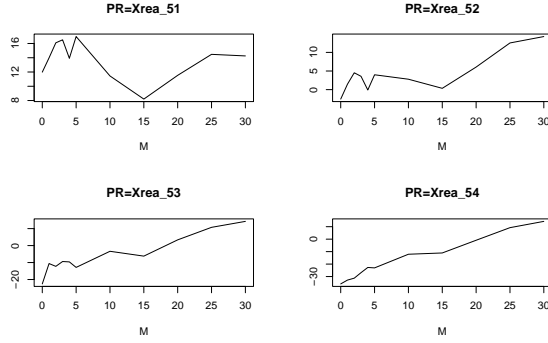
**Figura 6.29:** Ganancia esperada de la cedente para cada deducible cuando la prima de reaseguro  $PR$  se calcula como un cuantil de la distribución predictiva de  $X_{rea}$

**Tabla 6.8:** Cuantil correspondiente a la esperanza del monto agregado de siniestros recuperados

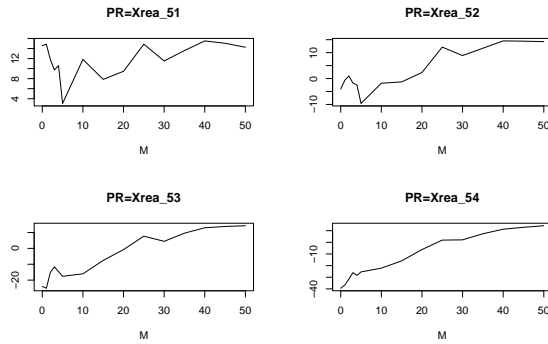
$M$	$L_2$		
	30	50	70
0	0,5069	0,5100	0,5062
1	0,5099	0,5107	0,5058
2	0,5116	0,5080	0,5039
3	0,5122	0,5061	0,5037
4	0,5100	0,5050	0,5051
5	0,5124	0,5021	0,5027
10	0,5037	0,5088	0,5100
15	0,5022	0,5014	0,5019
20	0,5013	0,5010	0,5015
25	0,5124	0,5127	0,5102
30		0,5003	0,5109
35		0,5069	0,5105
40		0,5211	0,5230
45		0,5250	0,5190
50			0,5190
50			0,5280
50			0,5290
50			0,5350

$$PR < E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}).$$

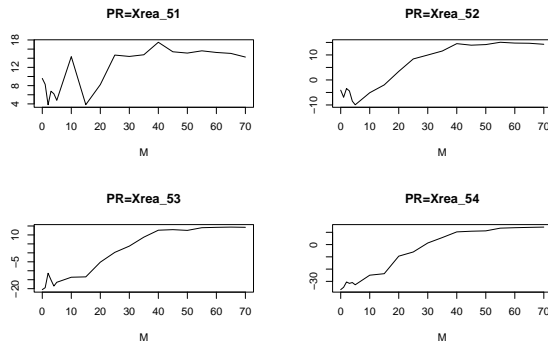
En la Tabla 6.9 se resumen los valores óptimos que se aprecian en la Figura 6.30. Finalmente, con objeto de ejemplificar el caso extremo, en el que la prima de reaseguro sea tan baja que, se recomiende a la cedente reasegurar todo el portafolio, se presenta la figura 6.31. En ella puede apreciarse cómo la ganancia esperada es decreciente, puesto que una prima tan baja responde al deseo de todas las cedentes, que quieren retener la mayor parte de la prima sin tener que renunciar por este



(a)  $L_2 = 30$



(b)  $L_2 = 50$



(c)  $L_2 = 70$

**Figura 6.30:** Ganancia esperada de la cedente para cada deducible cuando la prima de reaseguro  $PR$  se calcula como un cuantil de la distribución predictiva de  $X_{rea}$



**Tabla 6.9:** Deducibles óptimos obtenidos dependiendo de la cuantía en la prima de reaseguro

$L_2$	$PR$				
	$X_{rea0,50}$	$X_{rea0,51}$	$X_{rea0,52}$	$X_{rea0,53}$	$X_{rea0,54}$
30	2	5	30	30	30
50	0	40	50	50	50
70	0	40	65	65	70

hecho a la protección de reaseguro en el caso de grandes siniestros, mejor aún si se trata de todos los siniestros, como en este ejemplo.

## 6.7. Una solución a la prioridad óptima en un reaseguro stop loss

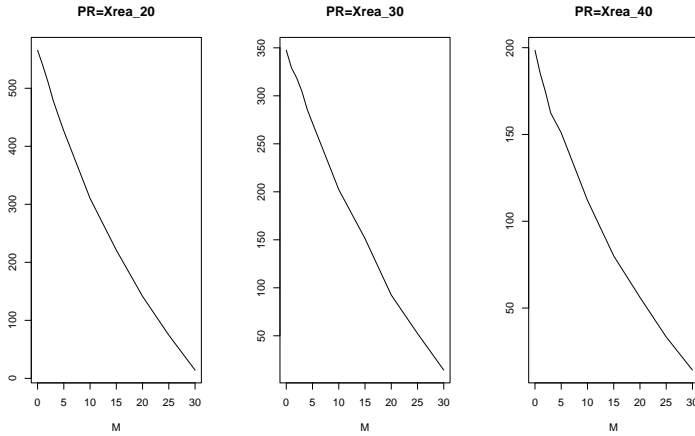
En este apartado supondremos que la cedente ha decidido reasegurar el portafolio  $n+1$  bajo un contrato stop loss, en el que la prima de reaseguro se calcula con base en el principio del valor esperado. Por tanto, se pretende determinar la prioridad óptima a partir de la maximización de la ganancia esperada  $E_{X|N,Z}(G)$ , donde  $G$  se define como en (5.29),

$$G = P - X - PR + [\min(X, L_3) - d] I_C(X) \quad (6.5)$$

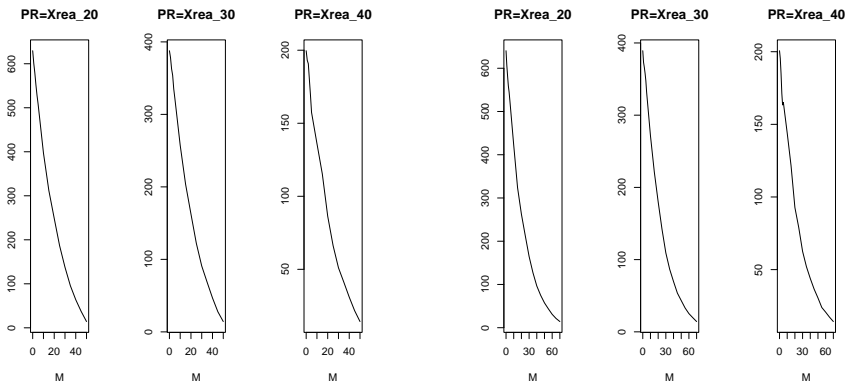
con  $C = \{X : X > d\}$ .

El cálculo de  $E_{X|N,Z}(G)$  se realiza a partir de 1.500 simulaciones de las variables aleatorias  $X$  y  $X_{rea}$ .

Los valores utilizados para el monto agregado de siniestros,  $X$ , son los generados en el apartado anterior. Para cada uno de ellos, de acuerdo con (4.57), se calcula



(a)  $L_2 = 30$



(b)  $L_2 = 50$

(c)  $L_2 = 70$

**Figura 6.31:** Ganancia esperada de la cedente para cada prioridad cuando la prima de reaseguro  $PR$  se calcula con base en los cuantiles  $X_{rea0,20}$ ,  $X_{rea0,30}$  y  $X_{rea0,40}$

el correspondiente valor de los siniestros recuperados,

$$X_{rea} = \begin{cases} 0 & X < d \\ X - d & d < X < L_3 \\ L_3 - d & X > L_3 \end{cases}$$

en cada combinación posible de la prioridad,  $d$ , y el límite máximo de responsabilidad,  $L_3$ .

Los valores de  $L_3$  planteados por el reasegurador son 22.000, 23.000, 24.000 y 26.000.

Cabe mencionar que el valor  $L_3 = 26.000$  corresponde a aquel que hace que el reasegurador participe en la totalidad de la pérdida que supera la prioridad. De tal forma que si  $d = 0$

$$E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}). \quad (6.6)$$

En lo que concierne a los posibles valores de las prioridades, los valores que considerados para  $d$  son: 0, 2.000, 4.000, 6.000, 8.000, 10.000, 12.000, 14.000, 16.000, 18.000, 20.000, 22.000, 23.000, 24.000 y 26.000. Las posibles combinaciones de  $d$  y  $L_3$  se obtienen tomando en cuenta que, por definición,  $d \leq L_3$ , y, que la igualdad querrá decir que la cedente no reasegura el portafolio.

Para realizar el análisis de la prioridad óptima se supone que la prima que la cedente cobra a sus reasegurados se calcula como la esperanza del monto agregado de siniestros. Es decir,

$$P = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}).$$

El valor de  $P$  puede ser calculado analíticamente a partir de las distribuciones predictivas del número y del monto de siniestros. Ya que, de acuerdo con (4.7.1),

$$E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(N_{n+1} | N) E(Z_{m+i} | \mathbf{Z}).$$

Por otro lado, el cálculo de la prima de reaseguro se realizará con base en el principio del valor esperado. Así, de acuerdo con (4.81),

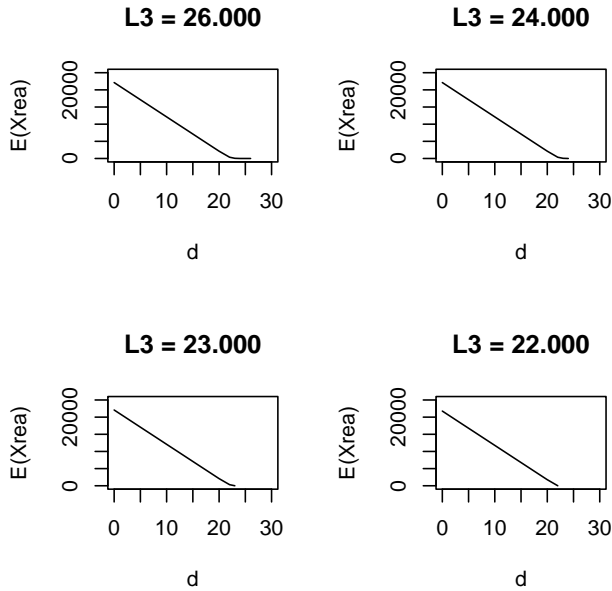
$$PR = X_{rea_{p_2}}.$$

Dicha selección de prima de reaseguro se calcula de las muestras de  $X_{rea}$  obtenidas mediante simulación, cuyos histogramas se presentan en el Apéndice F.

El comportamiento de la variable aleatoria  $X_{rea}$  es análogo al descrito en el reaseguro exceso de pérdida por riesgo. Así, observando los histogramas se puede comprobar que, en este caso, la distribución se sesga notablemente a la derecha a medida que  $d$  incrementa y  $L_3$  permanece constante. Lo cual significa que la variable tiende relativamente rápido a valores pequeños, ya que, a diferencia del exceso de pérdida por riesgo, este reaseguro actúa directamente sobre los valores de la variable aleatoria  $X$ .

De lo anterior se deduce que, para un límite máximo de responsabilidad  $L_3$  fijo, la esperanza del monto agregado de siniestros recuperados tiene una relación inversa con el valor de la prioridad  $d$ , como se puede observar en la Figura 6.32. En otras palabras, a medida que  $d$  crece, la cedente, en promedio, recupera un monto

menor sobre los siniestros totales. Sin embargo, el caso inverso ocurre cuando  $d$  permanece constante y  $L_3$  aumenta.

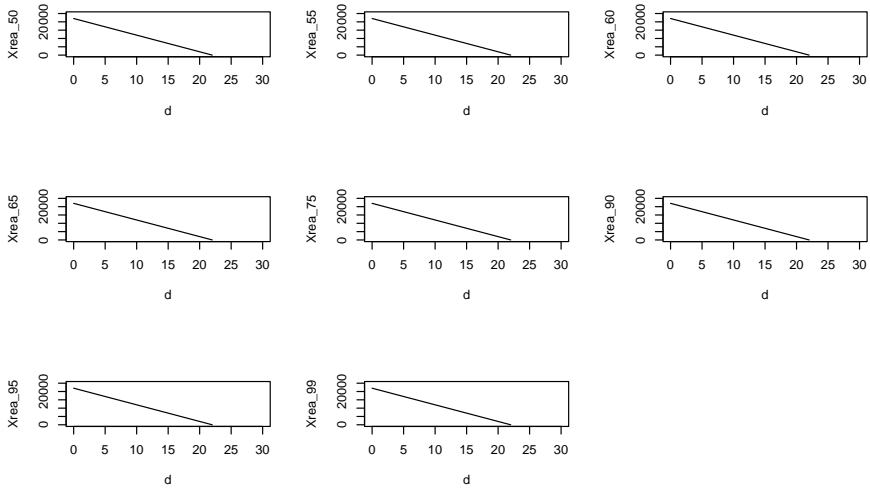


**Figura 6.32:** Medias predictivas del monto agregado de siniestros recuperados  $X_{rea}$  para cada límite máximo de responsabilidad  $L_2$  y prioridad  $d$

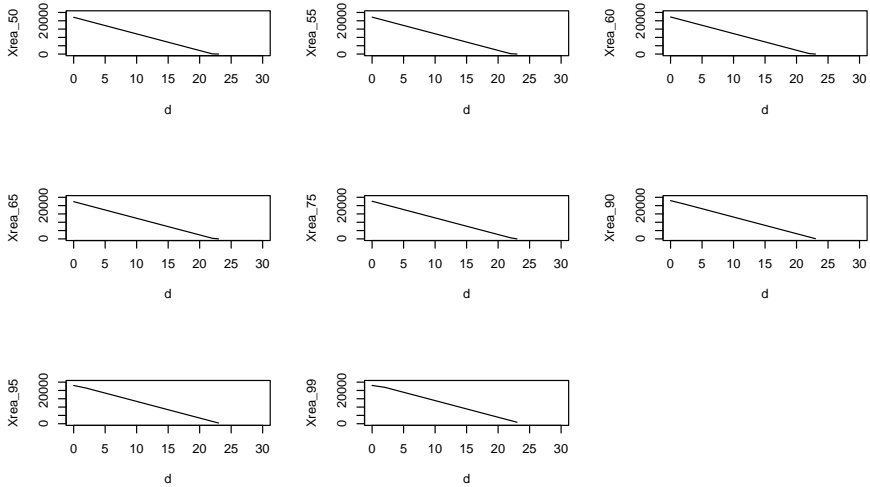
Como es de esperarse, el comportamiento de la prima de reaseguro,  $PR$ , es análogo, ya que es decreciente de  $d$ , como se observa en las figuras 6.33 y 6.34. En la primera se muestra la relación que existe entre la prioridad,  $d$ , y la prima de reaseguro,  $PR = X_{rea\rho_2}$ , de un stop loss cuando el límite máximo de responsabilidad es  $L_3 = 22.000$  ó  $L_3 = 23.000$ . Mientras tanto, en la segunda se aprecia la misma situación variando  $L_3$  a  $L_3 = 24.000$  ó  $L_3 = 26.000$ .

Pasando al análisis de reaseguro óptimo. La ganancia esperada fue calculada con base en los distintos valores obtenidos para  $X$  y  $X_{rea}$  y, bajo el supuesto de que la prima de reaseguro se calcula como el cuantil  $X_{rea\rho_2}$ .

En las figuras 6.35 y 6.36 se muestra los gráficos de la ganancia esperada para

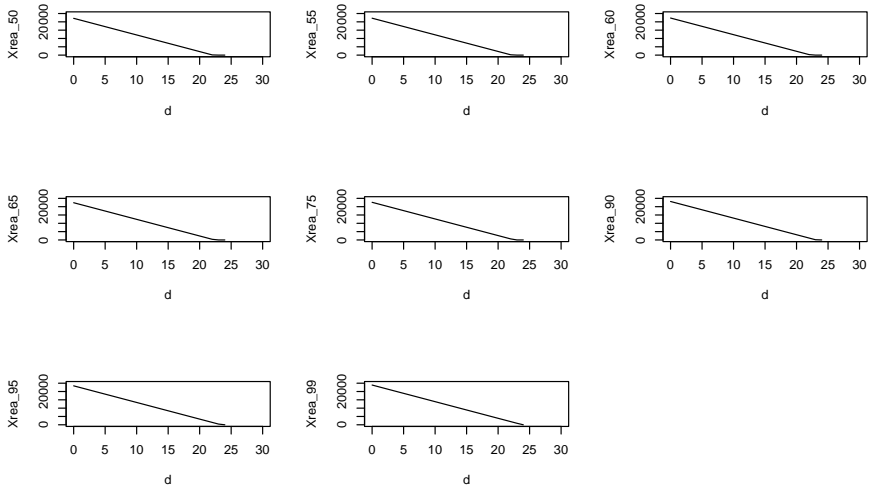


(a) Límite máximo de responsabilidad  $L_3 = 22.000$

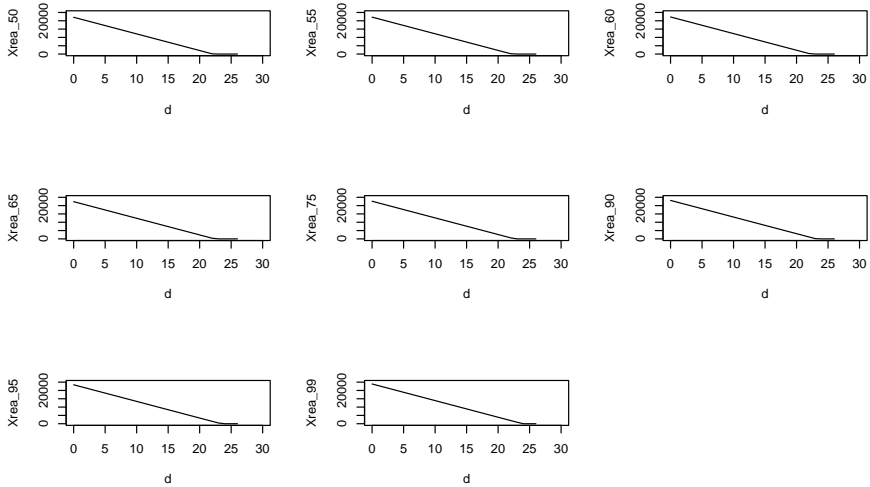


(b) Límite máximo de responsabilidad  $L_3 = 23.000$

**Figura 6.33:** Primas de reaseguro calculadas como  $PR = X_{rea_{p_2}}$  para cada prioridad



(a) Límite máximo de responsabilidad  $L_3 = 24.000$



(b) Límite máximo de responsabilidad  $L_3 = 26.000$

**Figura 6.34:** Primas de reaseguro calculadas como  $PR = X_{rea_{p_2}}$  para cada prioridad

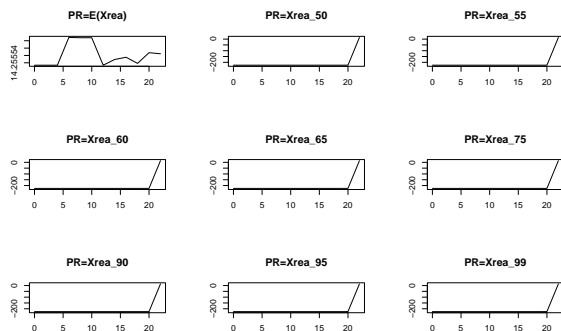
cada una de las posibles combinaciones de  $d$  y  $L_3$ , y, en distintas opciones de  $PR$ . De acuerdo con la proposición 5.3.7 (inciso *ii*), si  $PR = E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ , la condición de optimización se cumplirá para toda  $d$ . Desde un punto de vista práctico este es el resultado obtenido independientemente del valor de  $L_3$ , ya que la ganancia esperada bajo esa prima (en el gráfico,  $PR = E(X_{rea})$ ) se puede considerar constante, ya que la diferencia es del orden  $10^{-6}$ .

En ambas figuras (6.35 y 6.36) se puede comprobar, también, que si se elige la opción  $L_3 = 22.000$  la ganancia esperada siempre es creciente. Este resultado hace que la recomendación para la cedente sea retener todos los siniestros y no plantearse un contrato de reaseguro en esas condiciones. Las prioridades óptimas obtenidas en el resto de los límites máximos de responsabilidad se resumen en la Tabla 6.10.

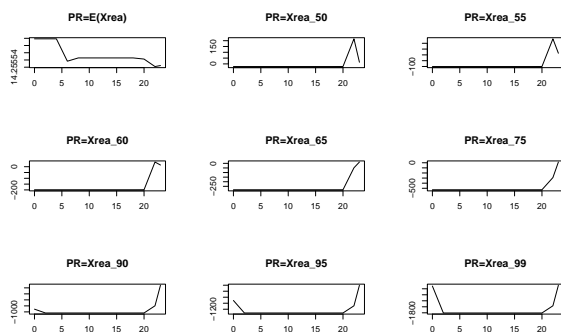
**Tabla 6.10:** Prioridades óptimas obtenidas dependiendo de la cuantía en la prima de reaseguro

	$L_3$		
$PR$	23.000	24.000	26.000
$X_{rea0,50}$	22.000	22.000	22.000
$X_{rea0,51}$	22.000	22.000	22.000
$X_{rea0,52}$	22.000	22.000	22.000
$X_{rea0,53}$	22.000	22.000	22.000
$X_{rea0,54}$	22.000	22.000	22.000
$X_{rea0,55}$	22.000	22.000	22.000
$X_{rea0,60}$	22.000	22.000	22.000
$X_{rea0,65}$	23.000	23.000	23.000
$X_{rea0,70}$	23.000	23.000	23.000
$X_{rea0,75}$	23.000	23.000	23.000
$X_{rea0,90}$	23.000	24.000	24.000
$X_{rea0,95}$	23.000	24.000	24.000
$X_{rea0,99}$	23.000	24.000	24.000

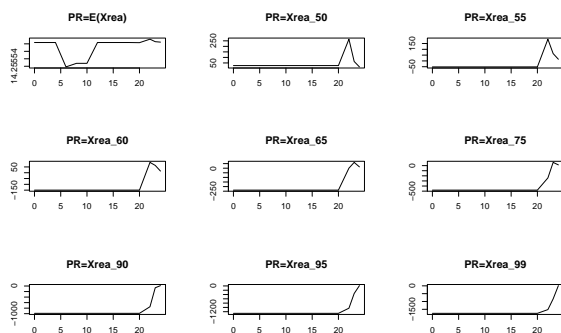




(a)  $L_3 = 22.000$

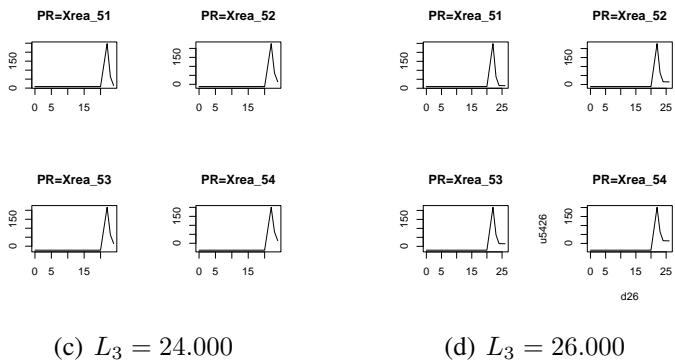
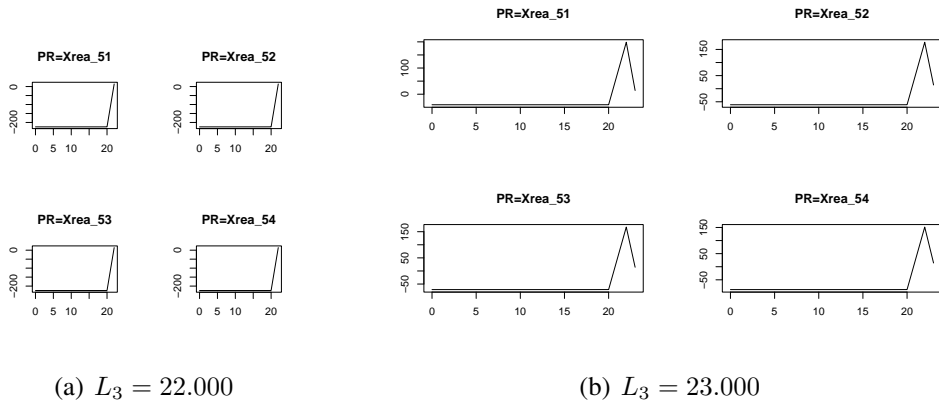


(b)  $L_3 = 23.000$



(c)  $L_3 = 24.000$

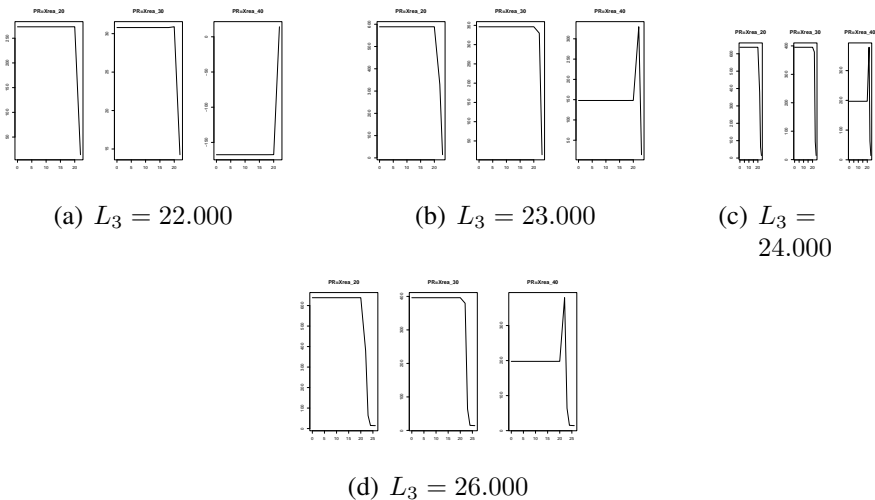
**Figura 6.35:** Ganancia esperada de la cedente para cada prioridad cuando la prima de reaseguro  $PR$  se calcula como un cuantil de la distribución predictiva de  $X_{rea}$



**Figura 6.36:** Ganancia esperada de la cedente para cada prioridad cuando la prima de reaseguro  $PR$  se calcula como un cuantil de la distribución predictiva de  $X_{rea}$

Con el fin de ejemplificar la influencia que tiene el valor de la prima de reaseguro en la elección de la prioridad óptima, en la Figura 6.37 se presenta la ganancia esperada que se obtiene al considerar que  $PR$  se calcula como los cuantiles  $X_{rea0,20}$ ,  $X_{rea0,30}$  y  $X_{rea0,40}$ . Puede observarse que, en una amplia mayoría de los casos, existe un máximo en la ganancia esperada y, por tanto, una prioridad óptima. Cabe resaltar el caso en el que  $L_3 = 22.000$  y  $PR = X_{rea0,40}$  (40 en el gráfico) en el que no se recomienda una protección de reaseguro stop loss ya que el valor  $X_{rea0,40}$  supera la esperanza del monto agregado de siniestros recuperados  $E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ .

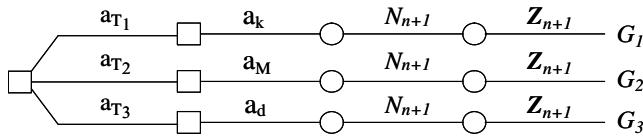
Esto último obedece al resultado presentado en la proposición 5.3.7 en donde que se estipula que, existirá una prioridad óptima en un reaseguro stop loss siempre que  $PR < E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ .



**Figura 6.37:** Ganancia esperada de la cedente para cada prioridad cuando la prima de reaseguro  $PR$  se calcula con base en los cuantiles  $X_{rea0,20}$ ,  $X_{rea0,30}$  y  $X_{rea0,40}$

## 6.8. Análisis global de reaseguro óptimo: comparación

Hasta aquí hemos presentado la elección de las características óptimas de cada tipo de reaseguro. Ahora bien, abordaremos la primera etapa del árbol de decisión planteado en la Figura 4.4.



**Figura 6.38:** Diagrama de árbol para el problema global del reaseguro óptimo.

En este momento, la cedente ha resuelto cada uno de los tres problemas de decisión correspondiente a cada tipo de reaseguro y cada rama tiene asignado un valor de ganancia esperada. Por tanto, la cedente elegirá el tipo de reaseguro cuya rama le proporciona el mayor valor. A tal efecto, presentaremos los valores de la ganancia esperada para cada retención óptima.

De acuerdo con los resultados obtenidos en cada reaseguro, su retención óptima se presenta en las siguientes tablas:

**Tabla 6.11:** Proporción óptima,  $k$  %, para cada valor de  $L_1$  en un reaseguro cuota parte

$L_1$		
20	35	50
90	80	70

**Tabla 6.12:** Deducibles óptimos obtenidos dependiendo de la cuantía en la prima de reaseguro y el valor de  $L_2$  en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo

	$PR$				
$L_2$	$X_{rea0,50}$	$X_{rea0,51}$	$X_{rea0,52}$	$X_{rea0,53}$	$X_{rea0,54}$
30	2	5	30	30	30
50	0	40	50	50	50
70	0	40	65	65	70

**Tabla 6.13:** Prioridades óptimas obtenidas dependiendo de la cuantía en la prima de reaseguro y el valor de  $L_3$  en un reaseguro stop loss

	$L_3$		
$PR$	23.000	24.000	26.000
$X_{rea0,50}$	22.000	22.000	22.000
$X_{rea0,51}$	22.000	22.000	22.000
$X_{rea0,52}$	22.000	22.000	22.000
$X_{rea0,53}$	22.000	22.000	22.000
$X_{rea0,54}$	22.000	22.000	22.000

Ahora bien, en las siguientes tablas se presenta el valor de la ganancia esperada correspondiente a cada retención óptima.

**Tabla 6.14:** Ganancia esperada obtenida para las proporciones óptimas en un reaseguro cuota parte

	$L_1$		
	20	35	50
	$5,84 \times 10^{-9}$	$1,31 \times 10^{-8}$	$3,02 \times 10^{-8}$

Como se puede observar en las tablas 6.14, 6.15 y 6.16, la ganancia esperada siempre es mayor si la cedente opta por contratar un reaseguro stop loss.

**Tabla 6.15:** Ganancia esperada obtenida para los deducibles óptimos en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo

$L_2$	$PR$				
	$X_{rea0,50}$	$X_{rea0,51}$	$X_{rea0,52}$	$X_{rea0,53}$	$X_{rea0,54}$
30	30, 68	16, 97	—	—	—
50	32, 49	15, 51	—	—	—
70	28, 90	17, 49	14, 67	14, 37	—

**Tabla 6.16:** Ganancia esperada obtenida para las prioridades óptimas en un reaseguro stop loss

$PR$	$L_3$		
	23.000	24.000	26.000
$X_{rea0,50}$	216, 13	265, 03	265, 91
$X_{rea0,51}$	198, 55	247, 46	248, 34
$X_{rea0,52}$	177, 52	226, 43	227, 30
$X_{rea0,53}$	167, 70	216, 61	217, 49
$X_{rea0,54}$	151, 53	200, 44	201, 32

Si bien es cierto que el reaseguro stop loss ofrece a la cedente la protección más amplia, cabe señalar que se trata de un contrato que no puede tener por objeto liberar a la cedente de ningún tipo de riesgo empresarial. Por lo anterior, el reasegurador exige que su obligación de indemnización comience cuando la cedente ha sufrido un daño técnico, esto es: siniestros+costos > primas. Las razones de esta prudencia por parte del reasegurador son, entre otras, que es un reaseguro en el que existe una excesiva transferencia de los riesgos al reasegurador sin posibilidades correspondientes de influencia en la determinación de la prima,  $P$ .

Así pues, optar por un reaseguro stop loss no garantiza a la cedente gozar de sus ventajas.

Es preciso mencionar que la decisión de reaseguro óptimo también depende de las

políticas de la compañía. En este sentido, si la cedente, a pesar de obtener como óptimo un reaseguro stop loss, decide no optar por este contrato, podrá contar como segunda mejor opción con un reaseguro exceso de pérdida por riesgo, el cual también actúa como protección en el caso de siniestros grandes. Sin embargo, bajo un reaseguro exceso de pérdida la cedente asume el riesgo de que el reasegurador no participe en siniestros inferiores al deducible.

Por último, se obtiene el reaseguro cuota parte como la peor elección para la cedente.

## 6.9. Análisis de reaseguro óptimo con criterio de mínima varianza

Con objeto de comparar nuestra solución al problema general del reaseguro óptimo con una metodología comúnmente utilizada tanto desde un punto de vista clásico como bayesiano, nos planteamos que la cedente elija el mejor tipo de reaseguro con base en el criterio de mínima varianza (presentado en el apartado 2.2.2).

Para ello, nos basamos en la metodología empleada en Pai (1997). En ella se supone que la cedente estará interesada en retener la misma proporción, digamos  $r$  del monto agregado de siniestros futuros. Es decir, se considerarán los valores de  $k$  y  $M$  que verifiquen

$$E(Z_{ret} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = rE(Z | \mathbf{Z}, \mathbf{N}). \quad (6.7)$$

El análisis global de reaseguro requiere estipular una serie de condiciones necesarias para hacer susceptibles de comparación los reaseguros involucrados. En nuestro caso, consideramos conveniente realizar el análisis para reaseguros que

operen bajo las mismas condiciones, esto es, los reaseguros exceso de pérdida por riesgo y cuota parte. Ambos están relacionados con el monto individual de siniestros,  $Z_{m+i}$ , y ambos se aplican automáticamente sin restricción adicional alguna. Para realizar el análisis se ha contemplado lo siguiente:

Se considera como límites máximos de responsabilidad,  $L_i, i = 1, 2$ , aquellos que obligan al reasegurador a participar en todos los siniestros en las mismas condiciones.

De acuerdo con la definición de cada tipo de reaseguro, los límites máximos de responsabilidad  $L_1, L_2$  no pueden compararse directamente ya que su interpretación varía en cada contrato (apartado 1.2.2). Con el fin de hacerlos comparables se utilizan aquellos que sean lo suficientemente grandes para que el reasegurador participe en todos los siniestros en las mismas condiciones. Independientemente del tipo de reaseguro, esto ocurre si, cuando  $\xi = 0$ ,

$$E(X_{rea} | \mathbf{Z}, \mathbf{N}) = E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N}). \quad (6.8)$$

Es decir, que cuando la cedente decida no retener siniestro alguno ( $\xi = 0$ ) sea el reasegurador quien pague la totalidad de los siniestros esperados ( $E(X | \mathbf{Z}, \mathbf{N})$ ).

Con base en los datos del portafolio que la cedente se plantea reasegurar, la condición (6.8) se cumple para los siguientes límites máximos de responsabilidad:

$$L_1 = 130 \quad (6.9)$$

$$L_2 = 130$$

Los valores  $L_1$  y  $L_2$  se obtuvieron analíticamente a partir de dicha condición.

Considerando el resultado anterior y las características de cada reaseguro, se calcularon los límites de retención que verificaran (6.7). A partir de las expresiones



obtenidas en el apartado 4.7.2, se calculó la varianza del monto agregado de siniestros retenidos para cada uno de los límites de retención obtenidos. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 6.17.

**Tabla 6.17:** Comparación de los reaseguros cuota parte (Q/S) y exceso de pérdida por riesgo (WXL-R) con base en el cálculo de la varianza del monto agregado de siniestros retenidos

$E(X_{ret}   \mathbf{Z}, \mathbf{N})$	$k$	$Var_{Q/S}(X_{ret}   \mathbf{Z}, \mathbf{N})$	$M$	$Var_{WXL-R}(X_{ret}   \mathbf{Z}, \mathbf{N})$
0,0000	0	$5,18 \times 10^{-7}$	0,0000	$5,18 \times 10^{-7}$
1.107,0322	5	1.006,65	0,8197	1.006,63
2.214,0645	10	4.026,53	1,6468	4.026,50
3.321,0967	15	9.059,68	2,4881	9.059,68
4.428,1289	20	16.106,10	3,3500	16.106,10
5.535,1612	25	25.165,70	4,2392	25.165,70
6.642,1934	30	36.238,70	5,1625	36.238,60
7.749,2256	35	49.324,90	6,1280	49.324,80
8.856,2578	40	64.424,30	7,1449	64.424,30
9.963,2901	45	81.537,00	8,2243	81.537,00
11.070,3223	50	100.663,00	9,3802	100.663,00
12.177,3545	55	121.802,00	10,6306	121.802,00
13.284,3868	60	144.955,00	11,9992	144.955,00
14.391,4190	65	170.120,00	13,5192	170.120,00
15.498,4512	70	197.299,00	15,2385	197.298,00
16.605,4835	75	226.492,00	17,2310	226.491,00
17.712,5157	80	257.697,00	19,6192	257.696,00
18.819,5479	85	290.916,00	22,6317	290.916,00
19.926,5801	90	326.148,00	26,7770	326.149,00
21.033,6124	95	363.393,00	33,6620	363.394,00
22.140,6446	100	604.004,09	130,0000	604.004,09

A partir de ellos se puede concluir que utilizando el criterio de mínima varianza ambos reaseguros son equivalentes, ya que las varianzas son prácticamente iguales. Este resultado contradice a lo esperado puesto que se trata de un criterio que, intuitivamente, aplica aversión al riesgo, indicando que la cedente prefiere cono-

cer con la mayor exactitud posible la parte del monto agregado de siniestros que le corresponderá pagar. En ese sentido, lo lógico es que la cedente prefiera reaseguros no proporcionales en los que se estipula una cantidad fija de la que la cedente se hará cargo. El hecho de no poder discernir con las varianzas muestra la necesidad de un análisis más completo en el que se incluya en el proceso de decisión elementos centrales en el problema como, por ejemplo, la prima de reaseguro, las cuales sí son tomadas en cuenta en el cálculo de la ganancia esperada.

# Conclusiones

Cualquier problema que involucre incertidumbre puede ser modelado desde un punto de vista bayesiano. En ese sentido se puede decir que este enfoque tiene particular cabida en las ciencias actuariales. Por ello, en este trabajo hemos planteado el análisis del reaseguro óptimo para la cedente, estructurándolo como un problema de decisión y proponiendo soluciones desde la perspectiva bayesiana para los contratos: cuota parte, exceso de pérdida por riesgo y stop loss.

El análisis de reaseguro óptimo se ha aplicado a los datos de un portafolio de vida colectivo. Aún cuando no se enfatiza dentro del trabajo, el tratamiento de un banco de datos tan grande no resultó sencillo. Sin embargo, una vez realizados los ajustes pertinentes para su manejo, éste se simplificó a partir del uso del paquete estadístico R y el programa Mathematica. Ambos fueron herramientas fundamentales en la generación de los resultados numéricos obtenidos.

En este trabajo se ha realizado el análisis con base en el modelo colectivo, hecho que lo hace no sólo aplicable al seguro de vida colectivo sino también a cualquier otro ramo. Así mismo, el modelo de decisión propuesto en este trabajo es directamente aplicable en situaciones prácticas en las que se requiere incorporar las regulaciones legales que afectan las decisiones de la cedente, tales como los impuestos o la constitución del margen de solvencia sobre primas de reaseguro.

En el modelo colectivo se parte de los siniestros del portafolio como un todo, ello requiere la especificación de distribuciones tanto para el número como para el

monto de siniestros. Por su parte, la solución del problema precisa el cálculo de sus correspondientes distribuciones predictivas. Para lo anterior, se consideraron distribuciones previas mínimo informativas y conjugadas. De forma general, se concluye que, debido al tamaño de la muestra con la que se cuenta, no se obtuvo una diferencia en los resultados en el uso de las distintas distribuciones previas, ni en los modelos supuestos para el número de siniestros.

Con el fin de consolidar un trabajo de investigación, que por primera vez propone una solución al problema general del reaseguro óptimo, desde el punto de vista de la teoría bayesiana de la decisión, como una primera parte del análisis se encontró la solución a la retención óptima dentro de cada tipo de reaseguro, suponiendo que la cedente está interesada en maximizar la ganancia esperada.

Se ha demostrado que únicamente será necesaria una protección de reaseguro cuota parte cuando la prima que la cedente cobra a sus asegurados sea igual o inferior a la esperanza predictiva de  $X$ , el monto agregado de siniestros. El cálculo de la prima con base en la distribución de la variable aleatoria  $X$  permite una tarificación con base en la experiencia. Su distribución podría utilizarse para una graduación de las probabilidades de muerte basada en la experiencia en siniestralidad del portafolio.

Dentro del análisis realizado para los reaseguros no proporcionales (exceso de pérdida por riesgo y stop loss) encontramos que la retención óptima dependerá de la metodología bajo la que se calcule la prima de reaseguro. Por lo anterior, aunque el cálculo de la prima de reaseguro es un problema previo a la decisión del reaseguro óptimo, y por tanto marginal a nuestro problema, consideramos conveniente ahondar en este tema. Con base en la investigación de los principios de cálculo de primas utilizados en este tipo de reaseguros, podemos afirmar que no existe una metodología concreta para determinarla, sino diversas opciones que normalmente se basan en el análisis del comportamiento en siniestralidad del portafolio que se reasegura. Desde nuestra perspectiva, lo anterior requiere conocer algunas características de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros que el reasegurador pagará al final del período. Para lograrlo, se obtuvo una muestra de

ella mediante simulaciones. Aún cuando dicha distribución es compleja analíticamente, las formas en las que se combinan las distribuciones involucradas ha sido de gran importancia para la obtención de resultados en este aspecto, así como el uso de métodos numéricos que permiten resolver los problemas a los que un estadístico bayesiano puede enfrentarse en la práctica. Particularmente, las técnicas numéricas permiten obtener resultados en problemas actuariales donde la dimensión de la información puede llegar a complicar su manejo.

El haber utilizado distintos principios de cálculo para las primas involucradas es particularmente relevante para un análisis de sensibilidad de los resultados, al modificar las componentes del problema.

En el caso práctico, en general, se obtuvieron valores de retención altos en los tres tipos de reaseguro. Lo anterior podría significar que, bajo esas condiciones, el portafolio analizado no necesariamente requería una protección de reaseguro, debido, por ejemplo, a que la prima cobrada fuera suficiente para hacer frente a la siniestralidad. Sin embargo, a pesar de que la cedente determine un monto de prima adecuado al tipo de riesgo, siempre se encontrará expuesta a desviaciones en la siniestralidad que, de ocurrir, debe asumirlas en su totalidad, y es ahí donde el reaseguro cobra sentido. Las desviaciones a las que se puede enfrentar consisten en: montos de siniestros elevados que afectan a riesgos individuales, siniestros de monto elevado producidos por un solo evento, elevada frecuencia de siniestros o una variación en la estructura del riesgo.

En cuanto al problema global de reaseguro, se obtuvo que el stop loss es el reaseguro óptimo, seguido del exceso de pérdida por riesgo. Así pues, es posible que la cedente pueda plantearse como la mejor opción una combinación adecuada de los reaseguros stop loss y exceso de pérdida por riesgo. Esto es, reasegurando el portafolio bajo un reaseguro exceso de pérdida y realizando un contrato stop loss sobre la retención neta, es decir, para la responsabilidad que le queda a la cedente tras la contratación del exceso de pérdida. Lo anterior ha de ser materia inmediata de investigación.

La optimización de la retención está relacionada con el límite máximo de responsabilidad  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . La cedente estará interesada en que el valor  $L_i$  sea lo suficientemente grande para que el reasegurador participe en las mismas condiciones en la totalidad del contrato, a cambio tendrá que asumir, cuando proceda, el correspondiente incremento en la prima de reaseguro. Por simplicidad, la mayoría de los autores que analizan la retención óptima suponen que el contrato no establece un límite máximo de responsabilidad. En este trabajo, la decisión de  $L_i$  se ha considerado anterior al reaseguro óptimo. Sin embargo, sería interesante en un futuro incorporar al reasegurador como decisor, ya que es a él a quien corresponde la elección tanto de la prima de reaseguro como del límite máximo de responsabilidad en el contrato, pudiendo plantearse como un juego bipersonal.

Abordar el problema general de reaseguro óptimo requiere construir un criterio adecuado para su selección, ya que los resultados obtenidos muestran que las características óptimas pueden variar en cada tipo de contrato. Desde nuestro punto de vista, el reaseguro óptimo será aquel que maximice la ganancia esperada de las condiciones óptimas obtenidas previamente en cada tipo de reaseguro. Este planteamiento supone que la cedente es neutra al riesgo, sin embargo, es posible que la cedente sea adversa al riesgo. Por ello, se ha planteado teóricamente la elección de funciones de utilidad que reflejan otra actitud, dejando la investigación abierta en orden a establecer su aplicación.

Cuando se compararon los resultados de reaseguro óptimo obtenidos en nuestra solución con los que arroja el criterio de mínima varianza se encontró que mediante el último no es posible determinar el mejor reaseguro. Lo anterior podría deberse al hecho de que el criterio de mínima varianza no toma en cuenta la diferencia en las primas que la cedente podría retener en cada reaseguro. Y, como se ha mostrado, la prima de reaseguro varía en cada contrato. Por esto, y todo lo expuesto en este trabajo, desde nuestro punto de vista el criterio de maximización de la ganancia esperada es razonable para elegir el reaseguro óptimo ya que conlleva un análisis sistemático de todos los elementos involucrados en el problema.

Finalmente, sólo queda enfatizar que no existe una receta para el reaseguro ópti-

mo. Diversas soluciones serán obtenidas en función de los factores que influyan en la decisión de la cedente. En ese sentido también es importante considerar otra línea de investigación en la que valdría la pena incidir desde un enfoque bayesiano, se trata del reaseguro óptimo obtenido con base tanto en la ganancia esperada como en la solvencia, esta última cuantificada a través de la probabilidad de ruina de la cedente y considerando las regulaciones legales existentes para la misma.





# Apéndice A

## Conceptos básicos y definiciones

### **Cesión**

Es aquel porcentaje o monto económico que la cedente transfiere en reaseguro.

### **Deducible**

En un reaseguro exceso de pérdida por riesgo, el reasegurador paga el monto económico del siniestro por encima de una cantidad,  $M$ , denominada deducible.

### **Límite máximo de responsabilidad**

Es el monto que el reasegurador estipula como cantidad máxima a pagar en un siniestro o conjunto de siniestros. Es decir, independientemente de las características del contrato, el reasegurador en ningún caso pagará una cantidad mayor en cada siniestro o monto agregado de siniestros.  $L_1$  denota el límite máximo de responsabilidad en un reaseguro cuota parte,  $L_2 - M$  en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo y,  $L_3 - d$  el de un reaseguro stop loss.

## **Margen de seguridad**

Es un recargo  $w$  que se efectúa en la prima de con el fin de prevenir posibles desviaciones en la siniestralidad esperada.

## **Monto agregado de siniestros**

Es la suma total de los siniestros que el asegurador ha pagado en un período de tiempo, digamos un año. La variable que identifica al monto agregado de siniestros es la  $X$ .

## **Monto del $i$ -ésimo siniestro**

Es la cantidad monetaria que el asegurador paga por la ocurrencia de un siniestro.  $Z_i$  es el monto del  $i$ -ésimo siniestro, con  $i = 1, 2, \dots, N$ .

## **Monto de siniestros recuperados**

Es el monto de siniestros que corresponde pagar al reasegurador. Se denominan recuperados porque constituyen un ingreso para la cedente. Se denota  $X_{rea}$  al monto agregado de siniestros recuperados y  $Z_{rea_i}$  en el caso del monto recuperado del  $i$ -ésimo siniestro.

## **Monto de siniestros retenidos**

Es el monto de siniestros que paga la cedente, una vez descontado el monto que corresponda al reasegurador. Al escribir  $X_{ret}$  nos referiremos al monto agregado de siniestros retenidos, es decir, aquel que al final tendrá que pagar la cedente, mientras que cuando escribamos  $Z_{ret_i}$  será el monto retenido del  $i$ -ésimo siniestro.

## **Número de siniestros**

Es la cantidad de siniestros ocurridos en un período de tiempo  $t$ . En este trabajo se considera  $t = 1$  año y  $N$  la variable del número de siniestros.

## **Póliza**

Documento que instrumenta el contrato de seguro, en el que se reflejan las normas que de forma general, particular o especial regulan las relaciones contractuales convenidas entre el asegurador y el asegurado.

## **Portafolio de riesgo**

Es el conjunto de unidades (personas aseguradas) de un mismo riesgo.

## **Prima**

Aportación económica que ha de realizar el asegurado a cambio de la cobertura de riesgo que el asegurador le ofrece.

## **Prima de reaseguro**

Aportación económica  $PR$  que la cedente paga al reasegurador a cambio de la cobertura de reaseguro contratada.

## **Prima de riesgo**

Es aquella en la que el asegurador refleja su precio básico del riesgo que cubrirá, en función de la probabilidad de ocurrencia y del monto de la pérdida esperada en la que incurrirá por concepto de siniestros. Es conveniente aclarar que cuando se usa el término prima en este trabajo, todo el tiempo nos estaremos refiriendo a la prima de riesgo y que se identifica con la letra  $P$ .

## **Prima de retención**

Este concepto es utilizado para denominar la prima que la cedente conserva después del reaseguro, es decir,  $P_{ret} = P - PR$ .

## **Prioridad**

Se denomina prioridad al monto económico  $d$  por encima del cual la cedente transfiere en reaseguro stop-loss el monto agregado de siniestros.

## **Proporción**

Se denomina proporción al porcentaje de retención en un reaseguro cuota parte, y será denotada  $k$ .

## **Retención**

Es aquel porcentaje o monto del riesgo que la cedente asume después de transmitir en reaseguro parte de él.

## **Riesgo**

Se utiliza para designar la probabilidad de ocurrencia de un siniestro  $\phi$ , en cuyo caso la cedente estará obligada a cubrir la indemnización.

## **Seguro de vida**

Aquel que se caracteriza porque el objeto asegurado es la persona humana. El asegurador paga a los beneficiarios, en caso de muerte del asegurado dentro del período pactado, la suma asegurada estipulada en el contrato.

## **Seguro de vida colectivo**

Modalidad del seguro de vida, que se caracteriza por cubrir mediante un sólo contrato múltiples asegurados que integran una colectividad homogénea.

## **Siniestro**

Es la manifestación concreta del riesgo asegurado, que produce unos daños garantizados en la póliza hasta determinado monto. En el seguro de vida, siniestro es la muerte de la persona asegurada, que de ocurrir, obliga al asegurador a pagar a sus beneficiarios, la suma asegurada contratada para esta cobertura.

## **Suma asegurada**

Compensación o resarcimiento económico que paga el asegurador al asegurado o sus beneficiarios, por el menoscabo producido por la ocurrencia de un siniestro.



# Apéndice B

## Distribuciones

En este Apéndice se presenta las distribuciones que son mencionadas en el trabajo.

### Distribución Binomial

$N \sim \text{Bi}(n, \phi); n = 1, 2, \dots, 0 \leq \phi \leq 1$

$$p(N | n, \phi) = \binom{n}{N} \phi^N (1 - \phi)^{(n-N)} \quad N = 0, 1, 2, \dots, n.$$

donde:

$$\binom{n}{N} = \frac{n!}{(N!) (n - N)!}$$

$$E(N) = n\phi$$

$$\text{Var}(N) = n\phi(1 - \phi)$$

## Distribución Poisson

$$N \sim \text{Pn}(\lambda); \lambda > 0$$

$$p(N | \lambda) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^N}{N!} \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

en la que:

$$E(N) = \lambda$$

$$\text{Var}(N) = \lambda$$

## Distribución Binomial Negativa

$$N \sim \text{BN}(\alpha, p); 0 < p \leq 1, \alpha > 0$$

$$p(N | \alpha, p) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} p^\alpha (1-p)^n \quad n = 0, 1, \dots$$

donde:

$$E(N) = \frac{\alpha(1-p)}{p}$$

$$\text{Var}(N) = \frac{\alpha(1-p)}{p^2}$$

## Distribución Gamma

$$Z \sim \text{Ga}(\alpha, \beta); \alpha > 0, \beta > 0$$

$$p(Z | \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} z^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{z}{\beta}\right) I_{(0,\infty)}(z)$$



en la que:

$$E(Z) = \alpha\beta$$
$$\text{Var}(Z) = \alpha\beta^2$$

### Distribución lognormal

$Z \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2); \mu > 0, \sigma > 0$

$$p(Z | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha z}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(\log z - \mu)}{\sigma}\right)^2\right] I_{(0, \infty)}(z)$$

donde:

$$E(Z) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$
$$\text{Var}(Z) = \exp(2\mu + \sigma^2) (\exp(\sigma^2) - 1)$$

### Distribución Pareto

$Z \sim \text{Pareto}(z_0, \alpha); 0 < z_0 < \infty, \alpha > 0$

$$p(Z | z_0, \alpha) = \frac{\alpha}{z_0} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{\alpha+1} I_{(z_0, \infty)}(z)$$

con:

$$E(Z) = \frac{\alpha z_0}{\alpha - 1} \quad \alpha > 1$$

## Distribución Weibull

$Z \sim \text{Weibull}(c, \gamma); c > 0, \gamma > 0$

$$p(Z | c, \gamma) = c\gamma z^{\gamma-1} \exp(-cz^\gamma) \quad z > 0$$

donde:

$$E(Z) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}{c^{\frac{1}{\gamma}}}$$
$$\text{Var}(Z) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)}{c^{2\gamma}} - E^2(Z)$$

## Distribución Burr

$Z \sim \text{Burr}(\alpha, \lambda, \gamma); \alpha > 0, \lambda > 0, \gamma > 0$

$$p(Z | \alpha, \lambda, \gamma) = \frac{\alpha\gamma\lambda^\alpha z^{\gamma-1}}{(\lambda+z^\gamma)^{\alpha+1}} \quad z > 0$$

en la que:

$$E(Z) = \frac{\lambda^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{\alpha-1}{\gamma}\right) \Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{\Gamma(\alpha)} \quad \alpha > \frac{1}{\gamma}$$
$$\text{Var}(Z) = \frac{\lambda^{\frac{2}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{\alpha-2}{\gamma}\right) \Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)}{\Gamma(\alpha)} - E^2(Z) \quad \alpha > \frac{2}{\gamma}$$

## Distribución Exponencial

$y \sim \text{Ex}(\beta); \beta > 0$

$$p(y | \beta) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) I_{(0, \infty)}(y)$$

en la que:

$$\begin{aligned}E(y) &= \beta \\ \text{Var}(y) &= \beta^2\end{aligned}$$

### Distribución Beta

$\phi \sim \text{Be}(\alpha, \beta); \alpha > 0, \beta > 0$

$$p(\phi | \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \phi^{\alpha-1} (1-\phi)^{\beta-1} \quad 0 < \phi < 1$$

$$E(\phi) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$\text{Var}(\phi) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

### Distribución Normal

$y \sim N(\mu, \sigma); -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$

$$p(y | \mu, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad -\infty < y < \infty$$

$$E(y) = \mu$$

$$\text{Var}(y) = \sigma^2$$

Las distribuciones que se presentan en lo sucesivo son de importancia en el proceso de inferencia bayesiana que se realiza en este trabajo.

La distribución Gamma Inversa es utilizada en la inferencia bayesiana que se realiza para el monto individual de siniestros.

### Distribución Gamma Inversa

$$\theta \sim \text{IG}(\alpha, \beta); \alpha > 0, \beta > 0$$

$$p(\theta | \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \theta^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\frac{1}{\theta\beta}\right) I_{(0,\infty)}(\theta)$$

$$E(\theta) = \frac{1}{\beta(\alpha-1)} \quad \text{si } \alpha > 1$$

$$\text{Var}(\theta) = \frac{1}{\beta^2(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \quad \text{si } \alpha > 2$$

Tal como su nombre lo indica,  $1/\theta \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$ .

Las distribuciones Poisson-Gamma y Binomial-Beta resultan de interés en la predicción del número de siniestros.

### Distribución Poisson-Gamma

$$N \sim \text{Pg}(\alpha, \beta, n); \alpha > 0, \beta > 0, n = 1, 2, \dots$$

$$p(N | \alpha, \beta, n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+N)}{N!} \frac{n^N}{\left(\frac{1}{\beta}+n\right)^{\alpha+N}} I_{\{0,1,2,\dots\}}(N)$$

$$E(N) = n\alpha\beta$$

$$\text{Var}(N) = n\alpha\beta^2 \left(\frac{1}{\beta} + n\right)$$

Esta distribución es generada por la mixtura

$$\text{Pg}(N | \alpha, \beta, n) = \int_0^{\infty} \text{Pn}(N | n\lambda) \text{Ga}(\lambda | \alpha, \beta) d\lambda.$$

### Distribución Binomial-Beta

$N \sim \text{Bb}(\alpha, \beta, n); \alpha > 0, \beta > 0, n = 1, 2, \dots$

$$p(N | \alpha, \beta, n) = c \binom{n}{N} \Gamma(\alpha + N) \Gamma(\beta + n - N) \quad N = 0, \dots, n.$$

donde:

$$c = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha + \beta + n)}$$

$$E(N) = n \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\text{Var}(N) = \frac{n\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \frac{(\alpha + \beta + n)}{(\alpha + \beta + 1)}$$

Esta distribución es generada por la mixtura

$$\text{Bb}(N | \alpha, \beta, n) = \int_0^1 \text{Bi}(N | n, \phi) \text{Be}(\phi | \alpha, \beta) d\phi.$$

La distribución Gamma-Gamma aparece en el proceso de inferencia bayesiana del monto individual de siniestros.

## Distribución Gamma-Gamma

$Z \sim \text{Gg}(\alpha, \beta, n); \alpha > 0, \beta > 0, n = 1, 2, \dots$

$$p(Z | \alpha, \beta, n) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n)} \frac{z^{n-1}}{\left(\frac{1}{\beta}+z\right)^{\alpha+n}} I_{(0,\infty)}(z)$$

$$E(Z) = \frac{n}{\beta(\alpha-1)} \quad \alpha > 1$$

$$\text{Var}(Z) = \frac{n^2+n(\alpha-1)}{\beta^2(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \quad \alpha > 2$$

Esta distribución es generada por la mixtura

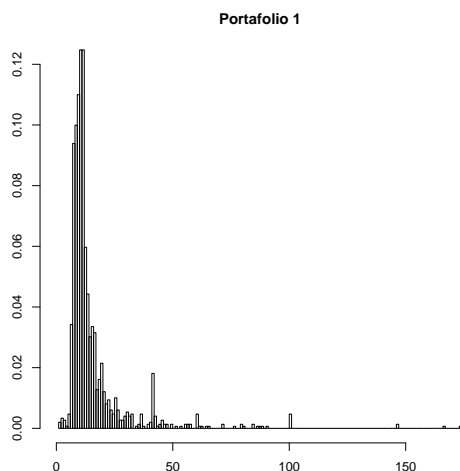
$$\text{Gg}(Z | \alpha, \beta, n) = \int_0^\infty \text{Ga}(Z | n, \theta) \text{IG}(\theta | \alpha, \beta) d\theta.$$

# Apéndice C

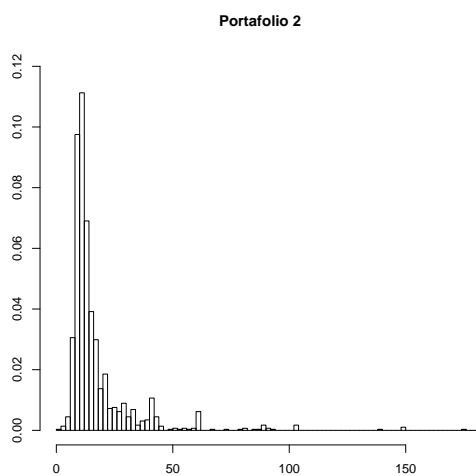
## Monto Individual de Siniestros de cada portafolio

La información del monto individual de siniestros, en cada portafolio, se resume en los histogramas que se presentan a continuación. Para una mayor explicación de los datos, en la Tabla C se muestran los valores de la media y la desviación típica. En el primer renglón se presenta el número de portafolio, el segundo corresponde a  $\bar{Z}_j$  y el tercero muestra el valor de  $S_j$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9
15,451	17,302	15,376	13,979	14,402	14,380	17,617	20,556	20,436
14,559	17,487	14,350	12,651	11,398	11,902	21,582	40,578	31,564

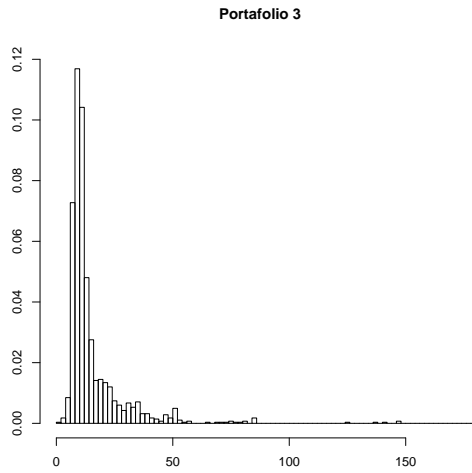


**Figura C.1:** Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 1

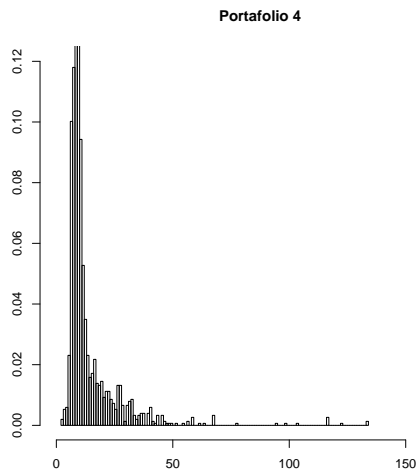


**Figura C.2:** Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 2

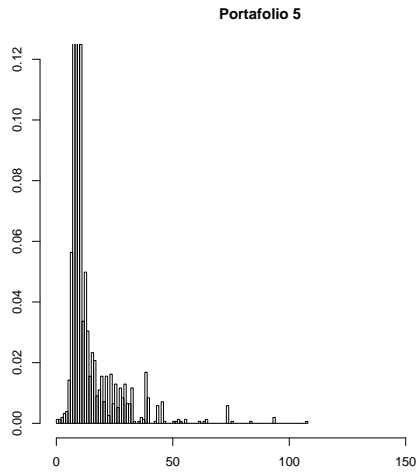




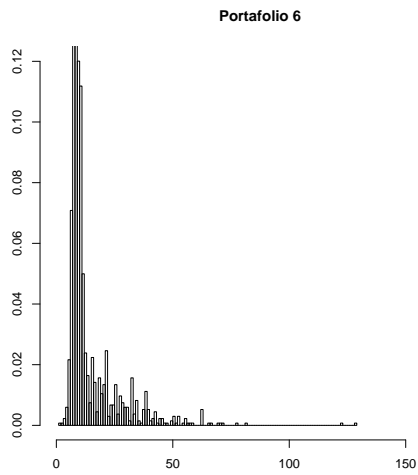
**Figura C.3:** Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 3



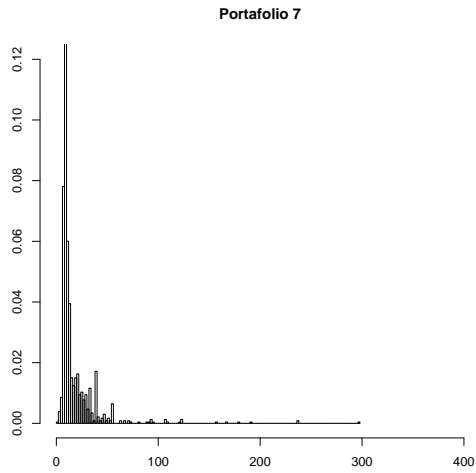
**Figura C.4:** Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 4



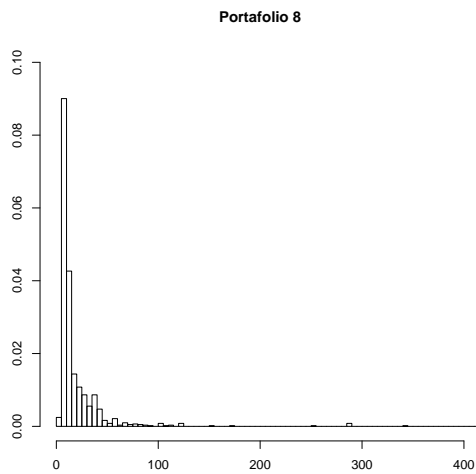
**Figura C.5:** Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 5



**Figura C.6:** Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 6

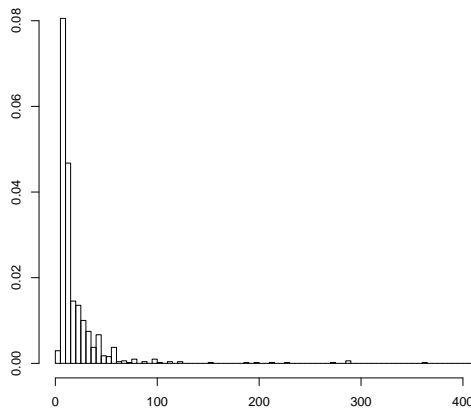


**Figura C.7:** Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 7



**Figura C.8:** Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 8

**Portafolio 9**



**Figura C.9:** Histograma del monto individual de siniestros del portafolio 9

# Apéndice D

## Primera y segunda derivadas de la log-distribución posterior marginal de $\alpha$

Sea,

$$\pi(\alpha | \mathbf{Z}) \propto \frac{\sqrt{\alpha PG(1, \alpha) - 1} \left( \prod_{i=1}^m Z_i^\alpha \right) \Gamma(\alpha m)}{\Gamma^m(\alpha) (m\bar{Z})^{\alpha m}}$$

la distribución posterior marginal de  $\alpha$ .

El logaritmo de la distribución  $L = \log \pi(\alpha | \mathbf{Z})$  resulta:

$$L = \frac{\log(\alpha PG(1, \alpha) - 1)}{2} + \alpha \sum_{i=1}^m \log(Z_i) - m \log \Gamma(\alpha) + \log \Gamma(\alpha m) - \alpha m \log(m\bar{Z}) + \log(c)$$

Por tanto,

$$L' = \frac{PG(1, \alpha) + \alpha PG(2, \alpha)}{2(\alpha PG(1, \alpha) - 1)} + \sum_{i=1}^m \log(Z_i) - m\Psi(\alpha) + m\Psi(\alpha m) - m \log(m\bar{Z})$$

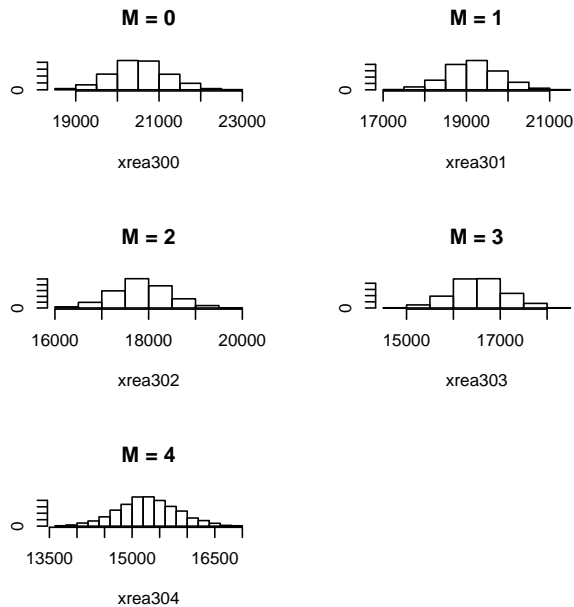
y,

$$L'' = \frac{\alpha^2 PG(1, \alpha) PG(3, \alpha) - PG^2(1, \alpha) - \alpha^2 PG^2(2, \alpha) - 2PG(2, \alpha) - \alpha PG(3, \alpha)}{2(\alpha PG(1, \alpha) - 1)^2} + \\ -mPG(1, \alpha) + m^2 PG(1, \alpha m)$$

# Apéndice E

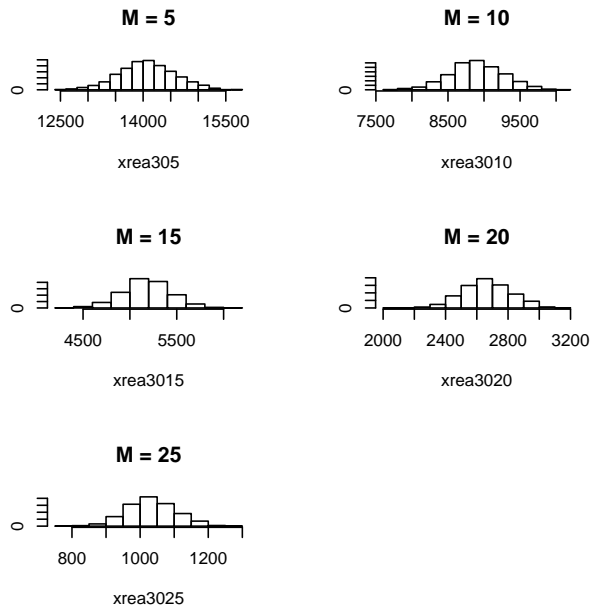
## **Monto agregado de siniestros retenidos: reaseguro exceso de pérdida**

A continuación se presenta los histogramas para las muestras obtenidas mediante simulación de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros retenidos en un reaseguro exceso de pérdida por riesgo.

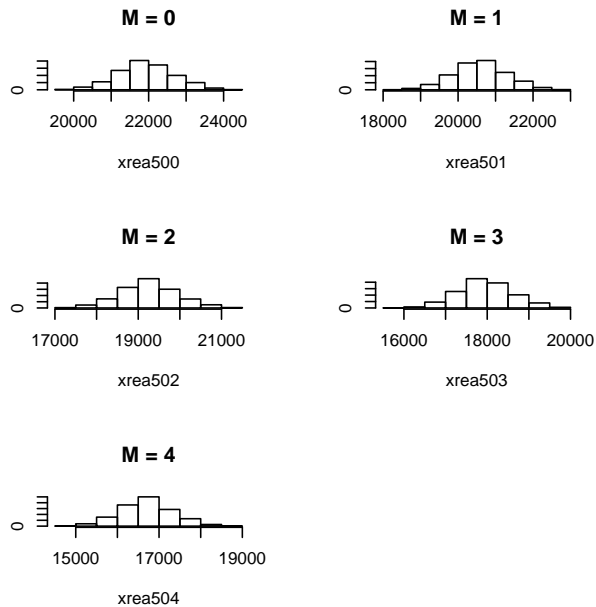


**Figura E.1:** Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando  $L_2 = 30$

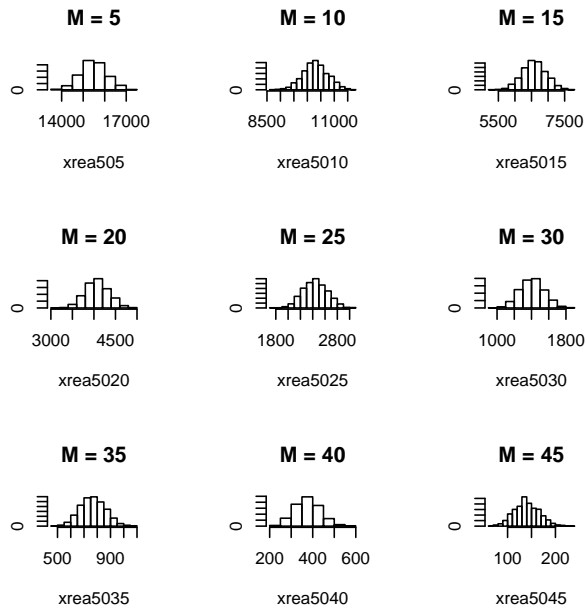




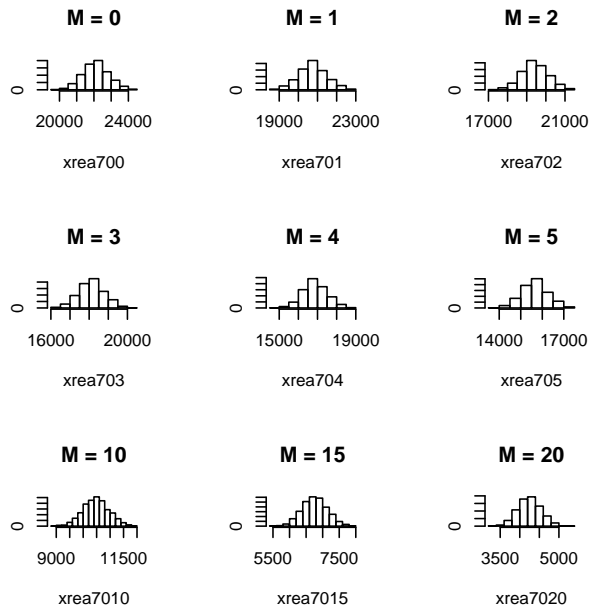
**Figura E.2:** Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando  $L_2 = 30$



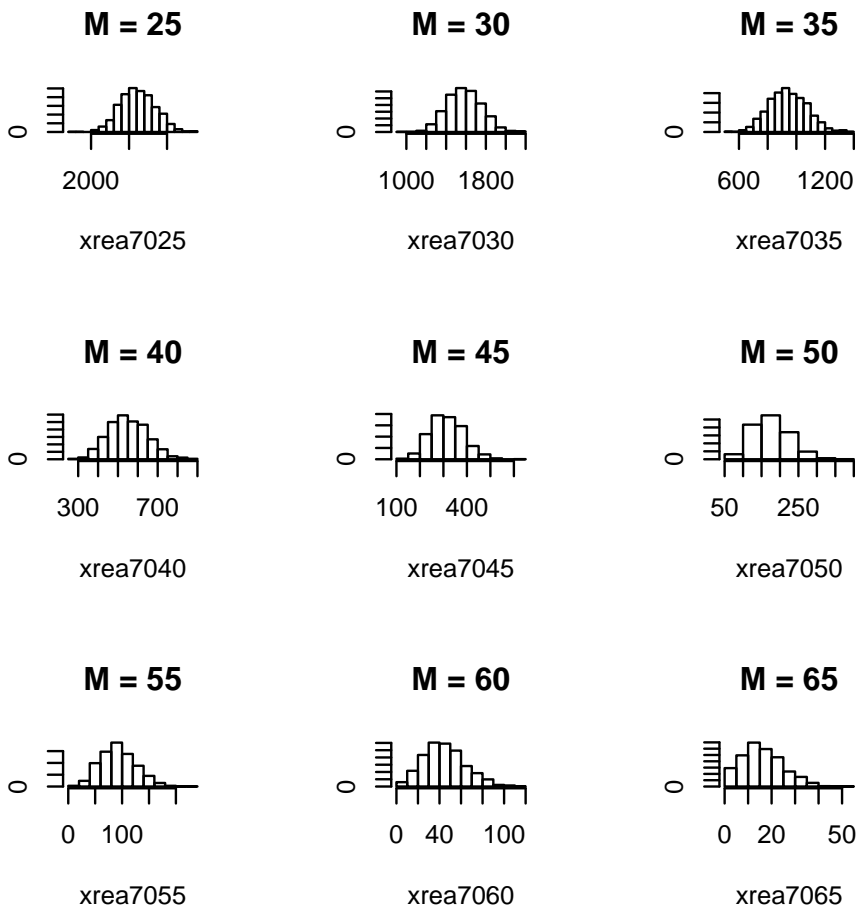
**Figura E.3:** Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando  $L_2 = 50$



**Figura E.4:** Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando  $L_2 = 50$



**Figura E.5:** Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando  $L_2 = 70$



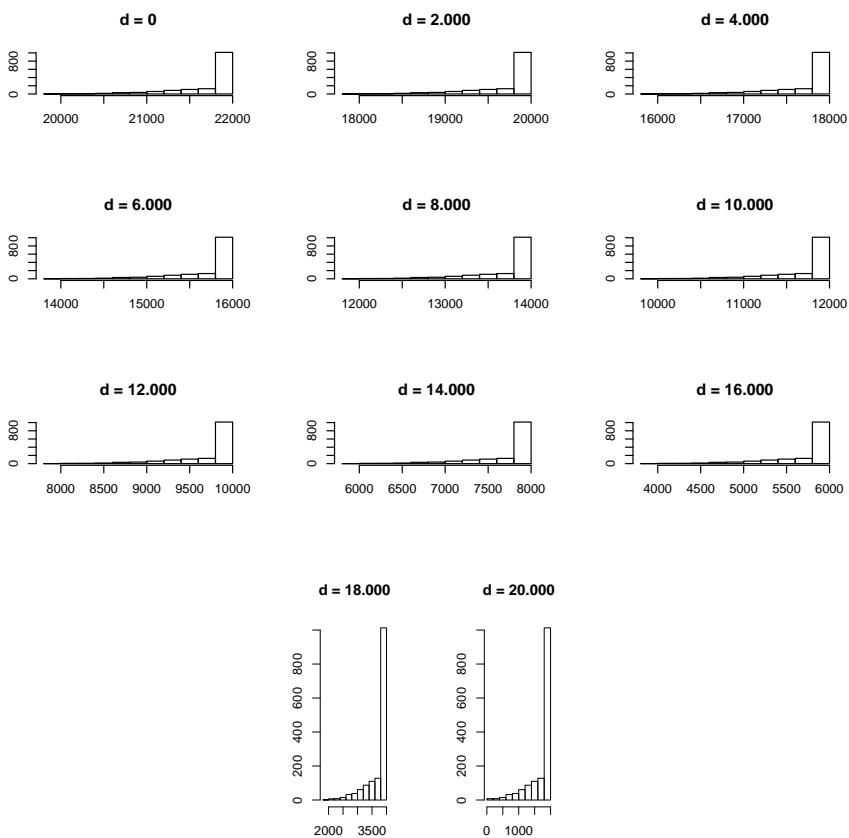
**Figura E.6:** Histogramas de la muestras obtenidas de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados para diferentes deducibles, considerando  $L_2 = 70$



## **Apéndice F**

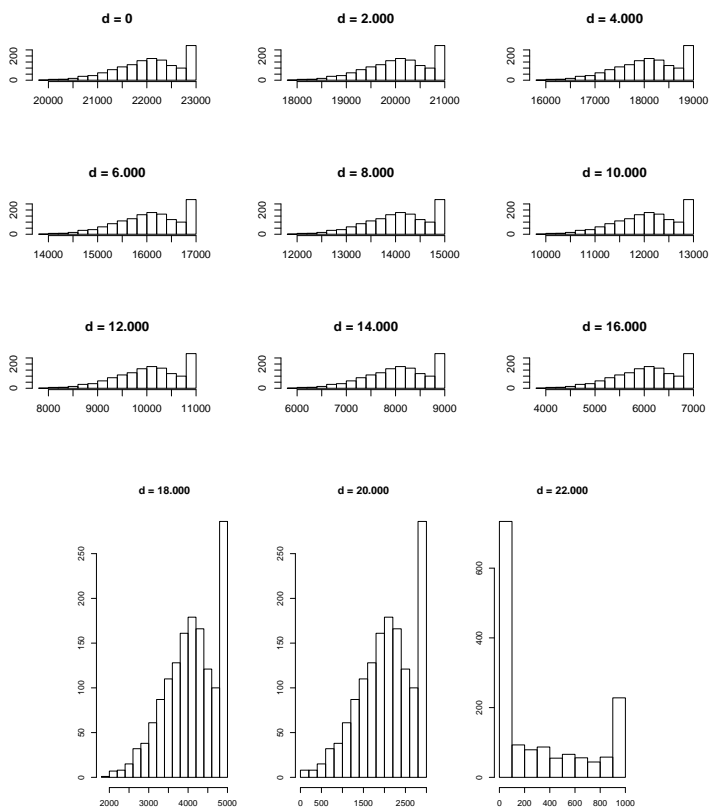
# **Monto agregado de siniestros retenidos: reaseguro stop loss**

A continuación se presenta los histogramas para las muestras obtenidas mediante simulación de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros retenidos en un reaseguro stop loss.

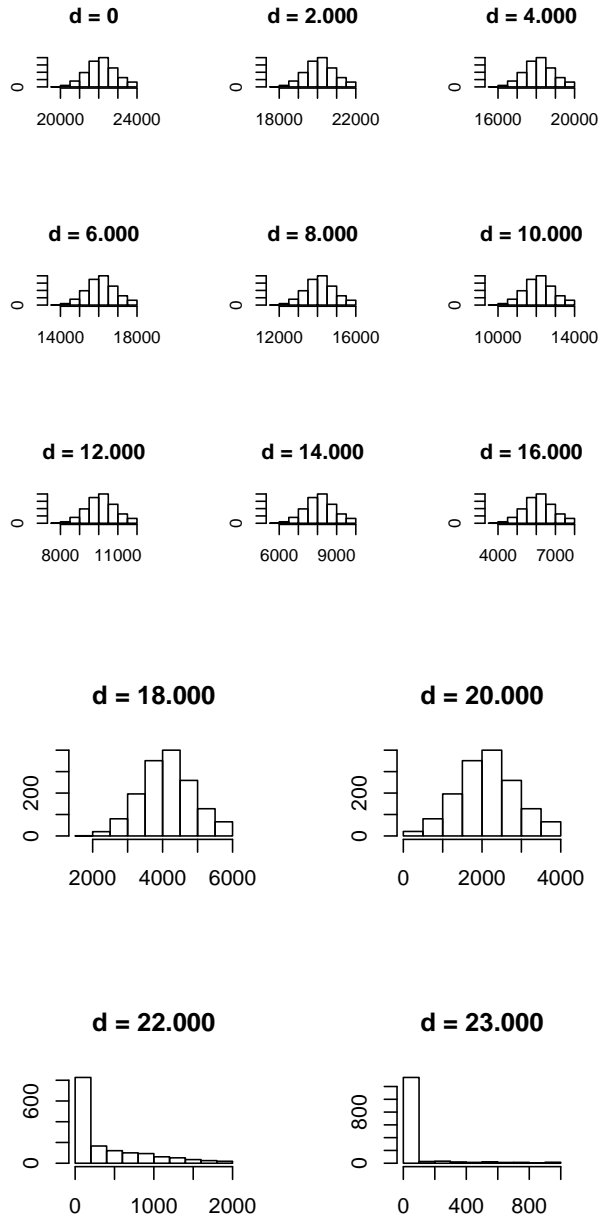


**Figura F.1:** Histogramas de las simulaciones de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro stop loss para diferentes deducibles cuando  $L_3 = 22.000$

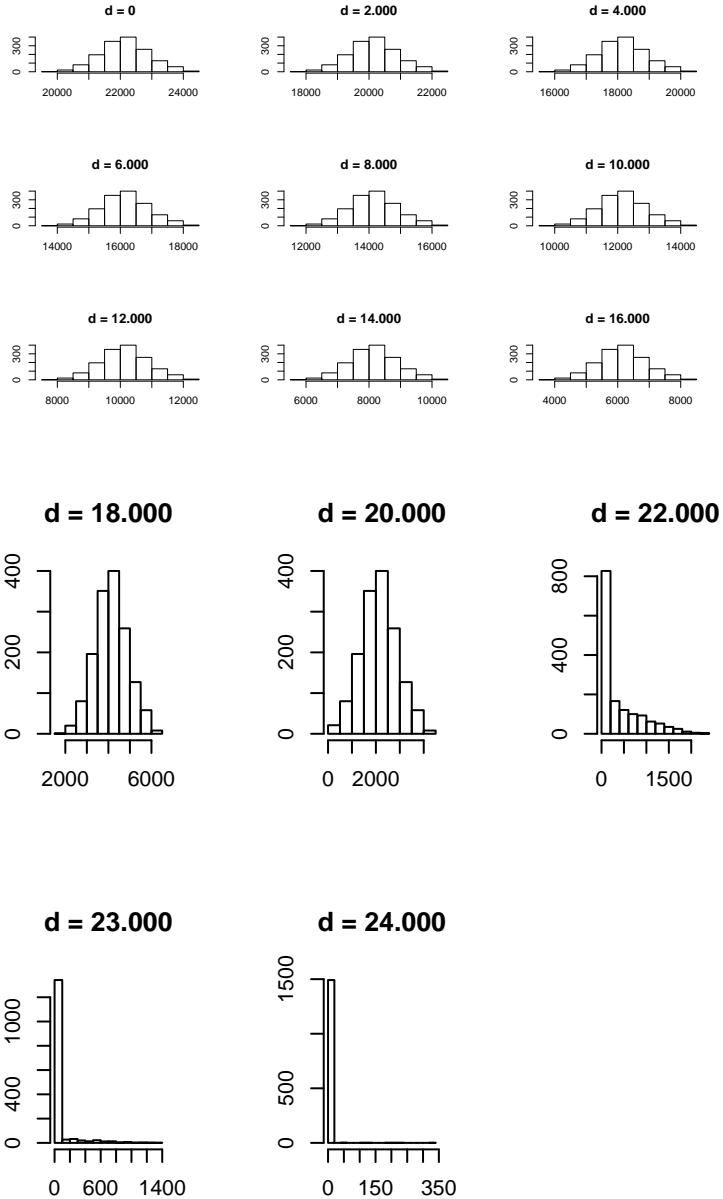




**Figura F.2:** Histogramas de las simulaciones de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro stop loss para diferentes deducibles cuando  $L_3 = 23.000$



**Figura F.3:** Histogramas de las simulaciones de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro stop loss para diferentes deducibles cuando  $L_3 = 24.000$



**Figura F.4:** Histogramas de las simulaciones de la distribución predictiva del monto agregado de siniestros recuperados en un reaseguro stop loss para diferentes deducibles cuando  $L_3 = 26.000$



# Bibliografía

- Abramowitz, M. y Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.
- Bailey, A. (1950). Credibility procedures: Laplace's generalization of bayes' rule and the combination of collateral knowledge with observed data. En *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, tomo 37, 7–23.
- Benktander, G. (1975). A note on Optimal Reinsurance. *Astin Bulletin*, 8, 2, 154–163.
- Berger, J. O. (1985a). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. Springer.
- Bernardo, J. M. y Smith, A. F. M. (1994). *Bayesian Theory*. John Wiley and Sons Ltd.
- Borch, K. (1961). The utility concept applied to the theory of insurance. *Astin Bulletin*, 1, 5, 245–255.
- Borch, K. (1968). Dynamic decision problems in an insurance company. *Astin Bulletin*, 5, 1, 118–131.
- Borch, K. (1969). The optimal reinsurance treaty. *Astin Bulletin*, 5, 2, 293–297.
- Bühlmann, H. (1967). Experience rating and credibility. *Astin Bulletin*, 4, 3, 199–207.
- Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer.
- Cairns, A. (2000). A discussion of parameter and model uncertainty in insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27, 313–330.

- Casella, G. y George, E. (1992). Explaining the gibbs sampler. *The American Statistician*, 46, 167–174.
- Choy, B. S. T. y Chan, C. M. (2003). Scale mixtures distributions in insurance applications. *Astin Bulletin*, 33, 1, 93–104.
- Conti, P. y Capitanio, A. (2004). A bayesian nonparametric approach to the estimation of the adjustment coefficient, with applications to insurance and telecommunications. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, 66, 1, 75–108.
- Daboni, L. (1974). Some models of inference in the risk theory from a bayesian viewpoint. *Astin Bulletin*, 8, 1, 38–56.
- Daykin, C., Pentikäinen, T. y Pesonen, M. (1993). *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman of Hall, England.
- de Alba, E. (2001). Discussion of: Principal applications of bayesian methods in actuarial science: a perspective. *North American Actuarial Journal*.
- Dickson, D., Tedesco, L. y B.Zehnwirth (1998). Predictive aggregate claims distributions. *The Journal of Risk and Insurance*, 65, 4, 689–709.
- Duvall, R. (1999). A bayesian approach to negative binomial parameter estimation. En *Casualty Actuarial Society Forum*.
- Gamerman, D. (1997). *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. Chapman and Hall, London.
- Gerber, H. y Pafumi, G. (1998). Utility functions: from risk theory to finance. *North American Actuarial Journal*, 2, 3, 74–100.
- Gómez, E. (2000). Los seguros generales desde la perspectiva bayesiana. *Vector Plus*, 15, 37–46.
- Gómez, E., Hernández, A. y Vázquez (1999). The esscher premium principle in risk theory: a bayesian sensitivity study. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 387–395.
- Herzog, T.Ñ. (1990). Credibility: the bayesian model versus bühlmann's model. En *Trans. Soc. Act*, tomo 41, 43–88.

- Hesselager, O. (1993). A class of conjugate priors with applications to excess of loss reinsurance. *Astin Bulletin*, 23, 1, 77–93.
- Hogg, R. y Klugman, S. (1984). *Loss Distributions*. John Wiley & Sons, USA.
- Hürlimann, W. (1993). Predictive stop-loss premiums. *Astin Bulletin*, 23, 1, 55–76.
- Jewell, W. S. (1974). Credible means are exact bayesian for exponential families. *Astin Bulletin*, 8, 1, 77–90.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. y Denuit, M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Kaluszka, M. (2001). Optimal reinsurance under mean-variance premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, 28, 61–67.
- Kaluszka, M. (2004). An extension of Arrow’s result on optimality of a stop loss contract. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35, 527–536.
- Kaluszka, M. (2005). Optimal reinsurance under convex principles of premium calculation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 36, 375–398.
- Klugman, S. (1992). *Bayesian Statistics in Actuarial Science: with Emphasis on Credibility*. Kluwer, Boston.
- Klugman, S., Panjer y Willmot (1998). *Loss Models: from data to decisions*. John Wiley & Sons, USA.
- Laha, R. y Rohatgi, V. (1979). *Probability Theory*. John Wiley & Sons, USA.
- Landsman, Z. y Makov, U. (2000). On credibility evaluation and the tail area of the exponential dispersion family. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27, 277–283.
- Lee, H. (1998). Utility functions: from risk theory to finance. *North American Actuarial Journal*, 2, 3, 74–100.
- Lundberg, O. (1940). *On Random Processes and their Application to Sickness and Accident Statistics*. Tesis Doctoral, University of Stockholm.
- Makov, U. (2001). Principal applications of bayesian methods in actuarial science: a perspective. *North American Actuarial Journal*, 5, 4, 60–62.

- Makov, U. y Smith, A. F. M. (1996). Bayesian methods in actuarial science. *The Statistician*, 45, 4, 503–515.
- Mayerson, A. (1964). A bayesian view of credibility. En *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, tomo 51, 85–104.
- Migon, H. y Moura, F. (2005). Hierarchical bayesian collective risk model: an application to health insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 36, 119–135.
- Miller, R. (1980). Actuarial applications of bayesian statistics. *Bayesian Analysis in Econometrics and Statistics*, 197–212.
- Miller, R. (1980b). Bayesian analysis of the two-parameter gamma distribution. *Technometrics*, 22, 1, 65–69.
- Pai, J. (1997). Bayesian analysis of compound loss distributions. *Journal of Econometrics*, 79, 129–146.
- Reiss, R. y Thomas, M. (1999). A new class of bayesian estimators in paretian excess-of-loss reinsurance. *Astin Bulletin*, 29, 2, 339–349.
- Reiss, R. y Thomas, M. (1999b). Bayesian extreme value analysis with an application to credibility estimation. En *8th Symposium on Finance, Banking and Insurance*.
- Robert, C. P. y Casella, G. (1999). *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer, New York.
- Rytgaard, M. (1990). Estimation in the pareto distribution. *Astin Bulletin*, 20, 2, 201–216.
- Schmidli, H. (2001). Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 55–68.
- Scollnik, D. (1995). The bayesian analysis of generalized poisson models for claim frequency data utilising markov chain monte carlo methods. *Actuarial Research Clearing House*, 1, 339–356.
- Scollnik, D. (1998). On the analysis of the truncated generalized poisson distribution using a bayesian method. *Astin Bulletin*, 28, 1, 135–152.



- Scollnik, D. (2001). Actuarial modeling with mcmc and bugs. *North American Actuarial Journal*, 5, 2, 96–124.
- Smith, R. (1998). Bayesian and frequentist approaches to parametric predictive inference. En *Bayesian Statistics 6*, 589–612.
- Smith, R. y Goodman, D. (2000). Bayesian risk analysis. *Extremes and Integrated Risk Management*, Risk Books, 235–251.
- Sun, D. y Ye, K. (1996). Frequentist validity of posterior quantiles for a two-parameter exponential family. *Biometrika*, 83, 1, 55–65.
- Verbeek, H. G. (1966). On optimal reinsurance. *Astin Bulletin*, 4, 1, 29–38.
- Wolff, K. H. (1966). Collective theory of risk and utility functions. *Astin Bulletin*, 4, 1, 6–10.
- Yang, R. y Berger, J. O. (1997). A catalog of noninformative priors. Inf. téc., ISDS.



## COLECCIÓN “CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN”

Instituto de Ciencias del Seguro

FUNDACIÓN MAPFRE

Publicaciones

Paseo de Recoletos 23 – 4ª planta – 28004 Madrid – (España)

Telf.: + 34 915 818 768

publicaciones.ics@mapfre.com

[www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro)

PARA CUALQUIER INFORMACIÓN O PARA ADQUIRIR NUESTRAS PUBLICACIONES PUEDE ENCONTRARNOS EN:

- 139. Optimización económica del reaseguro cedido. Modelos de decisión. 2009
- 138. Inversiones en el Seguro de Vida en la actualidad y perspectivas de futuro. 2009
- 137. El Seguro de Vida en España. Factores que influyen en su progreso. 2009
- 136. Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos. RIESGO 2009.
- 135. Análisis e interpretación de la gestión del fondo de maniobra en entidades aseguradoras de incendio y lucro cesante en grandes riesgos industriales. 2009
- 134. Gestión integral de Riesgos Corporativos como fuente de ventaja competitiva: cultura positiva del riesgo y reorganización estructural. 2009
- 133. La designación de la pareja de hecho como beneficiaria en los seguros de vida. 2009
- 132. Optimización económica del Reaseguro cedido. Modelos de decisión. 2009
- 131. La cobertura pública en el seguro de crédito a la exportación en España: cuestiones prácticas-jurídicas. 2009
- 130. La mediación en seguros privados: análisis de un complejo proceso de cambio legislativo. 2009
- 129. Temas relevantes del Derecho de Seguros contemporáneo. 2008

128. Cuestiones sobre la cláusula *cut through*. Transferencia y reconstrucción. 2008
127. La responsabilidad derivada de la utilización de organismos genéticamente modificados y la redistribución del riesgo a través del seguro. 2008
126. Ponencias de las Jornadas Internacionales sobre Catástrofes Naturales. 2008
125. La seguridad jurídica de las tecnologías de la información en el sector asegurador. 2008
124. Predicción de tablas de mortalidad dinámicas mediante un procedimiento *bootstrap*. 2008
123. Las compañías aseguradoras en los procesos penal y contencioso-administrativo. 2008
122. Factores de riesgo y cálculo de primas mediante técnicas de aprendizaje. 2008
121. La solicitud de seguro en la Ley 50/1980, de 8 de octubre, de Contrato de Seguro. 2008
120. Propuestas para un sistema de cobertura de enfermedades catastróficas en Argentina. 2008
119. Análisis del riesgo en seguros en el marco de Solvencia II: Técnicas estadísticas avanzadas Monte Carlo y Bootstrapping. 2008
118. Los planes de pensiones y los planes de previsión asegurados: su inclusión en el caudal hereditario. 2007
117. Evolução de resultados técnicos e financeiros no mercado segurador iberoamericano. 2007
116. Análisis de la Ley 26/2006 de Mediación de Seguros y Reaseguros Privados. 2007
115. Sistemas de cofinanciación de la dependencia: seguro privado frente a hipoteca inversa. 2007
114. El sector asegurador ante el cambio climático: riesgos y oportunidades. 2007
113. Responsabilidade social empresarial no mercado de seguros brasileiro influências culturais e implicações relacionais. 2007

112. Contabilidad y análisis de cuentas anuales de entidades aseguradoras. 2007
111. Fundamentos actuariales de primas y reservas de fianzas. 2007
110. El *Fair Value* de las provisiones técnicas de los seguros de Vida. 2007
109. El Seguro como instrumento de gestión de los M.E.R. (Materiales Especificados de Riesgo). 2006
108. Mercados de absorción de riesgos. 2006
107. La exteriorización de los compromisos por pensiones en la negociación colectiva. 2006
106. La utilización de datos médicos y genéticos en el ámbito de las compañías aseguradoras. 2006
105. Los seguros contra incendios forestales y su aplicación en Galicia. 2006
104. Fiscalidad del seguro en América Latina. 2006
103. Las NIC y su relación con el Plan Contable de Entidades Aseguradoras. 2006
102. Naturaleza jurídica del Seguro de Asistencia en Viaje. 2006
101. El Seguro de Automóviles en Iberoamérica. 2006
100. El nuevo perfil productivo y los seguros agropecuarios en Argentina. 2006
99. Modelos alternativos de transferencia y financiación de riesgos “ART”: situación actual y perspectivas futuras. 2005
98. Disciplina de mercado en la industria de seguros en América Latina. 2005
97. Aplicación de métodos de inteligencia artificial para el análisis de la solvencia en entidades aseguradoras. 2005
96. El Sistema ABC-ABM: su aplicación en las entidades aseguradoras. 2005
95. Papel del docente universitario: ¿enseñar o ayudar a aprender?. 2005
94. La renovación del Pacto de Toledo y la reforma del sistema de pensiones: ¿es suficiente el pacto político?. 2005
92. Medición de la esperanza de vida residual según niveles de dependencia en España y costes de cuidados de larga duración. 2005

91. Problemática de la reforma de la Ley de Contrato de Seguro. 2005
90. Centros de atención telefónica del sector asegurador. 2005
89. Mercados aseguradores en el área mediterránea y cooperación para su desarrollo. 2005
88. Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación. 2004
87. Dependencia en el modelo individual, aplicación al riesgo de crédito. 2004
86. El margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica. 2004
85. La matriz valor-fidelidad en el análisis de los asegurados en el ramo del automóvil. 2004
84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficacia de un Bonus-Malus. 2004
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos. 2004
81. El Seguro de Dependencia: una visión general. 2004
80. Los planes y fondos de pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización. 2004
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos. 2003
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia. 2003
77. El coste de los riesgos en la empresa española: 2001.
76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas. 2003
75. Incidencia de la nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor. 2002
74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español. 2002
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro. 2002

72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones. 2002
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones. 2002
70. El cuadro de mando integral para las entidades aseguradoras. 2002
69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados; métodos estadísticos de cálculo. 2002
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica. 2001
67. Gestión directiva en la internacionalización de la empresa. 2001
65. Ética empresarial y globalización. 2001
64. Fundamentos técnicos de la regulación del margen de solvencia. 2001
63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial. 2001
62. Seguridad Social: temas generales y régimen de clases pasivas del Estado. 2001
61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros. 2001
60. Análisis técnico y económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea. 2001
59. Estudio sobre el euro y el seguro. 2000
58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro. 2000
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España. 2000
54. El corredor de reaseguros y su legislación específica en América y Europa. 2000
53. Habilidades directivas: estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación. 2000
52. La estructura financiera de las entidades de seguros, S.A. 2000

50. Mixturas de distribuciones: aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la empresa aseguradora. 1999
49. Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante. 1999
48. Matemática Actuarial no vida con MapleV. 1999
47. El fraude en el Seguro de Automóvil: cómo detectarlo. 1999
46. Evolución y predicción de las tablas de mortalidad dinámicas para la población española. 1999
45. Los Impuestos en una economía global. 1999
42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento. 1998
41. De Maastricht a Amsterdam: un paso más en la integración europea. 1998

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1997  
Fundación MAPFRE Estudios

39. Perspectiva histórica de los documentos estadístico-contables del órgano de control: aspectos jurídicos, formalización y explotación. 1997
38. Legislación y estadísticas del mercado de seguros en la comunidad iberoamericana. 1997
37. La responsabilidad civil por accidente de circulación. Puntual comparación de los derechos francés y español. 1997
36. Cláusulas limitativas de los derechos de los asegurados y cláusulas delimitadoras del riesgo cubierto: las cláusulas de limitación temporal de la cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil. 1997
35. El control de riesgos en fraudes informáticos. 1997
34. El coste de los riesgos en la empresa española: 1995
33. La función del derecho en la economía. 1997

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1996  
Fundación MAPFRE Estudios

32. Decisiones racionales en reaseguro. 1996
31. Tipos estratégicos, orientación al mercado y resultados económicos: análisis empírico del sector asegurador español. 1996



30. El tiempo del directivo. 1996
29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal. 1996

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1995  
Fundación MAPFRE Estudios

28. La naturaleza jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil. 1995
27. La calidad total como factor para elevar la cuota de mercado en empresas de seguros. 1995
26. El coste de los riesgos en la empresa española: 1993
25. El reaseguro financiero. 1995
24. El seguro: expresión de solidaridad desde la perspectiva del derecho. 1995
23. Análisis de la demanda del seguro sanitario privado. 1993

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1994  
Fundación MAPFRE Estudios

22. Rentabilidad y productividad de entidades aseguradoras. 1994
21. La nueva regulación de las provisiones técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E. 1994
20. El Reaseguro en los procesos de integración económica. 1994
19. Una teoría de la educación. 1994
18. El Seguro de Crédito a la exportación en los países de la OCDE (evaluación de los resultados de los aseguradores públicos). 1994

Nº Especial Informe sobre el mercado español de seguros 1993  
FUNDACION MAPFRE ESTUDIOS

16. La legislación española de seguros y su adaptación a la normativa comunitaria. 1993
15. El coste de los riesgos en la empresa española: 1991
14. El Reaseguro de exceso de pérdidas 1993

12. Los seguros de salud y la sanidad privada. 1993
10. Desarrollo directivo: una inversión estratégica. 1992
9. Técnicas de trabajo intelectual. 1992
8. La implantación de un sistema de *controlling* estratégico en la empresa. 1992
7. Los seguros de responsabilidad civil y su obligatoriedad de aseguramiento. 1992
6. Elementos de dirección estratégica de la empresa. 1992
5. La distribución comercial del seguro: sus estrategias y riesgos. 1991
4. Los seguros en una Europa cambiante: 1990-95. 1991
2. Resultados de la encuesta sobre la formación superior para los profesionales de entidades aseguradoras (A.P.S.). 1991
1. Filosofía empresarial: selección de artículos y ejemplos prácticos. 1991



