

Instituto de Ciencias del Seguro

# **EL FAIR VALUE DE LAS PROVISIONES TÉCNICAS DE LOS SEGUROS DE VIDA**

Emiliano Pozuelo de Gracia



Emiliano Pozuelo de Gracia es Actuario y Doctor en Economía Financiera, Actuarial y Matemática. Desde 2001 desarrolla su actividad profesional en Seguros Cajasur como Director Actuarial.

Prohibida la reproducción total o parcial  
de esta obra sin el permiso escrito  
del autor o de la FUNDACIÓN MAPFRE

© 2007, FUNDACIÓN MAPFRE  
Carretera de Pozuelo 52  
28220 Majadahonda. Madrid

[www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro](http://www.fundacionmapfre.com/cienciasdelseguro)  
[publicaciones.ics@mapfre.com](mailto:publicaciones.ics@mapfre.com)

ISBN 13: 978-84-9844-033-1  
Depósito Legal: SE 1071-2007  
Impreso por PUBLIDISA

Para la realización de este trabajo, **FUNDACIÓN MAPFRE** concedió a su autor una **Beca de Investigación Riesgo y Seguro**.

## ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	XI
PRÓLOGO	XIII

### PRIMERA PARTE: INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN Y PRESENTACIÓN	1
1.1. MARCO, OBJETIVO Y ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN	1
1.2. CAMPO DE ESTUDIO	8
1.3. ESTRUCTURA DE LA INVESTIGACIÓN	13
1.4. FUENTES	16
1.4.1. Búsqueda de información bibliográfica	16
1.4.2. Datos para el ajuste de la mortalidad de la población andaluza	16
1.4.3. Aplicaciones informáticas	16
CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN AL VALOR RAZONABLE DE LA PROVISIÓN TÉCNICA DEL SEGURO DE VIDA	19
2.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO	19
2.2. CONSIDERACIONES PREVIAS DE LAS PTSV	19
2.3. INTRODUCCIÓN A LA NIIF 4 Y VALOR RAZONABLE	25
2.3.1. Introducción a la NIIF 4	25
2.3.2. Valor Razonable Vs. Valor Específico de la Entidad	26
2.4. PRINCIPIOS DE VALORACIÓN PARA INSTRUMENTOS FINANCIEROS	28
2.4.1. Jerarquía de métodos de valoración	28
2.4.2. Valor de negociación en el mercado	28
2.4.3. Replicación de valores de mercado	29
2.4.4. Valoración de los flujos de caja futuros	29
2.5. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO ESTOCÁSTICO APLICADO AL CAMPO FINANCIERO – ACTUARIAL	32
2.5.1. Introducción a los modelos dinámicos estocásticos	32
2.5.2. Elementos de cálculo estocástico	35

**SEGUNDA PARTE**  
**SUBYACENTES AL VALOR RAZONABLE DE LAS PTSV**

CAPÍTULO 3. LOS TIPOS DE INTERÉS Y EL VALOR RAZONABLE	47
3.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO	47
3.2. INTRODUCCIÓN A LOS TIPOS DE INTERÉS	47
3.3. CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE LA ETTI	49
3.3.1. Modelos estáticos	49
3.3.2. Modelos dinámicos	50
3.3.2.1. Modelos que no se ajustan a la ETTI actual	50
3.3.2.1.1. Modelos de una variable	50
3.3.2.1.2. Modelos de dos variables	51
3.3.2.2. Modelos que se ajustan a la ETTI actual	52
3.4. MODELOS AFINES. EL MODELO DE HULL – WHITE	53
3.4.1. Modelos afines unifactoriales	53
3.5. MODELO DE HULL – WHITE	55
3.5.1. Resultados analíticos	55
3.5.2. Implementación mediante árboles trinomiales	58
3.5.3. Calibración	68
CAPÍTULO 4. RIESGO TÉCNICO Y EL VALOR RAZONABLE	71
4.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO	71
4.2. INTRODUCCIÓN AL RIESGO TÉCNICO EN LOS SEGUROS DE VIDA	72
4.3. INTRODUCCIÓN A LAS TABLAS DE MORTALIDAD	76
4.4. TABLAS DE MORTALIDAD DINÁMICAS	78
4.4.1. Clasificación	78
4.4.2. Modelo de Heligman y Pollard	79
4.4.3. Modelo de Lee - Carter	81
4.5. APLICACIÓN A LA POBLACIÓN DE LA COMUNIDAD ANDALUZA	82
4.6. PROCESO ESTOCÁSTICO ASOCIADO A LA MEDIDA DE MORTALIDAD	106
4.6.1. Resultados analíticos	106
4.6.2. Implementación mediante árboles trinomiales	110
4.6.3. Calibración	115
4.7. PROCESO ESTOCÁSTICO ASOCIADO AL FACTOR DE DESCUENTO ACTUARIAL	121

CAPÍTULO 5. EL RIESGO DE CRÉDITO Y EL VALOR RAZONABLE	125
5.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO	125
5.2. INTRODUCCIÓN AL RIESGO DE CRÉDITO EN EL VALOR RAZONABLE	125
5.3. MODELOS DE VALORACIÓN DEL RIESGO DE CRÉDITO	127
5.3.1. Método de valoración de opciones	129
5.3.2. Modelo de Jarrow-Turnbull	132
5.4. PROCESO ESTOCÁSTICO ASOCIADO AL SPREAD POR RIESGO DE CRÉDITO	134
5.4.1. Resultados analíticos	134
5.4.2. Implementación mediante árboles trinomiales	137
5.4.3. Calibración	142
5.5. DIFUSIÓN DEL TIPO DE INTERÉS, SPREAD POR RIESGO DE CRÉDITO Y MEDIDA DE MORTALIDAD	145
5.5.1. Resultados analíticos	145
5.5.2. Implementación mediante árboles trinomiales	145

**TERCERA PARTE**  
**ESTIMACIÓN DEL VALOR RAZONABLE**

CAPÍTULO 6. ESTIMACIÓN DEL VALOR RAZONABLE	147
6.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO	147
6.2. VALORACIÓN CON DIFUSIÓN EN EL TIPO DE INTERÉS Y MEDIDA DE MORTALIDAD	147
6.3. OPCIÓN DE RESCATE	151
6.4. OPCIÓN DE PARTICIPACIÓN EN BENEFICIOS	154
6.5. VALORACIÓN CON DIFUSIÓN EN EL TIPO DE INTERÉS, MEDIDA DE MORTALIDAD Y SPREAD POR RIESGO DE CRÉDITO	159
6.5.1. Opción de rescate	162
6.5.2. Opción de participación en beneficios	164

**CUARTA PARTE**  
**DETERMINACIÓN DE LAS NECESIDADES DE RECURSOS PROPIOS**

CAPÍTULO 7. EL VALOR RAZONABLE Y SOLVENCIA II	169
7.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO	169
7.2. INTRODUCCIÓN A SOLVENCIA II	169
7.3. SISTEMAS DE DETERMINACIÓN DEL CAPITAL MÍNIMO	174

7.3.1. Modelos retrospectivos	174
7.3.2. Modelos prospectivos	178
7.4. EL VALOR RAZONABLE Y EL MARGEN DE SOLVENCIA	180
7.4.1. Necesidades de capital por riesgo de mercado	180
7.4.2. Sensibilidad del valor razonable de las provisiones técnicas ante cambios en los subyacentes	181

## **QUINTA PARTE CONCLUSIONES**

CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES	187
8.1. MODELO PROPUESTO	187
8.1.1. Estimación del valor razonable de las PTSV	187
8.1.1.1. Subyacentes considerados	187
8.1.1.1.1. Tipo de interés libre de riesgo	187
8.1.1.1.2. Tanto de mortalidad	188
8.1.1.1.3. Spread por riesgo de crédito	193
8.1.1.2. Difusión del valor actual actuarial	194
8.1.1.3. Estimación del valor razonable de las PTSV	195
8.1.2. El valor razonable y la estimación de los recursos propios	197
8.2. VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL MODELO PROPUESTO	198
CAPÍTULO 9. BIBLIOGRAFÍA	203
ANEXO I.: POLÍTICAS CONTABLES INTRODUCIDAS POR LA NIIF 4	215
ANEXO II.: INFORMACIÓN ADICIONAL A REVELAR SEGÚN LA NIIF 4	217
CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN	219

## AGRADECIMIENTOS

Este libro se ha llevado a cabo con el patrocinio de una de las Becas Riesgo y Seguro 2004/2005, promovidas por el Instituto de Ciencias del Seguro de la FUNDACIÓN MAPFRE. Muchas gracias a Don Juan Mayo de Consultora MAPFRE VIDA por sus consejos, recomendaciones y apoyo a lo largo de todo el trabajo, así cómo a Don José Luís Catalinas y Doña Begoña González, por la confianza depositada y el apoyo prestado.

La presente investigación es parte de una tesis doctoral, siendo el director de tesis el profesor Dr. Don Fernando Ricote de la Universidad Complutense de Madrid, quien me ha ayudado enormemente en los momentos clave del desarrollo de la tesis doctoral. El profesor Dr. Don Fernando Ricote es también el prologuista de esta investigación.

He de mencionar asimismo al Departamento de Economía Financiera y Contabilidad I, con el cual además del tiempo de elaboración de la investigación, he estado vinculado durante el desarrollo de mi Licenciatura en Ciencias Actariales y Financieras.

Me gustaría expresar un especial agradecimiento a mi director general y compañeros de Seguros Cajasur, por su gran aportación en el ámbito de la industria aseguradora.

Gracias al profesor José Luís Fernández, catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Autónoma de Madrid, a Dr. Don Daniel Manzano socio director de Analistas Financieros Internacionales (AFI) y a la Dra. Doña María Rodríguez de Tecnología Información y Finanzas (Grupo Analistas) por su gran ayuda sobre la gestión del riesgo financiero en el ámbito asegurador.

Asimismo he de mencionar también al profesor Alfredo Bermúdez, catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela y al profesor Carlos Vázquez, catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad da Coruña, por sus enseñanzas en el ámbito de Métodos Numéricos.

Finalmente, quiero agradecer de manera muy especial a mis padres que tanto me han animado y a mi esposa por su comprensión y aliento durante dos años de fines de semana en casa.

Por otra parte, todos los errores que pudiera incluir la presente investigación son exclusivamente de mi responsabilidad



## PRÓLOGO

Constituye para mí una especial satisfacción aceptar la invitación para prologar el libro “El Fair Value de las Provisiones Técnicas de Seguros de Vida” del que es autor el doctor Emiliano Pozuelo de Gracia.

La personalidad del autor es suficientemente conocida en el ámbito asegurador, especialmente en la Comunidad Andaluza, donde desarrolla su actividad como Director Actuarial de Seguros Caja Sur.

El Doctor Pozuelo une su condición de investigador que se arraiga a que es Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales y Actuario la de profesional de los sectores Asegurador y Financiero. Es miembro del Instituto de Actuarios y ha participado en seminarios e investigaciones relevantes.

El autor ha estudiado la Licenciatura de Ciencias Actariales y Financieras en la Universidad Complutense de Madrid, habiendo obtenido también el grado de Doctor en dicha universidad.

He sido testigo de la evolución científica del autor, como profesor de Matemática Actuarial en sus cursos de licenciatura y doctorado. También he tenido el gusto de dirigir su tesis doctoral, cuyas investigaciones previas, han servido de base para la realización de esta publicación, que ha sido financiada por la FUNDACIÓN MAPFRE mediante la concesión de una beca de Riesgo y Seguro.

Es clara la vocación investigadora y esta ha influido de forma importante en la investigación que ahora se presenta, donde se combina el rigor teórico en el enfoque conceptual y el desarrollo deductivo de los modelos actuariales propuestos con la aplicación práctica de los mismos.

En el estudio de la valoración de compañías de seguros de Vida es preciso distinguir y valorar adecuadamente los riesgos asociados como son entre otros el tipo de interés, el de mortalidad y crédito.

La valoración debe reflejar en lo posible todas aquellas situaciones que pueden darse en la operación de seguro, como son los valores garantizados, la participación en beneficios y otras.

El autor dedica el primer capítulo a presentar el objeto y alcance del trabajo. El segundo lo dedica a la exposición conceptual del concepto del valor razonable en la provisión técnica del seguro de Vida, introduciendo los modelos financiero-actuariales que se van a utilizar en los otros capítulos.

Los capítulos tercero, cuarto y quinto se dedican respectivamente al estudio de las implicaciones de los riesgos de tipo de interés y riesgo de mortalidad y riesgo de crédito utilizando para ello recientes modelizaciones estocásticas y realizando aplicaciones prácticas.

En los capítulos sexto y séptimo se establece la metodología para el cálculo del valor razonable de las operaciones de seguro, atendiendo a las distintas situaciones que pueden conllevar las mismas y teniendo en cuenta las implicaciones que pueden tener en los requerimientos de capital en el ámbito de las nuevas bases de solvencia aseguradora que se plantean con Solvencia II y posteriores previstas.

Su contribución, mediante este texto, al desarrollo de la Ciencia Actuarial, va a suponer, además de un enriquecimiento científico, una herramienta para Entidades Aseguradoras y estudiosos, ya que estamos ante una publicación de enorme interés para Actuarios y otros profesionales de Entidades Aseguradoras que también es recomendable para alumnos de últimos cursos de la Licenciatura en Ciencias Actariales y Financieras y postgrados sobre la materia.

Felicito por todo ello al autor y le deseo los mayores éxitos profesionales y científicos a la vez que le animo a que continúe en esta línea en futuras investigaciones y estudios.

Somosaguas, Octubre de 2006.

FERNANDO RICOTE GIL  
Profesor Doctor  
Universidad Complutense de Madrid.

# PRIMERA PARTE: INTRODUCCIÓN

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN Y PRESENTACIÓN

#### 1.1. MARCO, OBJETIVO Y ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN

Actualmente nos encontramos en la Unión Europea ante una profunda reforma en las normas de valoración contables, así como en los conceptos de control y supervisión de las entidades aseguradoras.

La Comisión Europea decretó que desde el año 2005, las compañías de la Unión Europea cotizadas en bolsa reportarán sus estados financieros consolidados según un único conjunto de normas, desarrolladas por el IASB<sup>1</sup>. Debido a la complejidad del negocio asegurador, resulta difícil establecer un marco especial para los aspectos contables específicos del seguro. De ahí que en mayo de 2002 el IASB decidió proceder en su Proyecto de Seguros en dos fases. La primera fase abarca la actual NIIF 4<sup>2</sup>, y en un sentido más amplio, la NIC 32<sup>3</sup> y la NIC 39<sup>4</sup>. En la segunda fase se están tratando los aspectos más controvertidos, como la valoración de las Provisiones Técnicas de Seguros de Vida (PTSV). A este respecto se han planteado, los criterios de medición “*current values*”<sup>5</sup>. En abril 2006, el IASB adoptó el denominado “*current exit value*”<sup>6</sup>.

Con respecto a los nuevos conceptos de control y supervisión de las entidades aseguradoras, introducidos por el macroproyecto Solvencia II, la Comisión Europea mediante

---

<sup>1</sup> Consejo de Normas Internacionales de Contabilidad (IASB), cuyo objetivo es el desarrollo de un único conjunto de Normas Internacionales para la Información Financiera de alta calidad, de fácil comprensión e implantación, que puedan ser de utilidad a los inversores en acciones, a las entidades de crédito y a otros posibles usuarios de este tipo de información a nivel internacional. Son los IAS o IFRS, en su denominación más actual, también conocidas en España como NIC o NIIF.

<sup>2</sup> La Norma Internacional de Información Financiera 4 es la primera orientación del IASB sobre la contabilización de los contratos de seguros (aunque no la última).

<sup>3</sup> Instrumentos financieros: presentación e información a revelar.

<sup>4</sup> Instrumentos financieros: reconocimiento y valoración.

<sup>5</sup> Vienen a significar, medir las provisiones técnicas de seguros por su precio de mercado actual. No obstante, y dado que actualmente no existen mercados líquidos de provisiones técnicas, en los que observar estos precios, se usan criterios **market consistent** ó “tal como lo haría el mercado”.

<sup>6</sup> Lo podríamos definir como, la cantidad que un asegurador esperaría tener que pagar a otro asegurador si le transfiriera de forma inmediata todos los derechos y obligaciones contractuales de seguro subsistentes (incluyendo cualquier cantidad a cobrar o pagar por razón de otros derechos y obligaciones)

las sucesivas *calls for advice*<sup>7</sup>, motiva la actuación del CEIOPS<sup>8</sup> para la elaboración de una directiva marco no más allá de julio 2007. Recientemente a solicitud de la Comisión el CEIOPS ha reportado sus conclusiones acerca del primer QIS<sup>9</sup>. El QIS 1 iniciado el 31 de diciembre de 2004 culminó el último cuatrimestre de 2005, y versó sobre el impacto que supondría la determinación de los compromisos de las aseguradoras mediante el best estimate al 75 o 90%<sup>10</sup> (aún no determinado).

El QIS 2 es más amplio, y cubre los aspectos más relevantes del Pilar 1 de Solvencia II, incluyendo la valoración de los activos, de las provisiones técnicas, así como de otros compromisos de la aseguradora y por supuesto el **MCR**<sup>11</sup> y el **SCR**<sup>12</sup>. Para el estudio de este impacto se toma como referencia el método de cálculo promulgado recientemente por el regulador suizo, denominado **SST**<sup>13</sup>. En lo que respecta a la valoración de las provisiones técnicas, el QIS 2 considera para la cuantificación del **Margin Value Market**<sup>14</sup> (MVM), el método del coste del capital<sup>15</sup>, mientras que el QIS 1 consideraba el método de los percentiles<sup>16</sup>.

Tanto en las últimas propuestas respecto de la contabilización de las provisiones técnicas, como de los conceptos de control y supervisión de entidades aseguradoras, se usan criterios *market consistent* ó “tal como lo haría el mercado”, si bien con ciertos matices. La aplicación de criterios *market consistent*, se complica en el negocio asegurador debido fundamentalmente a la ausencia de un mercado vivo, amplio y abierto en el que se negocien activamente instrumentos de Seguro.

---

<sup>7</sup> Las principales propuestas de la Comisión van acompañadas de una medida del impacto que supondría su aceptación.

<sup>8</sup> Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervisors.

<sup>9</sup> Quantitative Impact Study.

<sup>10</sup> Podemos definir el best estimate al 75 o 90%, como la cuantificación que deja a su izquierda el 75 o 90% de las valoraciones posibles de los compromisos, en base a las expectativas de los intervinientes en el mercado respecto a las hipótesis técnicas (salvando el interés técnico, que sería el derivado de los mercados de capitales).

<sup>11</sup> Minimum capital requirement, representa el nivel de capital por debajo del cual el supervisor ha de adoptar medidas especiales para garantizar la solvencia de la entidad. Se determinará de forma similar al actual mínimo del margen de solvencia (en base a información contable).

<sup>12</sup> Solvency capital requirement, se establece por encima del MCR y representa el nivel de capital que permite absorber pérdidas significativas e imprevistas, y se calculará de modo que se tenga en cuenta el nivel real de exposición a los riesgos derivados de la operativa de la entidad así como su capacidad para gestionarlos.

<sup>13</sup> Swiss Solvency Test.

<sup>14</sup> Pretende la protección del asegurado, de modo que sobre la esperanza matemática de los compromisos, se incorpora este margen de riesgo de mercado que garantice la transmisión a un tercero de estos compromisos.

<sup>15</sup> Escogido por el regulador suizo, incrementa la valoración de las provisiones técnicas, con el coste que supone el capital regulatorio. Se justifica por el regulador suizo, porque un tercero estaría dispuesto a asumir los compromisos de la aseguradora, si también se le compensa por el coste exigido por el capital regulatorio.

<sup>16</sup> Definido como la diferencia entre el best estimate al 75 o 90% y el best estimate según la esperanza matemática de las hipótesis técnicas. Es el método aplicado por el regulador australiano.

Por otra parte, si nos centramos en el Seguro de Vida, son muchas las opcionalidades implícitas en las Pólizas de Seguro. Entre estas opcionalidades podemos destacar los valores garantizados de rescate, reducción y anticipo a disposición del Tomador de la Póliza, o el incremento en las garantías de la Póliza, debido a la participación en los beneficios que la aseguradora obtenga de la inversión de las Provisiones Técnicas.

Todo lo anterior implica recurrir en las valoraciones actuariales al cálculo estocástico y la teoría de las opciones financieras.

La valoración consistente con el mercado, exige que el modelo sea calibrado a partir de los valores de cotización de instrumentos financieros que coticen en el mercado. La calibración a mercado es actualmente posible para:

- Estructura de los tipos de interés y su volatilidad.
- Estructura de la probabilidad de impago y su volatilidad.
- Tasa de recuperación.
- Correlación entre los tipos de interés y probabilidad de impago.

Sin embargo no existe un mercado vivo, amplio y abierto para la estructura de la medida de mortalidad y su volatilidad. De ahí que su calibración no pueda llevarse a cabo a mercado, debiendo recurrir a su ajuste histórico.

Por otra parte, muchas de las asunciones respecto a la cuantificación de los compromisos de las aseguradoras, están abiertas tanto en la reforma contable, como en el marco de Solvencia II. Así por ejemplo, el IASB aún no ha decidido si se debe reconocer y en qué medida hacerlo, el spread por riesgo de crédito de la aseguradora. No obstante, el CEIOPS – IAIS no aceptan en modo alguno, la reducción de éstos compromisos por una menor calidad crediticia<sup>17</sup>.

La presente investigación, pretende el análisis de la metodología necesaria para la cuantificación de los compromisos de la aseguradora, consistente con un mercado abierto, vivo y amplio, y es consciente de que el planteamiento definitivo de los artífices del cambio divergirá de esta valoración.

### **Objetivo de la investigación**

La investigación persigue el análisis de algunos de los conceptos y magnitudes, que los artífices del actual cambio en la normativa contable y en el control y supervisión de las aseguradoras europeas, han barajado en el ámbito de la cuantificación de los compromisos asumidos por contratos de Seguros de Vida.

---

<sup>17</sup> Las diferencias de valoración entre la contabilidad y los requerimientos de solvencia, se recogerán a través de los prudential filters, para no incrementar enormemente el reporting.

Se propone una metodología que permite la consideración estocástica<sup>18</sup> de los dos factores de riesgo más importantes en Seguros de Vida: el tipo de interés técnico y la medida de mortalidad. De este modo se podrá acometer de forma natural el cálculo de algunas de las opcionalidades implícitas en las Pólizas de Seguros de Vida.

El objetivo más importante de la investigación, es elaborar la metodología que permita un acercamiento a lo que entendemos como valor razonable de las Provisiones Técnicas de Seguros de Vida (PTSV), así como la determinación de las necesidades de recursos propios debidos al riesgo de mercado inherente a las PTSV.

### **Valor razonable de las PTSV**

Aporta una metodología de valoración de las PTSV que:

- Propone un nuevo modelo de evolución estocástico para el tanto de mortalidad, de manera que la valoración actuarial recoja el riesgo técnico sistemático.
- Considera de forma agregada los modelos de evolución estocásticos correspondientes a la medida de mortalidad, los tipos de interés y el spread por riesgo de crédito.
- Discretiza el proceso a través de árboles trinomiales recombinantes, de manera que la cuantificación sea abordable por grandes aseguradoras, cuyos tiempos de cálculo serían de otro modo prohibitivos.
- Los algoritmos de valoración resultantes de todo lo anterior, consigue que la determinación de muchas opcionalidades implícitas en las Pólizas de Seguros de Vida, sea determinada de forma natural, rápida y eficiente.
- Es calibrable según las expectativas de los intervinientes en el mercado.
- Exponemos su aplicación en la valoración de Pólizas de Seguro de Vida individuales con prestaciones por supervivencia y/o fallecimiento.

Como hemos anticipado, para calibrar a mercado el componente de mortalidad del modelo, apenas tenemos instrumentos financieros, por lo que lo calibramos históricamente. Exponemos un ejemplo de estacalibración, a través del ajuste del modelo de Lee – Carter (1992) y el de Helligman y Pollard (1980) a la población andaluza.

El modelo resultante engloba:

- Interés técnico consistente con el mercado:

---

<sup>18</sup> El término se refiere a introducir en el análisis el proceso estocástico en lugar de su esperanza matemática.

- Se considerara la Estructura Temporal de Tipos de Interés (ETTI) que se deriva de los mercados de capitales, en lugar de un tipo de interés técnico lineal e inalterable.
- El tipo de interés técnico será un proceso estocástico, es decir, sobre la mencionada ETTI, se considerará un proceso de difusión que recoja la aleatoriedad que rodea a los tipos de interés, que la Aseguradora obtendrá en el futuro en el mercado de capitales<sup>19</sup>.
- Tabla de mortalidad ajustada a la población objeto de aseguramiento y considerada como un proceso estocástico:
  - Además de ajustar la estructura que se puede observar en la medida de mortalidad, también se ajustará la dinamicidad inherente a esta estructura.
  - Propondremos un proceso de difusión sobre las tablas de mortalidad dinámicas ajustadas, para incluir en el análisis la volatilidad manifestada en el ajuste<sup>20</sup>. Su implementación se llevará a cabo discretizando el proceso estocástico mediante árboles trinomiales recombinantes<sup>21</sup>.
  - La consideración estocástica de la medida de mortalidad, a incluir en la valoración, sustituirá al recargo de seguridad<sup>22</sup>, incluido en lo que conocemos como tablas de mortalidad de segundo orden o con recargo de seguridad implícito.
- Spread por riesgo de crédito<sup>23</sup> de la compañía aseguradora:
  - La metodología de valoración razonable, considera la cuantificación del instrumento financiero de forma similar a como lo haría un mercado de negociación vivo, amplio y abierto. Esto implica tener en cuenta entre otros, el riesgo de impago de la propia aseguradora.
  - Al igual que con los otros dos subyacentes del valor razonable de las PTSV (tipo de interés y tanto de mortalidad), incluiremos en la valoración el proceso

<sup>19</sup> Suponiendo asimismo que las inversiones de la Aseguradora, se valorarán según su precio de cotización, de modo que se tendrán en cuenta las expectativas de los intervinientes en el mercado sobre los tipos de interés vigentes a cada fecha.

<sup>20</sup> La valoración consistente con el mercado requeriría en su lugar un proceso de calibración, a partir de instrumentos financieros negociados en el mercado de capitales. En defecto de éstos, extraemos conclusiones del proceso de ajuste de la tabla de mortalidad.

<sup>21</sup> Un árbol trinomial recombinante, es una representación en tiempo discreto de un proceso sujeto a una determinada regla de evolución estocástica futura.

<sup>22</sup> Trayectoria de la distribución correspondiente a la medida de mortalidad que deja a su izquierda el 95% de las trayectorias posibles.

<sup>23</sup> Diferencial respecto del tipo libre de riesgo, exigido a la aseguradora por los inversores, como consecuencia del riesgo de impago.

estocástico correspondiente al spread por riesgo de crédito, en lugar de su esperanza matemática.

- Opcionalidades implícitas en la Póliza de Seguros de Vida:
  - Las asimetrías que tradicionalmente se han obviado en las valoraciones actuariales a través de la aplicación de amplios márgenes, se valorarán en la presente investigación según los escenarios futuros probables. En este trabajo se propone un método de valoración de la opción de rescate, y la de participación en beneficios.

### **Necesidades de recursos propios**

Se proponen dos análisis complementarios para determinar estas necesidades de recursos propios:

- El primer análisis y más obvio, es determinar la diferencia entre el valor razonable determinado según la metodología que se expone a lo largo del trabajo, y el valor contable de las PTSV.
- En segundo lugar, el análisis de sensibilidades del valor razonable a los cambios en los tres subyacentes considerados (tanto de mortalidad, tipos de interés, y spread por riesgo de crédito), tanto en los niveles del subyacente como en su volatilidad.

Nuestra pretensión fundamental es conjugar el rigor técnico con una implementación numérica que sea desde el punto de vista computacional, rápida y fácilmente implementable en la práctica.

### **Referencias para la modelización actuarial del valor razonable de las PTSV**

La dificultad empírica de valorar el pasivo, se puede comprobar simplemente analizando la cantidad de aportaciones doctrinales. En grandes rasgos Reitano (1997) distingue dos enfoques: el paradigma directo e indirecto de valoración del pasivo:

- El directo se deriva del flujo de caja estimado de los compromisos de la aseguradora.
- El indirecto se determina a partir de la diferencia entre el valor del activo y el valor de los beneficios futuros distribuibles de la cartera de contratos que se valora.

La legislación al respecto exige el enfoque directo, ya que ofrece una mayor protección a los asegurados. De ahí que será el que adoptaremos en esta investigación.



Para la determinación directa del valor del pasivo, el actuario ha de considerar el riesgo inherente al flujo de caja de sus compromisos. Darlington et. al. (2001) clasifica los riesgos que analizan los actuarios en dos grandes grupos: riesgos probabilísticos y sistemáticos. El primero puede ser reducido o eliminado mediante una correcta diversificación, mientras que el segundo no.

Para modelizar el riesgo técnico sistemático en Seguros de Vida, se han desarrollado varios modelos. Tenemos el caso del modelo de Lee – Carter (1992) que considera para el factor de la medida de mortalidad dependiente del tiempo cronológico un modelo *ARIMA(0,1,0)*. Posteriormente ha sido adaptado por Denuit, et. al (2005) para aplicarlo estocásticamente en tiempo continuo. Milevsky y Promislow (2001) aplican el denominado modelo de Gompertz con reversión a la media.

Por otra parte el riesgo financiero cobra una gran importancia en los productos de seguro de vida. Para recoger en la valoración las expectativas en el mercado, las valoraciones actuariales han de recurrir a técnicas cuantitativas. No es solamente el uso de modelos de valoración de activos y opciones financieras, sino que además, modelos de valoración desarrollados para el tratamiento estocástico de la Estructura Temporal de Tipos de Interés (ETTI), han sido ya adaptados por un gran número de actuarios para su aplicación en la modelización estocástica de la mortalidad. Con ello se consigue que el riesgo técnico sistemático quede adecuadamente recogido en la valoración, de forma agregada con los riesgos financieros inherentes.

Los conocidos por la literatura para la modelización de la ETTI, como modelos afines han sido ya aplicados en la modelización estocástica de la mortalidad<sup>24</sup>. Modelos de la forma Heath – Jarrow – Morton<sup>25</sup> han sido igualmente tratados para la mortalidad<sup>26</sup>. La familia de los Market Models<sup>27</sup>, también han sido analizados para su tratamiento en el ámbito actuarial, en el trabajo Blake, et. al (2004). Este último trabajo exploró ampliamente el caso de las “Forward life annuity rates” y “Forward Survivor Credit Offer Rates (SCOR)”. Así además de tratar como medidas forward no instantáneas las rentas diferidas garantizadas, aborda la medida SCOR. Podemos considerar esta última medida, una reminiscencia del  $\tau$  –LIBOR (el London Interbank Offer Rate con duración o tenor  $\tau$  ), adaptada a la medida de mortalidad.

En cuanto a la consideración o no de la calidad crediticia del asegurador en la valoración consistente con el mercado del pasivo, existen dos posturas enfrentadas. En el

---

<sup>24</sup> Por Dahl (2004) o Biffis y Millosovich (2006), entre otros.

<sup>25</sup> Sobre tipos forward instantáneos

<sup>26</sup> Ver el modelo de Smith – Olivier descrito en Olivier y Jeffrey (2004)

<sup>27</sup> Sobre tipos forward no instantáneos. Han sido los últimos en aparecer en el ámbito de los tipos de interés.

apartado al respecto exponemos la base racional que sustenta el reflejo o no de la calidad crediticia del asegurador en esta valoración.

## 1.2. CAMPO DE ESTUDIO

El objeto de la presente investigación es la cuantificación del valor razonable del compromiso de la aseguradora, como consecuencia de los contratos de Seguro de Vida suscritos, así como de los recursos propios necesarios para garantizar la solvencia de la misma por este motivo.

Así el ámbito de la presente investigación se encuadra en la ciencia actuarial, y como tal siguiendo a Nieto y Vegas (1993) tiene una fundamentación interdisciplinar:

### Fundamento económico

El origen de la operación de aseguramiento es el contrato de Seguro de Vida. Según la definición de Piniés y Tornil que se incluye en Pérez (1986), Seguro de Vida es *“un contrato por el cual una de las partes, el asegurador, se compromete mediante una prima única o periódica que recibe del tomador del seguro, a pagar al beneficiario la cantidad o cantidades estipuladas si acaece en el plazo convenido para la duración del contrato, la eventualidad prevista en el mismo sobre la vida del asegurado”*.

La Aseguradora constituye una unidad económica cuya misión fundamental es ofrecer la adecuada cobertura frente a un riesgo. Esta labor de intermediación permite que el riesgo al que se hallan sometidas una serie de unidades económicas pueda ser sustituido por una Prima de Seguro.

El riesgo cubierto por la Aseguradora de Vida es la supervivencia o el fallecimiento del Asegurado. De este modo se pretende hacer frente a las necesidades que se originan al Beneficiario de la Póliza de Seguro, al acaecer el suceso supervivencia (el Beneficiario suele ser el propio Asegurado) o fallecimiento del Asegurado (el Beneficiario suele ser el cónyuge y/o resto de familiares).

Para proporcionar esta labor de protección, la Aseguradora se basa en la ley de los grandes números, según la cual cuando un experimento aleatorio se repite un número suficientemente grande de veces, la frecuencia relativa del suceso se aproxima a la probabilidad teórica del suceso. Tratándose de una Aseguradora de Vida, el número de fallecimientos que se producirán en la cartera asegurada se aproximará al estimado, cuando la cartera incluya un número suficientemente grande de Asegurados.

Así para que la Aseguradora pueda ofrecer esta protección ha de alcanzar un volumen de negocio suficiente, que permita minimizar las desviaciones de la siniestralidad real respecto de la esperada.

Una gran parte de los fondos de una Aseguradora se destina a hacer frente a los compromisos con los Tomadores de la Póliza por prestaciones garantizadas. De este modo cobra una gran importancia el activo de la Aseguradora afecto a Provisiones Técnicas y los fondos propios:

- El primero surge inmediatamente del contrato de Seguro como inversión de las PTSV, para hacer frente a los compromisos que se derivarán de la Póliza.
- Buena parte del segundo, lo que se conoce como Margen de Solvencia, tiene por finalidad garantizar la Solvencia de la Aseguradora en sentido amplio.

Las PTSV aunque tienen su origen en la base técnica de la Póliza, se determinan según la legislación española de forma prudente, es decir, de modo que quede adecuadamente cubierto el riesgo técnico de desviación de la siniestralidad real respecto a la esperada. No obstante lo anterior, existe un riesgo técnico igual de importante, que es el de desconocimiento de la prestación esperada, que vendría cubierto al igual que otros riesgos inherentes a la industria aseguradora a través del Margen de Solvencia.

Se pretende garantizar la Solvencia de la entidad aseguradora, entendida como la capacidad para poder hacer frente a sus obligaciones futuras en sentido amplio. Las Aseguradoras se hallan obligadas por parte de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones (DGSFP) a mantener como mínimo un determinado Margen de Solvencia en función de su negocio asegurador, es decir, la cantidad de fondos propios que garanticen para cada momento del tiempo, que la compañía pueda hacer frente a los compromisos asumidos.

Tanto las PTSV como el mínimo del Margen de Solvencia son una exigencia de origen legal y objeto de supervisión por parte de la DGSFP.

#### Fundamento financiero

Como se ha mencionado antes para el Tomador del Seguro, la Aseguradora supone un vehículo para financiar las necesidades del Beneficiario de la Póliza al vencimiento del Seguro. De lo anterior se deriva que:

- La aseguradora interviene como intermediario financiero.
- De la diferencia de fechas entre el efecto y el vencimiento de la Póliza, surge el principio de rentabilidad.

Asimismo los fondos propios atribuibles a los titulares de la Aseguradora (los propios Tomadores si se trata de una Mutuality, los accionistas si es una sociedad anónima, ...) también han de ser adecuadamente retribuidos, ya que para los propietarios, éstos fondos suponen una inversión.

De cualquier modo, tanto las PTSV como los fondos propios se invierten con el fin de generar una rentabilidad suficiente para retribuir tanto unas como otros.

La inversión afecta a las PTSV además de la rentabilidad que proporciona, ha de cumplir unos requisitos de congruencia con estas, ya que esta inversión supone:

- La principal fuente de la que manan los flujos de cobros, que permitirán hacer frente a las prestaciones y gastos derivados de la Póliza.
- El activo de la Aseguradora que permite cubrir el pasivo que representan las PTSV.

En algunos Seguros de Vida se vincula el activo al pasivo, hasta el punto que el Tomador podrá ejercer su derecho de rescate, materializado en la inversión afecta por la Aseguradora.

Debido entre otras cuestiones a lo mencionado en los párrafos precedentes, las Aseguradoras se encuadran dentro del sector financiero, junto con las entidades de crédito (Bancos, Cajas de Ahorro y Cooperativas de Crédito) y otras entidades financieras como son las Agencias y Sociedades de valores, Instituciones de inversión colectiva, ...

#### Fundamento estocástico.

Como explica Nieto y Vegas (1993) el aspecto aleatorio se presenta en muy diversos grados en el ámbito actuarial.

Como ya se ha expuesto, en Seguros de Vida la prestación asegurada tiene lugar al acaecer el suceso supervivencia o fallecimiento del Asegurado. La aleatoriedad inherente a esta prestación es abordada por el actuario a través de las tablas de mortalidad<sup>28</sup> de segundo orden, es decir, mediante la esperanza matemática de las probabilidades condicionadas de supervivencia y fallecimiento ajustadas históricamente, a las cuales se les adiciona un recargo de seguridad que permita cubrir aproximadamente el 95% de las trayectorias estimadas.

---

<sup>28</sup> Las tablas de mortalidad como veremos más adelante, son en esencia, una forma de combinar las tasas de mortalidad en una población a diferentes edades y se utilizan para medir el nivel de mortalidad de una determinada población.

No obstante, como ya se ha explicado existe el riesgo de que estas trayectorias estimadas no sean adecuadas a la cartera asegurada. El motivo de que no coincidan es muy diverso:

- La población objeto de ajuste es diferente de la asegurada. Así por ejemplo las tablas GRM/F – 95 y GKM/F – 95 que son admitidas por la legislación española se hallan ajustadas a la población suiza.
- La cartera asegurada no es representativa de la ajustada (sesgada). La cartera asegurada de una Aseguradora no es más que una muestra del total poblacional, lo que da lugar a una desviación o error llamado error muestral. Si los valores poblacionales pertenecen al mismo ámbito geográfico que el de la cartera o con unas características similares, el error muestral será menor que en otro caso, ya que la correlación entre ambas medidas será mayor. Además este error también será menor conforme la cartera asegurada aumente su tamaño, como se deriva de la ley de los grandes números citada anteriormente, siempre y cuando la muestra y la población se hallen altamente correladas.
- La esperanza de vida es dinámica. Esto quiere decir que la correspondiente a un asegurado de  $x$  años de edad en el año 1995, es diferente de la de un asegurado de  $x$  años de edad en el año 2015. Así la esperanza de vida de los asegurados en cartera será diferente de la correspondiente a la ajustada, ya que se trata de fallecimientos o supervivencias que tendrán lugar en un período futuro del tiempo. Podemos por ejemplo ajustar modelos de series temporales que permitan determinar las probabilidades de supervivencia o fallecimiento en el futuro, dando lugar a las tablas de mortalidad dinámicas. No obstante, el ajuste de esta dinamicidad dará lugar a un nuevo error a añadir al mencionado en los párrafos precedentes.

La aleatoriedad también se encuentra en la rentabilidad futura que la Aseguradora obtendrá de la inversión de las PTSV. Es decir, si bien es habitual que la Aseguradora garantice en la Póliza un interés técnico fijo, las inversiones afectas a la Póliza proporcionan una rentabilidad variable que dependerá, del mercado de negociación de estas inversiones.

En el apartado previo se ha explicado que las PTSV y las inversiones afectas tienen que guardar cierta congruencia en cuanto al flujo de caja. El riesgo de liquidez será mayor cuanto más incapaces resulten ser las inversiones afectas, para hacer frente a las prestaciones y gastos que se derivarán de las PTSV. En este sentido, entre las funciones del actuario se encuentra la de estimar el flujo de caja derivado de la Póliza. El ya mencionado riesgo de desviación de la prestación real respecto a la esperada, puede ocasionar que el flujo de caja proporcionado por las inversiones afectas a las PTSV, llegue a ser insuficiente para hacer frente a las prestaciones y gastos que resulten de la Póliza.

Por otra parte, la congruencia entre las PTSV y las inversiones afectas, se ha de manifestar también en términos de cobertura futura de las primeras respecto de las últimas. La inadecuada cobertura futura puede venir motivada por la diferente dinámica del valor de unas y otras:

- La valoración futura de las PTSV dependerá del número real de componentes del grupo asegurado en el futuro. Al mismo tiempo estas PTSV engloban una serie de opcionalidades implícitas cuyo valor y/o activación es aleatoria:
  - Opción de rescate anticipado del Tomador de la Póliza por un precio prefijado.
  - Opción del Tomador de participación en los beneficios que proporcionen las inversiones afectas.
  - Opción del Tomador de cesar en el pago de primas periódicas, modificando las prestaciones garantizadas según unas condiciones prefijadas. Incluso rehabilitación de las prestaciones inicialmente garantizadas, mediante la puesta al día en el pago de las primas periódicas según unas condiciones prefijadas.
  - ....
- Las inversiones afectas tienen un valor que dependerá de las expectativas de los intervinientes en su mercado de negociación, en cuanto a los tipos de interés implícitos en la negociación, al riesgo de impago del emisor del título, tasa de recuperación en caso de impago, ....

Además de lo anterior, estas inversiones también pueden encerrar diversas opcionalidades:

- Recompra por parte del emisor del título a un precio prefijado.
- Si se trata de un activo estructurado, puede contener derivados de crédito que incrementen su rentabilidad, como CDSs, ...
- Si el activo estructurado incluye un derivado para cubrir frente a la volatilidad de los tipos de interés, (Swap de tipos de interés), éste último toma un valor que dependiendo de los tipos de interés implícitos en la negociación, puede llegar a ser casi nulo.
- ...

A los riesgos financieros de liquidez y mercado mencionados, hemos de añadir el de contrapartida, es decir, que los deudores de la Aseguradora incurran en impago. De entre los deudores de la Aseguradora caben destacar:

- los emisores de títulos afectos a las PTSV, ó
- reaseguradores<sup>29</sup> a los que se ha cedido parte de la cobertura de la Póliza.

Tanto en un caso como en el otro, la Aseguradora no queda eximida de sus compromisos por lo que puede no tener recursos suficientes para hacer frente a las prestaciones garantizadas.

Entre otras cuestiones por lo mencionado, para lograr los principales objetivos del presente trabajo, haremos un especial recurso a los procesos estocásticos que permitirán la determinación del valor razonable de las PTSV incluyendo ajustes por:

- Riesgo de tipos de interés.
- Riesgo técnico.
- Riesgo de crédito.
- Opcionalidades implícitas.

### 1.3. ESTRUCTURA DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se desarrolla a través de ocho capítulos, incluyendo este en el que se describe el ámbito de investigación. A continuación se incluyen las referencias bibliográficas, para terminar con dos anexos.

Planteamos la determinación del valor razonable de las PTSV según los niveles y volatilidad de tres subyacentes: tipos libres de riesgo, spread por riesgo de crédito y tanto de mortalidad. Asimismo se tendrá en consideración algunas de las asimetrías, que en el valor razonable de las PTSV se manifiestan, como consecuencia de las opcionalidades implícitas en la Póliza de Seguros de Vida. Para lograr los dos objetivos expuestos, el trabajo plantea los siguientes hitos:

#### ✓ INTRODUCCIÓN

Exposición del campo de estudio así como de los retos a los que actualmente se enfrenta la ciencia actuarial con motivo de la reforma del tratamiento contable de las provisiones técnicas.

---

<sup>29</sup> El contrato de Reaseguro es un contrato en virtud del cual una Aseguradora (cedente), transfiere el riesgo asociado a una operación de Seguro a otra Aseguradora (reasegurador), a cambio de una prima.

El capítulo 2 comienza con una introducción a la composición y cuantificación de las PTSV, así como a las opcionalidades implícitas en las mismas. El apartado siguiente inicia en las Normas Internacionales de Contabilidad, y más en particular en:

- la NIIF 4 de Contratos de Seguro, y
- las dos alternativas que se ha planteado la IASB, para la contabilización de los instrumentos financieros en el ámbito internacional: el valor razonable y el valor específico de la entidad.

Una vez centrados en el valor razonable de instrumentos financieros, se describen las distintas posibilidades planteadas para su determinación a partir de la jerarquía establecida por el Joint Working Group of Standard Setters (JWS)<sup>30</sup>.

A continuación se incorporan los rudimentos básicos estadístico – matemáticos a los cuales será necesario recurrir a lo largo de todo el trabajo. Entre ellos caben destacar elementos del cálculo estocástico como los procesos de wiener, el Lema de Ito, o los procesos de Ornstein – Uhlenbeck.

#### ✓ SUBYACENTES AL VALOR RAZONABLE DE LAS PTSV

A partir de aquí incluimos una serie de tres capítulos que pretenden examinar los tres subyacentes que consideraremos en la cuantificación consistente con el mercado de las PTSV.

En el capítulo 3 se presenta la manera de abordar la estimación del valor razonable de las PTSV desde la perspectiva de los tipos de interés, propuesta por el presente trabajo. Inicialmente se describen varias de las metodologías existentes para el tratamiento de los tipos de interés de forma determinística y estocástica. A continuación se presentan los modelos afines unifactoriales, y más concretamente el modelo de Hull – White (1990).

El capítulo 4 se centra en los sucesos objeto de aseguramiento en los Seguros de Vida: supervivencia o fallecimiento del asegurado. Se expone una clasificación de los diversos modelos de ajuste de tablas de mortalidad dinámicas, haciendo especial énfasis en los modelos de Heligman y Pollard (1980) y de Lee – Carter (1992). Éstos últimos serán los que se ajusten a la población andaluza desde 1980 a 2000, también en el capítulo 4.

---

<sup>30</sup> Grupo de trabajo perteneciente a la American Academy of Actuaries encargado a solicitud entre otros reguladores contables, de la IASB, de encontrar soluciones a los problemas que supone valorar todos los instrumentos financieros por su valor razonable.



La parte final del capítulo 4, propone un proceso de difusión de la tabla de mortalidad dinámica ajustada, de forma que quede recogida la volatilidad manifestada en el proceso de ajuste.

El capítulo 5 presenta inicialmente varias alternativas para la incorporación del riesgo de crédito en la estimación del valor razonable. Finalmente al igual que ya se ha hecho con el tipo de interés y el tanto de mortalidad, se trata el spread por riesgo de crédito como un proceso estocástico, implementado mediante un árbol trinomial recombinante calibrable a mercado.

#### ✓ ESTIMACIÓN DEL VALOR RAZONABLE

Una vez expuestos los tres subyacentes, en el capítulo 6 se procederá a la determinación del valor razonable de las PTSV según los escenarios considerados respecto a estos subyacentes. Así en el capítulo 6 se expone como valorar el flujo de caja que se deriva de los contratos de Seguros de Vida, según los subyacentes considerados, a través de un árbol trinomial recombinante con tres o cuatro dimensiones. En el ejemplo considerando difusión en los tres subyacentes, obtenemos a través del árbol cuatridimensional, el equivalente a valorar con 514.000 trayectorias diferentes respecto a las posibles combinaciones entre los subyacentes.

#### ✓ DETERMINACIÓN DE LAS NECESIDADES DE RECURSOS PROPIOS

Una vez se ha expuesto la metodología para determinar el valor razonable de las PTSV, planteamos en el capítulo 7 una propuesta para la determinación de los recursos propios necesarios como consecuencia del riesgo inherente al valor razonable de las PTSV. En este capítulo 7 se describen en primer lugar las distintas alternativas que han considerado las distintas legislaciones para determinar las necesidades de recursos propios de las entidades aseguradoras que operan en el ramo de Vida.

Tras la introducción mencionada se procede a la exposición de un análisis de sensibilidad del valor razonable de las PTSV, ante variaciones en los niveles y volatilidad de los distintos subyacentes.

## CONCLUSIONES

Se recogen las conclusiones finales de la investigación en el capítulo 8, los principales problemas que han surgido a lo largo de la misma, así como cuales son las ventajas e inconvenientes del modelo propuesto.

Después del capítulo 8 se incluyen las referencias bibliográficas por orden alfabético de autores, y que han sido fuentes de información para la investigación.

Finalizamos con dos anexos cuyo objetivo es no dilatar la exposición de algunos conceptos a lo largo de la investigación, desviando la atención del objetivo de la investigación.

## 1.4. FUENTES

### 1.4.1. Búsqueda de información bibliográfica

Se han consultado múltiples trabajos de investigación que tratan sobre temas relacionados con nuestro análisis. La localización de estas fuentes se ha llevado a cabo vía internet, si bien existe algún trabajo que se ha localizado en biblioteca convencional. Se identifican las referencias bibliográficas mediante el apellido del autor/es y el año de publicación de la misma.

### 1.4.2. Datos para el ajuste de la mortalidad de la población andaluza

En este trabajo, se han elaborado unas tablas de mortalidad dinámicas para la población andaluza, sin recargo de seguridad implícito. Para ello se ha contado con la siguiente información que facilita el Instituto Nacional de Estadística a través de su página web [www.INE.es](http://www.INE.es):

- Población andaluza femenina y masculina por edades desde 1980 a 2000.
- Número de muertes para la población andaluza femenina y masculina por edades desde 1980 a 2000.

### 1.4.3. Aplicaciones informáticas

Con la finalidad de aplicar el modelo de Lee – Carter, se ha programado una función en Matlab 6.5., llamada LeeCarter, que permite ajustar tablas de mortalidad dinámicas a cualquier población siempre que se pueda contar con más de 5 años de experiencia.

Para ajustar los modelos ARIMA correspondientes a los parámetros de la segunda Ley de Heligman y Pollard aplicados sobre la población andaluza, se han utilizado los paquetes estadísticos Statgraphics y SPSS.

Para aplicar un modelo estocástico de evolución para cada uno de los subyacentes del valor razonable de las PTSV, se ha programado en VBA para Microsoft Excel 2000 una función denominada ArbolHW1 que devuelve un árbol trinomial para la difusión gaussiana con un factor.

Para los cálculos masivos del valor razonable de las PTSV y del VAR del valor razonable se ha utilizado el entorno de programación Visual Basic de Microsoft Visual Studio 6.0. complementado con Matlab 6.5.

También se ha utilizado Matlab 6.5. para representar los gráficos tridimensionales.

## CAPÍTULO 2

# INTRODUCCIÓN AL VALOR RAZONABLE DE LA PROVISIÓN TÉCNICA DEL SEGURO DE VIDA

### 2.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO

Este capítulo permite introducir los conceptos básicos acerca de las PTSV, así como algunos rudimentos financieros – actuariales para aproximar su valor razonable.

Tiene tres partes claramente diferenciadas:

- La primera introduce el concepto actuarial de PTSV en el apartado 2.2., así como los actuales planteamientos de la International Accounting Standard Board (IASB) en materia de Seguro y de valoración, en el apartado 2.3.
- La segunda parte incorpora los conceptos financiero – actuariales necesarios para la valoración consistente con el mercado de instrumentos financieros en general, y de Seguro de Vida en particular en el apartado 2.4.
- A continuación se introduce en el apartado 2.5., una serie de nociones básicas sobre cálculo estocástico, necesarias para el tratamiento de los subyacentes al valor razonable de las PTSV como procesos estocásticos.

Las nociones que proporcionan los dos últimos apartados, se hacen imprescindibles para el entendimiento de algunas manipulaciones estadístico – matemáticas que se llevan a cabo en los siguientes capítulos.

### 2.2. CONSIDERACIONES PREVIAS DE LAS PROVISIONES TÉCNICAS DE SEGUROS DE VIDA

Como explican Nieto y Vegas (1993) los elementos esenciales de la operación actuarial que constituye el Seguro de Vida son:

- a) Duración,  $[t, T]$ , dividida en periodos,  $[t, t + \Delta t]$ .
- b) Sucesos,  $\omega$ , que según el contrato dan lugar al cobro de las primas,  $\Pi(\omega, t)$ , y al pago de las cantidades estipuladas,  $K(\omega, t)$ .
- c) Capitales financiero – dinámicos asociados a estos sucesos,  $\Pi(\omega, t)$  y  $K(\omega, t)$ .

Los mencionados capitales financiero – dinámicos son procesos financiero – estocásticos, ya que incluyen los siguientes elementos básicos:

Estocástico: Se hallan condicionados a los sucesos posibles,  $\omega$ , los cuales forman un conjunto  $\Omega$ . En nuestro caso tendremos

$$\Omega = \begin{cases} \omega_1 \\ \omega_2 \end{cases}$$

$\omega_1$ : supervivencia del asegurado.

$\omega_2$ : fallecimiento del asegurado.

El conjunto  $\Omega$ , se denomina espacio muestral, y forma parte de un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ .

El segundo elemento del espacio de probabilidad, será la  $\sigma$  – álgebra,  $F$ , o conjunto de eventos relevantes a los que asignaremos cierta probabilidad. De modo que podemos considerar  $F$  como un conjunto de información. Una filtración  $\{F_t\}_{\forall t \geq 0}$  es una familia creciente de  $\sigma$  – álgebras incluidas en  $F$  tal que cada  $\sigma$  – álgebra contiene todos los conjuntos contenidos en la  $\sigma$  – álgebra anterior, de manera que  $F_s \subseteq F_t$  para todo  $s \leq t$ . Podemos considerar una filtración,  $F_t$  como la “historia” del proceso al tiempo  $t$ .

El último componente del espacio de probabilidad es la medida de probabilidad,  $P$ , y que se corresponde con una función  $P: F \rightarrow [0,1]$  que asigna a cada evento  $A \in F$  un número  $P(A) \in [0,1]$ .

Financiero: Se trata de capitales dinámicos, por lo que es preciso introducir el proceso estocástico cuenta bancaria,  $\{\beta_t\}_{\forall t \geq 0}$ , tal que

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

siendo,  $r(s)$ , la intensidad de rentabilidad en el instante  $s$ .

En este aspecto profundizaremos en el capítulo 3.

Por otra parte, Nieto y Vegas (1993) distinguen a su vez dos subprocesos financiero – estocásticos:

- a) Aportaciones o primas pendientes de pago del Tomador de la Póliza:

$$\{\Pi(\omega, s)\}_{\forall \omega \in \Omega, \forall s \in [t, T]}$$

- b) Prestaciones o pagos comprometidos por parte de la Aseguradora:

$$\{K(\omega, s)\}_{\forall \omega \in \Omega, \forall s \in [t, T]}$$

Consideraremos para simplificar que los gastos incurridos por la aseguradora, son asimismo prestaciones.

Las primas corresponden a un derecho de la aseguradora y De la Peña (2003) denomina activo actuarial. Las prestaciones aseguradas, junto a los gastos de administración y comercialización del asegurador, determinan los compromisos de la aseguradora los cuales De la Peña (2003) identifica con el pasivo actuarial, ó pasivo de seguros.

Nieto y Vegas (1993) introducen el principio de equivalencia estática, como aquel que considerando la operación actuarial en toda su duración, establece la igualdad entre el valor actual de las aportaciones y de las prestaciones, determinados sobre la base de la esperanza matemática de ambos procesos financiero – estocásticos. Es decir:

- Valor actual actuarial del subproceso de aportaciones:

$$\Pi(t) = \sum_{i=0}^{m-1} Ep \left[ \Pi(\omega, t_i) \cdot \frac{1}{\beta(t_i)} \middle| F_t \right]$$

Si consideramos independencia entre el proceso de las aportaciones y el de la cuenta bancaria tenemos que

$$\Pi(t) = \sum_{i=0}^{m-1} Ep \left[ \Pi(\omega, t_i) \middle| F_t \right] \cdot Ep \left[ \frac{1}{\beta(t_i)} \middle| F_t \right]$$

donde

$t$  : tiempo en que toma efecto la Póliza.

$m$  : número de pagos de primas.

$\{t_i\}_{i=0}^{m-1}$  : tiempos en los que se produce el pago de las primas.

$$Ep \left[ \Pi(\omega, t_i) \middle| F_t \right] = \Pi(\omega_1, t_i) \cdot \frac{P(\omega_1, t_i)}{P(\omega_1, t)}$$

$\frac{P(\omega_1, t_i)}{P(\omega_1, t)}$  : probabilidad de supervivencia en  $t_i$ , condicionada a que se halla vivo en  $t$ .

$$Ep \left[ \frac{1}{\beta(t_i)} \middle| F_t \right] = Ep \left[ \exp \left( - \int_t^{t_i} r(t) dt \right) \right]$$

- Valor actual actuarial del subproceso de prestaciones, en tiempo discreto<sup>31</sup>:

$$K(t) = \sum_{i=0}^n Ep [K(\omega, t_i) | F_t] Ep \left[ \frac{1}{\beta(t_i)} \middle| F_t \right]$$

donde

$n$  : número de períodos de cobertura del Seguro.

$$Ep [K(\omega, t_i) | F_t] = K(\omega_1, t_i) \cdot \frac{P(\omega_1, t_i)}{P(\omega_1, t)} + K(\omega_2, t_i) \cdot \frac{P(\omega_2, t_i, t_{i+1})}{P(\omega_1, t)}$$

$\frac{P(\omega_2, t_i, t_{i+1})}{P(\omega_1, t)}$  : probabilidad de fallecimiento del asegurado en el intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ ,

condicionada a que se halla vivo en  $t$ .

Como veremos, la valoración consistente con el mercado, utiliza una probabilidad,  $Q$ , riesgo – neutro, diferente de la probabilidad real,  $P$ . Proponer una metodología para usar esta probabilidad de valoración, será uno de los objetivos fundamentales de la presente investigación. Por otra parte, el principio de equivalencia estática establece que

$$\Pi(t) = K(t)$$

Si bajo el principio de equivalencia estática, es decir, considerando la operación actuarial en su duración total, nos situamos en un período  $u$  posterior al origen,  $t$ , tanto el subproceso de prestaciones como el de aportaciones queda dividido en dos partes. Llamando  $K_1(\omega, u)$  y  $\Pi_1(\omega, u)$  a los capitales financiero – estocásticos correspondientes a las prestaciones y aportaciones contenidas en el intervalo  $[t, u]$ ; y haciendo corresponder  $K_2(\omega, u)$  y  $\Pi_2(\omega, u)$  al intervalo que va desde  $u$  hasta el vencimiento  $T$ , podemos establecer que

$$\Pi_1(\omega, u) + \Pi_2(\omega, u) \approx K_1(\omega, u) + K_2(\omega, u)$$

o lo que es lo mismo

$$\Pi_1(\omega, u) - K_1(\omega, u) \approx K_2(\omega, u) - \Pi_2(\omega, u)$$

El capital aleatorio

$$V(\omega, u) = \Pi_1(\omega, u) - K_1(\omega, u) \approx K_2(\omega, u) - \Pi_2(\omega, u)$$

<sup>31</sup> En realidad el fallecimiento puede tener lugar en cualquier instante intermedio. Aquí asumimos para simplificar que el fallecimiento únicamente puede tener lugar en los tiempos  $t_i$ .

recibe el nombre de reserva matemática a priori o ex-ante de la operación en el período  $t$ .

Su esperanza matemática será

$$Ep[V(\omega, u)] = Ep[\Pi_1(\omega, u)] - Ep[K_1(\omega, u)] \approx Ep[K_2(\omega, u)] - Ep[\Pi_2(\omega, u)]$$

y recibe el nombre de reserva matemática (en el sentido actuarial del término) a priori o ex-ante en el período  $t$ .

Si denominamos  $\Pi_0(u)$  y  $K_0(u)$  a la realización concreta hasta  $u$  de las aportaciones y prestaciones, así como  $\Pi(u, T)$  y  $K(u, T)$  a los capitales financieros – estocásticos correspondientes al período  $[u, T]$ , condicionados a las realizaciones hasta  $u$ , tendríamos dos partes bien diferenciadas:

- La primera parte hasta  $u$

$$\Pi_0(u) - K_0(u) \tag{2.1}$$

es un valor cierto.

- Mientras que la segunda parte desde  $u$

$$K(u, T) - \Pi(u, T) \tag{2.2}$$

sigue siendo una variable aleatoria.

Por supuesto, ambas partes (2.1) y (2.2) además de ser la primera un valor cierto y la segunda una variable aleatoria, no tienen por qué ser equivalentes, dependiendo las diferencias entre una y otra de las desviaciones que con respecto al valor medio representan las concreciones del suceso asegurado hasta  $u$ .

El capital aleatorio

$$V(u, T) = K(u, T) - \Pi(u, T)$$

se denomina reserva matemática a posteriori o ex-post en el período  $u$ . Su esperanza matemática

$$Ep[V(u, T)|F_u] = Ep[K(u, T) - \Pi(u, T)|F_u]$$

es la reserva matemática prospectiva en sentido actuarial, a posteriori, valorada en  $u$ .

La esperanza matemática de ambos procesos se determina generalmente en la práctica actuarial a partir de la esperanza matemática del suceso supervivencia o fallecimiento del asegurado así como de la esperanza matemática de la función de descuento. En este trabajo abordaremos la valoración de la reserva matemática a posteriori, a partir de un modelo de valoración financiero – actuarial que recoge la esperanza matemática del suceso



supervivencia o fallecimiento del asegurado como un proceso estocástico, al igual que la función de descuento.

En su determinación, cobra una gran importancia el modelo considerado acerca de:

- La supervivencia del asegurado, y que subyace en las tablas de mortalidad utilizadas en la operación actuarial.
- El tanto de descuento a considerar en la actualización de todos los flujos.

Debido a la importancia de las tablas de mortalidad en la estimación de la probabilidad real de ocurrencia del escenario que da lugar a los flujos de caja, así como en la determinación del riesgo de estimación de las prestaciones (y cobros futuros de primas, por supuesto), profundizaremos en estas en el capítulo 4.

Con respecto al mencionado tanto de descuento, la cuantificación de las PTSV se lleva a cabo de acuerdo con la legislación vigente (art. 33. del ROSSP), según el tipo de interés técnico, y en general es admitida su determinación según el rendimiento medio que obtendrá la compañía de la inversión de las PTSV. No obstante si nos centramos en el Seguro de Vida, la duración de los contratos en ocasiones es enorme, lo que provoca que también lo sea la incertidumbre respecto al rendimiento que obtendrá la compañía durante la vigencia de la Póliza. Por lo que profundizaremos bastante más en todo ello en el capítulo 3.

Por otra parte si valoramos la reserva matemática prospectiva en sentido actuarial, desde el punto de vista del Tomador de la Póliza, esta valoración tendría en cuenta entre otros, el riesgo de impago de la Aseguradora. El objetivo de la investigación, es aproximar para esta reserva matemática, en adelante PTSV, el valor por el que se intercambiaría el derecho que representa, en un mercado de negociación. El riesgo de impago se expondrá en el capítulo 5.

En cuanto a la prima, esta se determina a partir de las prestaciones garantizadas por la Póliza, en función de las hipótesis técnicas del producto (interés técnico, gastos de administración y comercialización, tabla de mortalidad,...). No obstante, existen varias opcionalidades incorporadas a la Póliza, que no es habitual cuantificar ni en la prima ni en las PTSV. La posibilidad de rescate anticipado de la Póliza, constituye una opción implícita en la Póliza, que generalmente no se valora en el importe de la prima a cobrar al tomador de la Póliza, ni en las PTSV. En realidad, si el valor de rescate se calcula en función del interés técnico garantizado en la Póliza, estamos ante un intercambio de tipos<sup>32</sup>.

---

<sup>32</sup> Se refiere a que la aseguradora garantiza un tipo fijo, cuando en realidad el mercado de capitales proporciona un interés variable.

Otra opción implícita en la Póliza, y que tampoco se cuantifica en la prima es la participación en beneficios. No es extraño encontrarse con Seguros de Vida que ofrecen al tomador de la Póliza, la participación en un porcentaje de la rentabilidad obtenida por la inversión de las PTSV por encima del interés técnico. En caso de que la rentabilidad de las inversiones no alcance el interés técnico garantizado, no se produce en cambio, un menoscabo en las prestaciones garantizadas. En todo esto profundizaremos en el capítulo 6.

## **2.3. INTRODUCCIÓN A LA NIIF 4 Y VALOR RAZONABLE**

### **2.3.1. Introducción a la NIIF 4**

En la actualidad los mercados de capitales mundiales carecen de fronteras, y sus participantes han de disponer de información financiera comparable, que les permita tomar decisiones de inversión. Durante más de 30 años, el IASB y su antecesor, el Comité de Normas Internacionales de Contabilidad (IASB), han trabajado para desarrollar, un conjunto de Normas Internacionales para la Información Financiera de estas características. Son los IAS o IFRS, en su denominación más actual, también conocidas en España como NIC o NIIF.

Para implantar su "Estrategia en materia de Información Financiera" adoptada por la Comisión Europea en junio de 2000, el Parlamento y el Consejo de la Unión Europea (UE) aprobaron un Reglamento en el que se exigía a todas las empresas cotizadas de la UE la aplicación antes de 2005, de las normas contables emitidas por el IASB en la elaboración de sus estados financieros consolidados. Se permitía no obstante, que los estados miembros decidan si la obligación de cumplir con los requisitos de las NIIF se extiende también a los estados financieros de grupos no cotizados y estados financieros individuales. Asimismo, los estados miembros tienen la opción de eximir de forma temporal (sólo hasta 2007) a algunas empresas del cumplimiento con NIIF:

- aquellas empresas que coticen tanto en la UE como en una Bolsa fuera de la UE y que apliquen los US GAAP como sus principales normas de contabilidad, y
- empresas que sólo tienen títulos de deuda negociables que cotizan en Bolsa.

La obligación de cumplir con las NIIF se aplica no sólo a los veinticinco estados miembros de la UE sino también a los tres estados del Espacio Económico Europeo. Muchas empresas importantes de Suiza (que no es miembro de la UE ni del EEE) ya aplican las NIIF.

Debido a la complejidad del negocio asegurador, resulta complicado establecer un marco especial para los aspectos contables específicos del seguro. De ahí que como hemos anticipado en la introducción, en mayo de 2002 el IASB decidió proceder en su Proyecto de Seguros en dos fases. La primera fase abarca la NIIF 4 (Contratos de Seguro), y en un sentido más amplio, la NIC 32 (Instrumentos financieros: presentación e información a revelar) y la NIC

39 (Instrumentos financieros: reconocimiento y valoración). En la segunda fase prevista para más allá del 2007, se tratarán aspectos tan controvertidos como la valoración de las PTSV. La NIIF 4 es la primera orientación del IASB sobre la contabilización de los contratos de seguros (aunque no la última). Hay una Segunda Fase del Proyecto de Seguros del IASB en marcha. El Consejo emitió la NIIF 4 debido a la necesidad urgente de mejorar los desgloses de los contratos de seguros y mejorar moderadamente las prácticas de reconocimiento y medición, a tiempo para la adopción de NIIF por parte de empresas cotizadas de toda Europa y del resto del mundo en 2005.

La NIIF 4 se aplica a la práctica totalidad de los contratos de seguros (incluyendo los contratos de reaseguros) que emite una entidad y a los contratos de reaseguros que posee. No se aplica a otros activos y pasivos de una aseguradora, como activos y pasivos financieros, dentro del alcance de la NIC 39. La definición que la NIIF 4 incluye sobre contrato de seguros es *"contrato en virtud del cual una parte (la aseguradora) asume un riesgo de seguro significativo de otra parte (el tomador del seguro) aceptando compensar al tomador del seguro si un determinado acontecimiento futuro incierto (el acontecimiento asegurado) afecta negativamente al tomador del seguro"*. Por otro lado, no aborda la contabilización por parte de los tomadores de los seguros.

En cuanto a su aplicación, la NIIF exige a una aseguradora temporalmente (hasta la finalización de la fase II del Proyecto de Seguros) de determinados requisitos de otras IFRS, incluyendo el requisito de tener en cuenta el Marco del IASB a la hora de seleccionar políticas contables para contratos de seguros. Se incluye en el anexo I un cuadro resumen acerca de las políticas contables introducidas por NIIF 4. Asimismo se incluye en el anexo II un cuadro resumen de la información a revelar por parte de la aseguradora exigido por la NIIF 4.

### **2.3.2. Valor Razonable Vs. Valor Específico de la Entidad**

Se entiende actualmente por "Fair Value" o valor razonable, aquel valor por lo que se puede "cambiar" un activo o cancelar una obligación, entre dos partes que disponen de información en un mercado.

Hay que distinguir el valor razonable del "Entity Specific Value" o valor específico de la entidad. Este último representa el valor de un activo o pasivo para la empresa, y puede reflejar factores que no están disponibles o no son relevantes para otros miembros del mercado. No obstante, hemos de tener en cuenta que las definiciones de estas dos medidas están todavía siendo debatidas a la fecha de elaboración de este trabajo. Hemos de ser conscientes de que ambas palabras y el entendimiento del objeto de medida puede cambiar con el tiempo.

A continuación se incluye un cuadro ilustrativo.

MEDIDA	CONCEPTO	DIFERENCIAS			SIMILITUDES
		Base lógica	Asunciones	Calidad crediticia	
<i>FAIR VALUE</i>	Valor del activo o pasivo de la empresa, por el cual una compañía estaría dispuesta a transferir a otra el control sobre el activo y/o pasivo existente en el balance a la fecha en que se produce la transacción, entendida en un mercado de libre competencia	Valor de salidad o de fijación inmediata.	Basadas en el mercado.	Posiblemente reflejado.	Ambos implican el uso de la jerarquía de métodos de valoración del JWS que veremos en el siguiente punto.  Ambos anticipan la actualización de las asunciones de valoración a la fecha de ésta.
<i>ENTITY SPECIFIC VALUE</i>	Valor del activo o pasivo de la empresa, que puede reflejar factores que no están disponibles o no son relevantes para otros miembros del mercado.	Fijación ordenada a lo largo del tiempo.	Específicas para la entidad.	No reflejado.	Para el pasivo de una aseguradora en ambos se utilizan las técnicas del valor actualizado para reflejar estimaciones.

**Cuadro 2.1. Cuadro comparativo entre Fair Value y Entity-Specific Value.**

Cada uno de los objetos de medida propuestos representa un cambio importante de los Principios Contables Generalmente Aceptados de España (PCGA). Así en los PCGA se permite activar gastos que luego se amortizan a lo largo del período durante el cual son reconocidos los ingresos. No hay lugar para tal amortización en un sistema completamente prospectivo, como sería el del valor razonable.

En segundo lugar, actualmente las asunciones de valoración del pasivo están cerradas, es decir se deben de cumplir “al pie de la letra”, sólo podrán ser cambiadas cuando se necesiten reconocimientos de pérdida. Bajo el valor razonable, todas las asunciones de valoración están abiertas y susceptibles de cambio en cada fecha de valoración. Dada la profundidad de los contratos de Seguros de Vida, y la multitud de variables a considerar, el valor razonable será muy sensible a las asunciones usadas, por lo que se debe tener mucho cuidado en desarrollar un método consistente y disciplinado para establecer estas asunciones; establecer este método será todo un reto.

Al evaluar la dependencia de los resultados respecto de las asunciones tomadas, los cuerpos que establecen la normativa contable enmarcarán muchas de sus discusiones en términos de relevancia versus fiabilidad. Las conclusiones que alcancen estos cuerpos se incluirán, al igual que las propuestas actuales respecto de la normativa contable internacional, en el Draft Statement of Principles (DSOP)<sup>33</sup> establecido por el IASB.

Por otra parte, el presente trabajo aborda exclusivamente la determinación del valor razonable de las PTSV con un enfoque financiero – actuarial, sin entrar en más detalle en cuanto a los aspectos contables de la norma.

<sup>33</sup> Documento que incluye la proposición actualizada en materia de normativa contable internacional del IASB.

## **2.4. PRINCIPIOS DE VALORACIÓN PARA INSTRUMENTOS FINANCIEROS**

### **2.4.1. Jerarquía de métodos de valoración**

Las distintas cuantificaciones que puede ofrecer una estimación derivan fundamentalmente de los métodos utilizados en la valoración del instrumento financiero.

El “Joint Working Group of Standard Setters” (JWS) ha propuesto una jerarquía de métodos para determinar el valor razonable de instrumentos financieros. Como muchos contratos de seguro están incluidos dentro de su definición de instrumentos financieros, se presume que esta jerarquía se aplicaría también a las PTSV. La jerarquía (de mayor a menor fiabilidad) a utilizar en la valoración sería:

1. El valor de mercado cuando esté disponible.
2. Cuando no exista valor de mercado para el instrumento que se quiera valorar, se usará el valor de mercado de un instrumento análogo, ajustando las diferencias oportunas.
3. Si no existe un valor de mercado y no hay ningún instrumento análogo disponible, se calculará el valor actual de los flujos esperados futuros de ese instrumento incluyendo un ajuste en función del riesgo de impago.

### **2.4.2. Valor de negociación en el mercado**

Cuando sea posible disponer de un instrumento financiero en mercados vivos, amplios y abiertos, entonces el precio de mercado es el valor razonable.

En algunas situaciones un mercado puede existir, pero el precio de mercado no sería el valor razonable. Tales situaciones son las siguientes:

1. El mercado no es vivo, amplio, y abierto, o cada negociación puede tener lugar bajo condiciones especiales o consideraciones únicas.

Por ejemplo, el volumen de negociación puede ser muy pequeño. Si ocurre eso, el precio de mercado podría estar fuertemente influenciado por la oferta y demanda del día de negociación y no representativas del curso de las condiciones del mercado general.

2. Puede haber restricciones en la negociación del mercado que hacen imposible completar un intercambio de libre competencia.

Por ejemplo, si nos situamos en el caso de una operación de reaseguro, la compañía aseguradora cedente no puede transferir sus PTSV completamente al reasegurador. Según la legislación vigente, la cedente responde del pago de las prestaciones, haga o no frente el reasegurador de sus obligaciones de reembolsar a la cedente su parte proporcional de la prestación. Como la cedente no está completamente aliviada del riesgo en tal transacción

de reaseguro, el precio de la transacción no es el valor razonable. Sin embargo, el precio de las transacciones de reaseguro puede proporcionar una guía para la determinación del valor razonable, siempre que todos los riesgos inherentes sean tenidos en cuenta.

3. En casos extraños, puede haber consideraciones especiales debido al tamaño del instrumento financiero.

Por ejemplo, un paquete de acciones que representa un interés de control en una compañía puede tener un valor razonable mayor que el producto del número de acciones y el precio del mercado por acción. En efecto, un interés de control tiene valor que se separa del valor de las acciones individuales negociadas en el mercado.

### **2.4.3. Replicación de valores de negociación en el mercado**

Algunos productos ofrecidos por compañías de seguro se parecen mucho a otros instrumentos ofrecidos por compañías no aseguradoras, por ejemplo, rentas temporales con un mínimo riesgo de seguro.

En ocasiones es posible construir una cartera de títulos de negociación pública, que se comporta de forma muy parecida a las PTSV, estando imbuida además de la mayoría de sus riesgos. En tales situaciones el valor de la cartera de títulos puede servir como valor razonable de las PTSV. Esta cartera de títulos se puede considerar como una “cartera de medida” ya que sirve de guía para medir el valor de las PTSV, pero no es correcto referirse a tal cartera como “cartera replicada” a no ser que encajen exactamente los flujos de caja de las PTSV en cada escenario posible, incluyendo escenarios que implican impago por el riesgo de crédito.

En el caso de contratos que incluyen riesgos de seguro tales como la mortalidad, no existen “carteras de medida” en mercados secundarios corrientes. Sin embargo, en algunas situaciones, los riesgos de seguro son muy pequeños con relación al valor del instrumento financiero. En aquellos casos, el valor de una cartera similar de títulos de negociación pública puede proporcionar una guía para valorar las PTSV, siempre que se realicen los ajustes necesarios para reflejar el riesgo de mortalidad.

### **2.4.4. Valoración de los flujos de caja futuros**

Lo que se pretende es encontrar en el mercado la información que nos permita poder valorar los instrumentos que no cotizan. Esta valoración será relativa, no absoluta o fundamental. Cuando el valor de mercado no está disponible (o, debido a las consideraciones mencionadas anteriormente, no representa el valor razonable), y para llevar a cabo una valoración consistente con el mercado, hay al menos tres métodos teóricamente correctos para estimar el valor de una serie de flujos de caja con riesgo de impago y dependientes del escenario futuro respecto de la supervivencia o fallecimiento del asegurado:

1. El descuento de flujos de caja futuros ponderados con la probabilidad real del escenario que proporciona estos flujos de caja, usando tipos de descuento obtenidos de la suma de una tasa libre de riesgo y una prima de riesgo asociada al riesgo de impago.
2. Modificar la probabilidad real de ocurrencia del escenario que da lugar a los flujos de caja futuros con riesgo y descontar a los tipos de interés libres de riesgo, es lo que se conoce como valoración riesgo – neutro.
3. Modificar la cuantía de los flujos de caja con riesgo y descontar a los tipos libres de riesgo.

Veamos cada uno brevemente con un ejemplo para un único período. Consideraremos una Póliza de Seguro de Vida con un valor consistente con el mercado de  $S$ , cuya prestación dentro de un año será  $S_{px}$ , si el asegurado vive y  $S_{qx}$  si el asegurado fallece a largo del año. Podemos aplicar los tres métodos de valoración como sigue. Primero,

$$S = \frac{p_x S_{px} + (1 - p_x) S_{qx}}{1 + r + \lambda \sigma_S} \quad (2.3)$$

donde

$r$ : es el tipo libre de riesgo para un año,

$p_x = \frac{P(\omega_1, x+1)}{P(\omega_1, x)}$ : es la probabilidad real de supervivencia del Asegurado a un año,

$\lambda$ : es el precio de mercado del riesgo asociado a la Póliza, y

$\sigma_S$ : un parámetro de volatilidad asociado con este riesgo. Podemos considerar  $\lambda \sigma_S$  como una prima de riesgo de mercado.

Segundo,

$$S = \frac{\pi_x S_{px} + (1 - \pi_x) S_{qx}}{1 + r} \quad (2.4)$$

donde,  $\pi_x = p_x - \lambda \cdot \sqrt{p_x \cdot (1 - p_x)}$ , es la probabilidad bajo una nueva medida de probabilidad,  $Q^{34}$ , riesgo – neutro, es lo que conocemos como probabilidad martingala riesgo neutral, y que analizaremos ampliamente más adelante.

O tercero,

$$S = \frac{[p_x S_{px} + (1 - p_x) S_{qx}] - Z}{1 + r} \quad (2.5)$$

<sup>34</sup> Se trata de la probabilidad que se está utilizando en la valoración.

donde,  $Z$ , es una cantidad que hace el numerador de (2.5) igual al equivalente cierto del pago esperado con riesgo en el numerador de (2.4).

Con el objeto de ilustrar como la valoración con probabilidades martingala riesgo – neutral compara la valoración con las probabilidades reales o usando un equivalente de certeza, consideramos el ejemplo<sup>35</sup> de una Póliza de Seguro de Vida. Se trata de un Seguro Mixto cuyo capital garantizado por supervivencia a un año del Asegurado es de 110€ y 90€ si fallece a lo largo del año. Consideraremos la probabilidad de supervivencia,  $p_x = 0,9877$ , y un tipo de descuento ajustado al riesgo. Este tipo de interés será

$$r + \lambda\sigma_s = 0,0520995$$

donde  $\lambda = 0,02$  y  $\sigma_s = 0,104979$ . De este modo, el valor de esta Póliza es

$$\frac{p_x \cdot 110 + (1 - p_x) \cdot 90}{1 + r + \lambda\sigma_s} = 104,32€$$

De forma similar, este título puede ser valorado usando la probabilidad martingala,  $\pi_x = 0,9855$ , y descontándolo al tipo libre de riesgo,  $r = 0,05$ :

$$\frac{\pi_x \cdot 110 + (1 - \pi_x) \cdot 90}{1 + r} = 104,32€$$

Finalmente, usando el método del equivalente de certeza con  $Z = 0,219$ , el valor sería

$$\frac{p_x \cdot 110 + (1 - p_x) \cdot 90 - 0,219}{1 + r} = 104,32€$$

La conclusión es que el proceso de valoración puede contar para evaluar el riesgo, tanto con las probabilidades reales,  $P$ , agregando al tipo libre de riesgo una prima de riesgo, como con las probabilidades martingala riesgo – neutro,  $Q$ , y descontando al tipo libre de riesgo, o por el ajuste de los flujos de caja a sus niveles de equivalente de certeza y descontando al tipo libre de riesgo. Sobre el cambio a la medida de probabilidad riesgo – neutro  $Q$ , a través del teorema de Girsanov, profundizaremos en el apartado siguiente.

<sup>35</sup> Este ejemplo una vez modificado se ha extraído de la monografía de la SOA, Babel y Merrill (1996), Valuation of Interest – Sensitive Financial Instruments, pp. 43-44.



## **2.5. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO ESTOCÁSTICO APLICADO AL CAMPO FINANCIERO – ACTUARIAL**

En la determinación del valor razonable de las PTSV, cobra una gran importancia la cuantificación de los derivados implícitos, así como una cuantificación consistente con el mercado, es decir, considerando la cuantificación en términos del valor de cotización de otros instrumentos financieros.

Para abordar la valoración consistente con el mercado, haremos una primera aproximación al cálculo estocástico.

### **2.5.1. Introducción a los modelos dinámicos estocásticos**

En ocasiones es muy complicado obtener información acerca de las expectativas sobre los distintos escenarios a partir de los precios de mercado, debido a la inclusión en dichos precios, de factores ajenos a los citados escenarios. Para evitar el ruido inherente a los precios de mercado, así como los problemas que hemos mencionado en el primer método de valoración de la jerarquía de la JWS, surgen los modelos estocásticos de evolución.

A continuación expondremos una breve introducción a los modelos matemáticos que devienen en modelos estocásticos de evolución. Un modelo matemático supone la representación de un cierto aspecto de la realidad, está basado en la lógica matemática, y sus elementos son variables y funciones, cuyas relaciones matemáticas son similares a las del mundo real que modelizan.

Desde nuestro punto de vista nos interesa una primera clasificación de los modelos matemáticos: modelos estáticos y dinámicos. En el primer caso la variable tiempo no es importante, mientras que en el segundo caso, uno o varios de los elementos modelizados toma valores dependientes del tiempo, describiendo trayectorias temporales. Si nos centramos en los modelos dinámicos, podemos distinguir también entre modelos dinámicos deterministas y estocásticos. En los primeros, tanto los parámetros como las variables temporales, tienen asignados valores ciertos, mientras que en los modelos dinámicos estocásticos, alguna variable o parámetro sigue un proceso estocástico, con lo cual las variables temporales siguen una distribución de probabilidad.

Como regla general partiremos de modelos dinámicos estocásticos en tiempo continuo, materializados a través de una ecuación diferencial estocástica. Por este motivo introduciremos las ecuaciones diferenciales.

## Resolución de ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función desconocida, con sus derivadas (o derivadas parciales) hasta un cierto orden. Podemos clasificar las ecuaciones diferenciales como ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y ecuaciones en derivadas parciales (EDP). Las primeras son aquellas en las que la función incógnita es una función de una sola variable, mientras que en las EDPs, la función incógnita es una función de varias variables, siendo las derivadas intervinientes en la ecuación, derivadas parciales.

Para resolver una ecuación diferencial existen métodos analíticos y métodos numéricos.

- Métodos analíticos: persiguen obtener la función solución de la ecuación diferencial mediante una expresión analítica, que incluye funciones elementales. No obstante, es habitual que no existan soluciones analíticas para las ecuaciones diferenciales, por lo que se deba recurrir a los métodos numéricos. Serán estos últimos los que emplearemos a lo largo del presente trabajo.
- Métodos numéricos: suponen la obtención de soluciones numéricas de problemas de valores iniciales. En este caso aunque desconozcamos la expresión analítica, la solución viene dada mediante vectores de valores numéricos, de modo que podemos determinar en cada período el valor numérico de esta solución.

Los métodos numéricos se aplican a problemas de valores iniciales (o finales) y se basan en la discretización de la ecuación diferencial, es decir en la transformación de la ecuación diferencial o en tiempo continuo en una ecuación en diferencias finitas o en tiempo discreto.

Dado que más adelante haremos referencia al esquema de discretización de Euler, explicaremos de forma somera cual es su planteamiento en un caso sencillo, como es una EDO de orden 1 no lineal. Partimos de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Si la EDO es de orden  $n$ , basta con transformarla en un sistema equivalente de  $n$  ecuaciones diferenciales de orden 1. Para la resolución supondremos el intervalo  $[t_0, T]$ , y consideraremos que dicho intervalo está dividido en subintervalos  $[t_i, t_{i+1}]$ , de manera que

$t_{i+1} = t_i + \Delta t$ , siendo  $\Delta t$  la longitud del subintervalo. Si aplicamos a la función  $x(t)$  el desarrollo de Taylor de orden 1 obtenemos que:

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t \cdot x' + o(\Delta t^2)$$

siendo,  $o(\Delta t^2)$ , el resto del polinomio de Taylor que depende de  $\Delta t^2$ . Si  $\Delta t$  es infinitesimal, a  $o(\Delta t^2)$  se le conoce como infinitésimo de orden 2, y puede considerarse despreciable a efectos de aproximación.

Si sustituimos en la EDO, tenemos que:

$$x' = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t_i} = f(x(t_i), t_i)$$

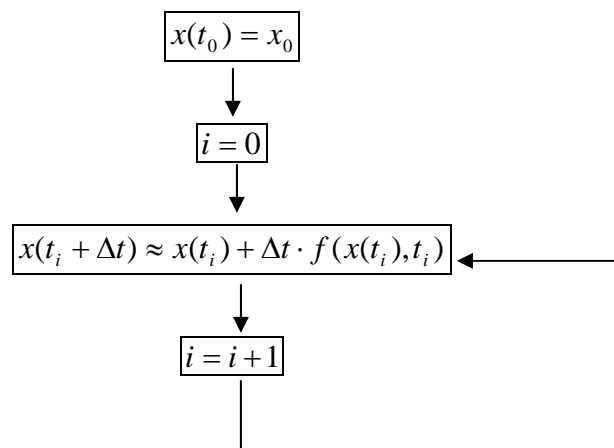
De ambas expresiones nos queda:

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta t \cdot f(x(t_i), t_i) + o(\Delta t^2)$$

Si despreciamos el infinitésimo de orden 2,  $o(\Delta t^2)$ , obtenemos

$$x(t_i + \Delta t) \approx x(t_i) + \Delta t \cdot f(x(t_i), t_i),$$

con lo cual hemos obtenido un algoritmo recursivo para determinar el vector de valores numéricos que constituyen la resolución numérica. Si lo representamos como diagrama de flujo:



Así conocido  $x_0$ , determinamos el valor de  $x(t_1)$ , que a su vez se convierte en un valor conocido a partir del cual determinar  $x(t_2)$ , y así sucesivamente.

Es necesario para ilustrar las especificaciones de los modelos estocásticos de evolución introducir los siguientes conceptos de cálculo estocástico.

## 2.5.2. Elementos de cálculo estocástico

Definiremos una variable aleatoria  $X$  como una función definida sobre el espacio muestral,  $\Omega$ , que hace corresponder a cada  $\omega \in \Omega$  un único número real,  $X(\omega)$ .  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  es un vector aleatorio  $n$  – dimensional si sus componentes  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables aleatorias. Podemos definir un proceso estocástico en tiempo continuo,  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , como una sucesión de variables aleatorias definidas en  $\Omega$ , en la cual  $X_t$  representa el valor del fenómeno descrito por el proceso estocástico en el período  $t$ . De este modo una trayectoria muestral sería una realización de la evolución del proceso. El espacio muestral  $\Omega$  es el conjunto de todas las trayectorias muestrales.

Supondremos que todas las variables aleatorias  $X_t$  toman valores en el conjunto  $S$ , denominado espacio de estados del proceso. Este espacio de estados,  $S$ , es el conjunto más pequeño con la propiedad de que  $P\{X_t \in S\} = 1 \quad \forall t$ . Hasta un momento determinado del tiempo  $T$ , la evolución del fenómeno descrito por el proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ , constituye la historia hasta el momento  $T$ , siendo los valores posteriores a este momento estocásticos. Esta historia del fenómeno nos permite revisar la distribución de probabilidad que atribuimos al valor del proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ . Así suponiendo que nos situamos en el momento  $t$  y consideramos el valor del proceso en algún momento futuro  $u > t$ , la distribución del valor de  $X_u$  se halla caracterizada por las probabilidades  $P(X_u \in A)$  para subconjuntos  $A$  medibles del espacio de estados  $S$ . Si para todo  $t, u \in R^+$  con  $u > t$ , y siendo para todo  $A \subseteq S$ :

$$P[X_u \in A | \{X_s\}_{s \in [0, t]}] = P(X_u \in A | X_t),$$

tenemos que  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Markov. Es decir, a partir de la información disponible en el presente, el futuro es independiente del pasado, únicamente depende del valor presente.

### Martingalas

Un proceso estocástico será martingala cuando en cualquier período, la variación esperada para el valor del proceso en cualquier período futuro es igual a 0. Matemáticamente diremos que un proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es martingala bajo  $P$  - martingala si para todo  $t \geq 0$  tenemos

$$E_t^P(X_u) = X_t \quad \forall u \geq t$$

siendo  $E_t^P$  la esperanza cuantificada bajo la medida de probabilidad  $P$ , según la información en el momento  $t$ .

De este modo tenemos que  $X_t$  es la mejor predicción de  $X_u$  dado  $F_t$ . Para ello se han de cumplir también las siguientes condiciones:

- $E|X_t| < \infty \quad \forall t$
- $\{X_t\}_{\forall t \geq 0}$  es un proceso adaptado a  $\{F_t\}_{\forall t \geq 0}$ , es decir,  $\forall t$ ,  $X_t$  es medible en  $F_t$ .

Se usa el concepto de “martingala” en teoría de la probabilidad entre otras muchas cuestiones para hacer referencia al “juego equitativo”, consistente en un juego reiterativo a partir de un valor  $X_t$ , con la información,  $F_t$ , hasta tiempo  $t$ . El juego será equitativo, si los valores esperados futuros  $\{X_u\}_{\forall u \geq t}$ , según una medida de probabilidades,  $P$ , dada la información  $F_t$ , es precisamente el valor actual  $X_t$ .

### Procesos de Wiener

Decimos que un proceso estocástico  $\{X_t\}_{\forall t \geq 0}$  es un proceso de Wiener o movimiento Browniano estándar (MBE) si cumple:

1.  $X_0 = 0$ .
2.  $X_u - X_t \approx N(0, u - t) \quad \forall u > t \geq 0$ . (Incrementos normalmente distribuidos)
3.  $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_m} - X_{t_{m-1}}$  son mutuamente independientes  $\forall t_n > t_{n-1} \dots > t_0 \geq 0$ . (Incrementos independientes).

De la condición 2 y 3 deviene que  $\forall t \geq 0$ ,  $X_t \approx N(0, t)$  y  $Cov[X_u, X_t] = \min(u, t)$ ,

ya que  $\forall u > t \geq 0$ :

$$Cov[X_t, X_u] = E[((X_u - X_t) + X_t)X_t] = E[(X_u - X_t)X_t] + E[X_t^2] = E[X_u - X_t]E[X_t] + t = 0 + t = t$$

4.  $\{X_t\}_{\forall t \geq 0}$  tiene trayectorias muestrales continuas con probabilidad 1.

De este modo un MBE está definido según una medida de probabilidad  $P$  bajo la que los incrementos tienen las propiedades anteriores, así

$$P\left(\frac{X_u - X_t}{\sqrt{u - t}} < h\right) = \phi(h) \equiv \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

siendo  $\phi(\cdot)$  la distribución acumulada de una normal estándar.

Hemos de caer en la cuenta de que un MBE es un proceso de Markov, ya que el incremento desde el presente a cualquier período futuro es independiente del pasado. También

un MBE es martingala por ser el cambio esperado en el valor del proceso igual a 0. Por otra parte Mikosch (1999) demuestra que las trayectorias muestrales de un MBE no son diferenciables en ningún tiempo. A esta irregularidad hemos de añadir que la variabilidad de estas trayectorias no se hallan acotadas en ningún intervalo finito  $[0, T]$ . Estas dos irregularidades son las que según Mikosch (1999) obligan a recurrir al cálculo estocástico.

### **Proceso de Wiener generalizado**

Consideremos un MBE  $\{W_t\}_{\forall t \geq 0}$  y un proceso estocástico  $\{X_t\}_{\forall t \geq 0}$  definido por:

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0$$

siendo  $\mu, \sigma$ , constantes y  $X_0$  el valor inicial del proceso. A partir de las propiedades del MBE, tenemos que  $X_t$  se distribuye normalmente con media  $\mu t$  y varianza  $\sigma^2 t$ . Así el cambio del proceso  $\{X_t\}_{\forall t \geq 0}$  se determinará a partir de

$$X_u - X_t = \mu(u - t) + \sigma(W_u - W_t) \quad \forall u > t \geq 0.$$

El incremento en el proceso para un intervalo infinitesimal será

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t,$$

en el que  $dW_t$ , se puede considerar como una variable aleatoria de distribución  $N(0, dt)$ . De este modo el proceso  $\{X_t\}_{\forall t \geq 0}$  se denomina proceso de Wiener generalizado donde el parámetro  $\mu$  denominado componente tendencial, determina el cambio esperado por unidad de tiempo, y el parámetro  $\sigma$  o volatilidad del proceso, refleja la incertidumbre acerca de los valores futuros del proceso. El proceso de Wiener generalizado sigue siendo un proceso de Markov, y sus trayectorias son continuas no diferenciables en ningún punto, pero ya no es necesariamente una martingala como si lo era el MBE. Sólo será una martingala cuando el componente tendencial tome el valor 0.

Cuando los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  varían determinísticamente en el tiempo  $\{X_t\}_{\forall t \geq 0}$  será un proceso de Wiener generalizado no homogéneo en cuanto al tiempo y se puede escribir como

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Para un intervalo de tiempo relativamente pequeño  $\Delta t$ , tendremos un incremento esperado en el proceso de aproximadamente  $\mu \Delta t$  y su varianza será aproximadamente también de  $\sigma^2 \Delta t$ . Rigurosamente el incremento para este intervalo será de

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \int_t^{t+\Delta t} \mu_u du + \int_t^{t+\Delta t} \sigma_u dW_u$$

siendo  $\int_t^{t+\Delta t} \sigma_u dW_u$  la denominada integral estocástica o Integral de Ito.

De entre las muchas propiedades de la Integral de Ito, aquí destacaremos que si

$\sigma(u)$  es una función determinística entonces  $\int_t^{t+\Delta t} \sigma_u dW_u$  tiene distribución  $N\left(0, \int_t^{t+\Delta t} \sigma_u^2 du\right)$ .

### Procesos de difusión

Un proceso estocástico  $\{X_t\}_{\forall t \geq 0}$  será un proceso de difusión unidimensional si se puede representar para un intervalo de tiempo infinitesimal

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

pasando a ser ahora el componente tendencial y la volatilidad, funciones del tiempo y del valor actual del proceso. Cuando el proceso estocástico se halla en las dos partes de la igualdad, esta se denomina ecuación diferencial estocástica (EDE).

Dado que  $dW_t$  tiene una distribución  $N(0, dt)$ , la media y varianza de los incrementos en el proceso para un intervalo infinitesimal  $[t, t + dt]$  condicionadas a la información disponible en el instante t serán

$$E_t[dX_t] = \mu(X_t, t)dt$$

$$V_t[dX_t] = \sigma(X_t, t)^2 dt$$

Rigurosamente el incremento en el proceso de difusión para el intervalo  $[t, t + \Delta t]$  será

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \int_t^{t+\Delta t} \mu(X_s, s)ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(X_s, s)dW_s,$$

siendo  $\int_t^{t+\Delta t} \mu(X_s, s)ds$  una Integral de Riemann y  $\int_t^{t+\Delta t} \sigma(X_s, s)dW_s$  una Integral de Ito.

Un proceso de difusión es un proceso de Markov debido a que tanto el componente tendencial como la volatilidad dependen exclusivamente del valor actual del proceso. Al igual que el proceso de Wiener generalizado no es una martingala, salvo en este caso que  $\mu(X_t, t) = 0$ ,  $\forall X_t, t$ . Igualmente las trayectorias muestrales serán continuas y no diferenciables en ningún punto. En cuanto al espacio de estados S y la distribución de los valores futuros dependerán de las funciones  $\mu$  y  $\sigma$ .

### Lema de Ito

Un proceso estocástico unidimensional  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Ito si sigue la siguiente dinámica

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

con  $X_t \in R$ , donde  $\mu_t$  y  $\sigma_t$  son a su vez procesos estocásticos. El Lema de Ito se puede considerar como la correspondencia estocástica de la regla de la cadena del cálculo ordinario. Se hace indispensable para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas en las cuales el proceso estocástico, sigue una dinámica en la que se incluyen a su vez otros procesos estocásticos.

Sea el proceso de Ito anterior y  $f(X_t, t) \in R$  una función continuamente diferenciable dos veces respecto a  $X_t$  y una vez respecto a  $t$ . Entonces el proceso estocástico  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  definido por  $Y_t = f(X_t, t)$ , será también un proceso de Ito, determinándose su dinámica como sigue:

$$dY_t = \left[ \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X} \mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X^2} \sigma_t^2 \right] dt + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X} \sigma_t dW_t$$

Su demostración se puede encontrar en Shreve (1997). La expresión anterior se puede escribir como

$$dY_t = \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(X_t, t)}{\partial X} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(X_t, t)}{\partial X^2} (dX_t)^2,$$

donde hemos de tener en cuenta para el cálculo de,  $(dX_t)^2$ , que  $(dt)^2 = dt dW_t = 0$  y  $(dW_t)^2 = dt$ , de manera que

$$(dX_t)^2 = (\mu_t dt + \sigma_t dW_t)^2 = \mu_t^2 (dt)^2 + 2\mu_t \sigma_t dt + \sigma_t^2 (dW_t)^2 = \sigma_t^2 dt$$

### Teorema de Girsanov

Una importante aplicación del teorema de Girsanov, es recoger la probabilidad de valoración, en la ecuación diferencial estocástica que recoge la evolución del proceso estocástico referente al precio del instrumento. Según este teorema un proceso de Wiener generalizado con componente tendencial, es decir, que no es martingala, se puede ver como un proceso de Wiener sin componente tendencial, mediante un cambio sobre la medida de probabilidad,  $P$ . Así, definido un espacio de probabilidad,  $(\Omega, F, P)$ , consideramos una variable aleatoria,  $L \geq 0$ , con esperanza la unidad, entonces tenemos que

$$Q(A) = E(1_A L)$$



define una nueva medida de probabilidad. El hecho de que la esperanza de  $L$  sea igual a 1 garantiza que

$$Q(\Omega) = E(L) = 1$$

Decimos que  $L$  es la densidad de  $Q$  respecto de  $P$ , en términos matemáticos

$$\frac{dQ}{dP} = L$$

La esperanza matemática de la variable aleatoria  $X$  en el nuevo espacio de probabilidad  $(\Omega, F, Q)$  será

$$E_Q(X) = E(XL)$$

Rigurosamente en términos generales, el teorema es el siguiente. Sea  $\{X_t, t \in [0, T]\}$  un proceso adaptado que cumple la condición de Novikov:

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T X_t^2 dt\right)\right) < \infty.$$

y  $\{W_t, t \in [0, T]\}$  un movimiento browniano. Entonces, el proceso,  $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t X_s ds$ , es un movimiento browniano respecto de la nueva medida de probabilidad  $Q$ . Este teorema nos permitirá aplicar la nueva medida de probabilidad martingala riesgo - neutral  $Q$ , usada en la valoración de instrumentos financieros cotizados, en lugar de la probabilidad real,  $P$ .

Consideraremos como ejemplo el modelo de Black – Scholes, según el cual el precio de un activo con riesgo, será

$$P_t = P_0 \exp\left(\sigma W_t + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

donde interpretamos que,  $\mu$ , es el tanto de rendimiento medio y  $\sigma$  es volatilidad del rendimiento. Por otra parte tenemos el activo sin riesgo que evoluciona,  $\beta_t = \beta_0 e^{rt}$ . A continuación pretendemos encontrar la medida de probabilidad  $Q$ , que determina que para esa probabilidad

$$E_Q\left[\frac{S_t}{\beta_t}\right] = \frac{S_0}{\beta_0}$$

Por otra parte tenemos que según la medida de probabilidad real,  $P$ , se da

$$E_P\left[\frac{S_t}{\beta_t}\right] = \frac{S_0}{\beta_0} E_P\left[\exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)t\right)\right] = \frac{S_0}{\beta_0} \exp((\mu - r)t)$$

De este modo, la medida de probabilidad,  $Q$ , riesgo – neutro ha de cambiar  $\mu$  por  $r$ .  
Para ello, llamando

$$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

tenemos que

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t = r dt + \sigma d\left(W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t\right) = r dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

Según el teorema de Girsanov, existe una probabilidad,  $Q$ , bajo la cual el proceso  $\tilde{W}_t$  es un movimiento Browniano; teniendo en consideración lo anterior, el rendimiento del activo  $S_t$ , será equivalente al de  $\beta_t$ , es decir, el rendimiento libre de riesgo. En definitiva, valorar bajo la medida de probabilidad  $Q$ , será equivalente a valorar con el tipo libre de riesgo, mas una prima de riesgo,  $\pi(t)$ , que recoge el precio de mercado del riesgo inherente al instrumento financiero, es decir, una medida de la aversión al riesgo agregado en el mercado.

En adelante, diremos que se da una situación de ausencia de oportunidad de arbitraje (AOA), si existe una medida de probabilidad,  $Q$ , riesgo – neutro, equivalente a la medida de probabilidad real,  $P$ , en los términos mencionados arriba. Asimismo, diremos que el mercado es completo, si esta medida de probabilidad,  $Q$ , es única.

### **Procesos de Ornstein – Uhlenbeck**

Un proceso estocástico unidimensional  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Ornstein – Uhlenbeck (O–U) si su dinámica es

$$dX_t = [\theta - aX_t]dt + \sigma dW_t$$

siendo  $\theta$ ,  $a$  y  $\sigma$  constantes, con  $a > 0$ .

Una ventaja del proceso O-U es que exhibe reversión a la media, es decir, el componente tendencial es positivo cuando

$$X_t < \frac{\theta}{a},$$

y negativo cuando

$$X_t > \frac{\theta}{a},$$

de manera que el proceso tiende permanentemente hacia su nivel de largo plazo  $\frac{\theta}{a}$ .

Cuanto más lejos se halla el proceso del nivel de largo plazo, mayor es el valor absoluto del componente tendencial, de manera que revierte más rápidamente al nivel de largo plazo. El parámetro  $a$ , determina la velocidad de ajuste hacia el nivel de largo plazo y se denomina velocidad de ajuste o tasa de reversión a la media.

El valor que tome el proceso  $X_t$ , en un instante  $t > 0$ , sigue una distribución normal, cuya esperanza matemática será:

$$E[X_t] = X_0 e^{-at} + \frac{\theta}{a} (1 - e^{-at}),$$

y varianza

$$V[X_t] = \sigma^2 \frac{(1 - e^{-2at})}{2a}.$$

En el largo plazo la varianza tiende a  $V[X_t] = \frac{\sigma^2}{2a}$ .

Por otra parte el proceso O – U anterior se puede considerar el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  de un proceso autorregresivo de orden 1, concretamente del siguiente AR(1):

$$X_t - X_{t-1} = \frac{\theta}{a} (1 - e^{-a}) + (e^{-a} - 1) X_{t-1} + \sigma_t \cdot \varepsilon$$

siendo  $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a})$ .

Así un valor pequeño de la tasa de reversión a la media deviene como veremos en un alto grado de autocorrelación.

### **Procesos de Cox**

Denotemos con  $T_1, T_2, \dots$ , los tiempos de ocurrencia de un evento físico. La sucesión  $\{T_i\}_{i \geq 1}$  será un proceso homogéneo de Poisson con intensidad  $\lambda$ , si los lapsos entre eventos,  $T_{i+1} - T_i$ , son independientes y exponencialmente distribuidos con parámetro  $\lambda$ . Así suponiendo que

$$X_t = \sum_i 1_{\{T_i \leq t\}}$$

es el número de ocurrencias del evento en el intervalo  $[0, t]$ ,  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso homogéneo de Poisson con intensidad  $\lambda$  si los incrementos  $X_t - X_s$  son independientes y cuentan con una distribución Poisson de parámetro  $\lambda(t - s) \quad \forall s < t \geq 0$ :

$$P[X_t - X_s = k] = \frac{1}{k!} \lambda^k (t-s)^k \exp(-\lambda(t-s))$$

Si suponemos que el momento de ocurrencia,  $\tau$ , es el primer salto en un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda$ , entonces  $\tau = T_1$ , se distribuye exponencialmente con parámetro  $\lambda$ , y la probabilidad de ocurrencia será

$$F(T) = P[\tau \leq T] = 1 - e^{-\lambda T}$$

y la intensidad de ocurrencia

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} P[\tau \in (t, t+j] | \tau > t] = \lambda$$

El proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , será un proceso no homogéneo de Poisson con intensidad determinística  $\lambda_t$ , si los incrementos  $X_t - X_s$  son independientes y para  $s < t$  tenemos

$$P[X_t - X_s = k] = \frac{1}{k!} \left( \int_s^t \lambda_u du \right)^k \exp\left(-\int_s^t \lambda_u du\right)$$

siendo ahora la probabilidad de ocurrencia

$$F(T) = P[\tau \leq T] = 1 - \exp\left(-\int_0^T \lambda_u du\right)$$

El proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , es un proceso de Cox si la intensidad,  $\lambda_t$ , es a su vez un proceso estocástico,  $\{\lambda_t\}_{t \geq 0}$ , es decir, el proceso  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , se halla condicionado a las realizaciones de la intensidad  $\lambda_t$ . En este caso la probabilidad condicional de ocurrencia será

$$F(T | (\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}) = P[\tau \leq T | (\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}] = 1 - E\left[\exp\left(-\int_0^T \lambda_u du\right)\right]$$

### **Métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas**

En el apartado sobre resolución de ecuaciones diferenciales se expuso el esquema de discretización de Euler para el caso de una ecuación diferencial ordinaria. Aquí expondremos su aplicación para la implementación numérica de una ecuación diferencial estocástica. Suponemos el siguiente proceso de difusión homogéneo

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

donde,  $\mu(X_t), \sigma(X_t)$  son independientes del tiempo. Adicionalmente conocemos el valor del proceso en el instante  $t$ ,  $X_t$ .

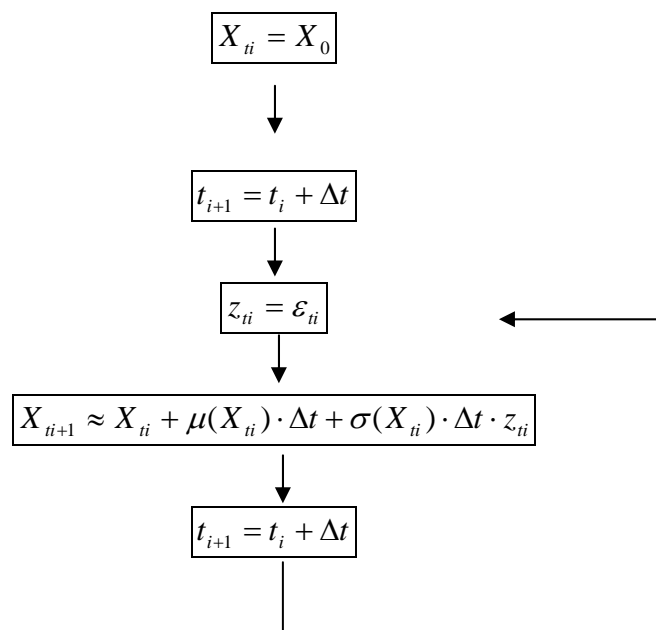
Nuestro objetivo es conocer una realización del proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ . Fijaremos un salto de tiempo  $\Delta t$ , para el cual aplicando el desarrollo que sugiere la fórmula de Ito – Taylor obtenemos:

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \mu(X_t) \cdot \Delta t + \sigma(X_t) \cdot \Delta t \cdot \varepsilon + \sigma(X_t) \cdot \sigma'(X_t) \cdot \Delta t \cdot (\varepsilon^2 - 1)$$

siendo  $\varepsilon$  normales estándar independientes. Si consideramos que  $\Delta t \rightarrow 0$ , podemos despreciar la última parte del desarrollo anterior, con lo que tendríamos

$$X_t = X_{t-1} + \mu(X_t) \cdot \Delta t + \sigma(X_t) \cdot \Delta t \cdot \varepsilon.$$

La expresión anterior proporciona un algoritmo recursivo que si como antes lo representamos como diagrama de flujo:



siendo  $z_{ii}$ , muestras independientes de la normal estándar.

Como hemos podido comprobar en este caso únicamente podemos obtener muestras del proceso estocástico, por lo que para obtener conclusiones sobre el mismo, tendríamos que repetir el procedimiento anterior un número N de veces.

Volviendo al proceso de Ornstein – Uhlenbeck (O – U) expuesto anteriormente

$$dX_t = [\theta - aX_t]dt + \sigma dW_t$$

tenemos que

$$\mu(X_t) = [\theta - aX_t]$$

$$\sigma(X_t) = \sigma$$

Por otra parte cuando consideramos dos procesos de difusión correlados,

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

y

$$dY_t = \mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t)d\tilde{W}_t$$

donde

$$dW_t \cdot d\tilde{W}_t = \rho dt$$

tendremos que tener en cuenta en la discretización esta correlación  $\rho$  entre ambos, como sigue

$$X_t = X_{t-1} + \mu(X_t) \cdot \Delta t + \sigma(X_t) \cdot \Delta t \cdot \varepsilon$$

$$Y_t = Y_{t-1} + \mu(Y_t) \cdot \Delta t + \sigma(Y_t) \cdot \Delta t \cdot \left( \varepsilon \cdot \rho + \tilde{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \right)$$

siendo  $\varepsilon$  y  $\tilde{\varepsilon}$  dos normales estándar independientes.

## SEGUNDA PARTE

### SUBYACENTES AL VALOR RAZONABLE DE LAS PROVISIONES TÉCNICAS DE SEGUROS DE VIDA

#### CAPÍTULO 3

#### LOS TIPOS DE INTERÉS EN EL VALOR RAZONABLE

##### **3.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO**

La finalidad de este capítulo es identificar el tipo de interés a considerar como subyacente del valor razonable de las PTSV, así como proponer un proceso estocástico inherente a este subyacente.

Tras una introducción a los tipos de interés en las PTSV, se procede a una descripción de los distintos modelos sobre la ETTI.

Finalmente en el punto 3.5. abordamos el modelo de Hull – White, que permite tratar de manera aproximada el proceso estocástico correspondiente a los tipos de interés en el futuro. Este modelo nos permitirá la determinación del valor razonable de las PTSV, considerando diversas trayectorias futuras en los tipos de interés.

##### **3.2. INTRODUCCIÓN A LOS TIPOS DE INTERÉS EN LAS PTSV**

Al aplicar la jerarquía del JWS en las PTSV, el método más frecuente es el 3. Una cuestión de gran importancia en la determinación del valor actual es la determinación del tipo de descuento. Según la legislación vigente el tipo de descuento máximo a aplicar en la valoración de las PTSV, se fija cada año según el tipo de la deuda pública a 5 o más años, matizado para evitar volatilidad (si estas se determinan bajo el amparo del artículo 33.1. del ROSSP), o bien, según el rendimiento medio que obtendrá la compañía de la inversión de las PTSV (si se determinan según el artículo 33.2.). No obstante, el tipo de descuento a aplicar en la estimación del valor razonable, debería determinarse en cada momento según los tipos que se negocien en el mercado de capitales.

Se acepta generalmente que el grado de riesgo de impago afecta al tipo de interés exigido al título. Tipos de interés mayores están asociados a un mayor riesgo del propietario del título. Lo anterior sugiere que existe un tipo de interés determinado por el mercado, asociado al riesgo cero. Tal tipo de interés se llama “tipo de interés libre de riesgo”, el cual debe ser usado

en el cálculo del valor actual de flujos de caja con riesgo cero. Para ser técnicamente correctos, el término “tipo libre de riesgo” debe realmente referirse a la curva del tipo spot libre de riesgo, ya que el tipo libre de riesgo depende del tiempo transcurrido antes del pago. En adelante siempre que hagamos referencia al término “tipo libre de riesgo”, se tratará de la estructura temporal de tipos de interés (ETTI) o curva del tipo spot libre de riesgo.

En España, se asume frecuentemente que el tipo libre de riesgo es el correspondiente a la deuda pública. Hay al menos dos razones por las cuales este tipo no es realmente el tipo libre de riesgo:

- La deuda pública no está realmente libre de riesgo porque está denominada en euros. El nivel futuro de inflación presenta un riesgo en la medida en que el poder adquisitivo del título en el futuro es incierto.
- La liquidez no es requerida en un título libre de riesgo con flujos de caja ciertos. La deuda pública es un instrumento muy líquido, por la cual implícitamente se incluye una opción a vender al valor corriente de mercado antes de la fecha de vencimiento. Si esta opción tiene un valor, entonces un título puro libre de riesgo con flujos de caja ciertos tiene un menor valor y un mayor rendimiento que la deuda pública.

En este contexto, el término “libre de riesgo” significa “libre de riesgo de impago” y nominalmente cierto, pero puede retener otros riesgos como la inflación y riesgos de coste de oportunidad. Debido a la dificultad en la determinación práctica del tipo libre de riesgo y debido a la rareza (o inexistencia) de flujos de caja que están verdaderamente libres de riesgo, un valor presente tomado al tipo libre de riesgo es útil más como una línea divisoria que como un resultado final. El valor razonable de cualquier instrumento financiero divergirá del valor presente al tipo libre de riesgo debido a la valoración del mercado de los riesgos implicados en el instrumento.

Por otra parte, el tipo libre de riesgo sigue una estructura temporal, y describir exactamente esta estructura es fundamental para determinar el valor razonable de un instrumento financiero. Antes de proceder a una descripción de los modelos sobre la ETTI, incluiremos una serie de definiciones:

Definimos el tipo de interés libre de riesgo vigente en  $t$ , para el plazo que media hasta  $T$ , por  $R(t, T)$ , de tal forma que

$$P(t, T) = \exp(-(T - t)R(t, T))$$

será el precio en  $t$  del bono libre de riesgo que vence en  $T$ . A partir del precio del bono libre de riesgo,  $P(t, T)$ , podemos asimismo obtener



$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln(P(t, T))$$

Desarrollando la expresión anterior, obtenemos el tipo instantáneo en tiempo  $t$ , como

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t) = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \ln(P(t, t + \Delta t))$$

equivalente a

$$r(t) = -\left[ \frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial t} \right]_{T=t}$$

Por otra parte, el tipo de interés forward observado en  $t$ ,  $F(t, t_1, t_2)$ , para el período comprendido entre  $[t_1, t_2]$ , siendo  $t < t_1 < t_2$ , será

$$F(t, t_1, t_2) = \frac{\ln(P(t, t_1)) - \ln(P(t, t_2))}{t_2 - t_1} = \frac{R(t, t_1)(t_1 - t) - R(t, t_2)(t_2 - t)}{t_2 - t_1}$$

Del mismo modo que para el tipo instantáneo, obtenemos el tipo forward instantáneo, como

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$$

### 3.3. CLASIFICACIÓN DE LOS MODELOS DE LA ETTI

Los modelos de la ETTI son muy utilizados para proporcionar un ajuste del riesgo del tipo de interés, así como para valorar los derivados implícitos en el instrumento financiero. Estos modelos se pueden clasificar siguiendo a Fernández (1997) en estáticos y dinámicos; y dentro de estos últimos en aquellos que no se ajustan a la ETTI actual, y los que sí se ajustan.

#### 3.3.1. Modelos estáticos

Los modelos estáticos a partir de la información existente en el mercado, determinan la ETTI implícita en la negociación. De esta manera, los modelos estáticos no describen una difusión de la ETTI, sino la situación al momento de valoración, ya que la ETTI no surge explícitamente. Como ejemplo de modelos estáticos tenemos los siguientes:

- Modelos de esplines cuadráticos, cúbicos o exponenciales, como por ejemplo el modelo de Vasicek y Fong adaptado al mercado español por Contreras et al (1996).
- Técnicas de bootstrapping a partir de bonos o tipos de interés de las ramas fijas de los Interest Rate Swaps (IRSs).

### 3.3.2. Modelos dinámicos

Si bien la ETTI del momento de valoración es perfectamente conocida, la ETTI transcurrido un tiempo sigue una evolución estocástica. Por este motivo los modelos dinámicos incorporan la evolución de los tipos de interés a lo largo del tiempo. Dentro de los modelos dinámicos, existen varios que no replican la ETTI actual, e incluso que generan ETTIs que no coinciden con las curvas reales del mercado. Esto no tendría sentido de no ser que la finalidad de estos modelos no es simplemente valorar bonos, sino valorar derivados de tipos de interés, o determinar la exposición al riesgo de tipo de interés.

#### 3.3.2.1. Modelos que no se ajustan a la ETTI actual

Estos modelos como se ha mencionado antes, son fáciles de implementar, no obstante al no ser consistentes con la ETTI actual no valoran correctamente bonos. Dentro de éstos cabe distinguir entre modelos de una variable y modelos de dos variables.

##### 3.3.2.1.1. Modelos de una variable

La ETTI se determina a partir de una variable, que generalmente suele ser el tipo a corto, el cual sigue el siguiente proceso estocástico

$$dr(t) = \beta(m - r(t))dt + \sigma r^\gamma dW(t)$$

Se incluye un cuadro con alguno de estos modelos.

Merton (1973)	$dr(t) = mdt + \sigma dW(t)$
Black – Scholes (1973)	$dr(t) = r(t)(\beta dt + \sigma dW(t))$
Cox (1975)	$dr(t) = \beta r(t)dt + \sigma r(t)^\gamma dW(t)$
Vasicek (1977)	$dr(t) = \beta(m - r(t))dt + \sigma dW(t)$
Dothan (1978)	$dr(t) = \sigma r(t)dW(t)$
Brennan y Schwartz (1979)	$dr(t) = \beta(m - r(t))dt + \sigma r(t)dW(t)$
Cox, Ingersoll y Ross (1985)	$dr(t) = \beta(m - r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)}dW(t)$
Constantinides (1992)	$dr(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 r(t) + \alpha_2 \sqrt{r(t)} - \alpha_3)dt + \sigma_0(r(t) - \sigma_1)dW(t)$
Chan et. al (1992)	$dr(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 r(t))dt + \sigma r(t)^\gamma dW(t)$
Duffie y Kan (1996)	$dr(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 r(t))dt + \sqrt{\sigma_0 + \sigma_1 r(t)}dW(t)$

Cuadro 3.1. Modelos de la ETTI dinámicos de una sola variable, que no se ajustan a la ETTI.

Como ventaja resaltar que la mayoría de estos modelos incorporan reversión a la media; y como inconveniente (además de que no replican la ETTI) que en algunos, como el de Vasicek, pueden aparecer tipos de interés negativos.

### 3.3.2.1.2. Modelos de dos variables

La ETTI se determina a partir de dos variables. Por ejemplo:

- Tipo de interés real,  $R(t)$ , y tasa de inflación instantánea esperada,  $\pi(t)$ <sup>36</sup>.
- Tipo de interés a corto,  $r(t)$ , y a largo plazo,  $l(t)$ <sup>37</sup>.
- Tipo de interés a largo plazo,  $l(t)$ , y spread entre tipos a largo y a corto,  $s(t)$ <sup>38</sup>.
- Tipo de interés a corto plazo,  $r(t)$ , y volatilidad de los tipos a corto  $v(t)$ <sup>39</sup>.

Incluimos un cuadro resumen con algunos de éstos modelos.

Richard (1978)	$dR(t) = \beta_R (m_R - R(t))dt + \sigma_R \sqrt{R(t)}dW_R(t)$ $d\pi(t) = \beta_\pi (m_\pi - \pi(t))dt + \sigma_\pi \sqrt{\pi(t)}dW_\phi(t)$
Brennan y Schwartz (1980b), (1982)	$dr(t) = (\alpha_r + m_r(l(t) - r(t)))dt + \sigma_r dW_r(t)$ $dl(t) = (\alpha_l + m_l r(t) + \beta_l l(t))dt + l(t)\sigma_l dW_l(t)$
Boyle (1980)	$dR(t) = \beta_R (m_R - R(t))dt + \sigma_R dW_R(t)$ $d\pi(t) = \beta_\pi (m_\pi - \pi(t))dt + \sigma_\pi dW_\phi(t)$
Langtieg (1980)	$dR(t) = \beta_R (m_R - R(t))dt + \sigma_R dW_R(t) \quad r(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)$
Schaefer y Schwartz (1984)	$ds(t) = \beta_s (m_s - s(t))dt + \sigma_s dW_s(t)$ $dl(t) = \beta(s, l, t)dt + \sigma_l \sqrt{l(t)}dW_l(t)$
Fong y Vasicek (1991), (1992a), (1992b)	$dr(t) = \beta_r (\bar{r} - r(t))dt + \sqrt{v}dW_r(t)$ $dv(t) = \beta_v (\bar{v} - v(t))dt + \varepsilon \sqrt{v}dW_v(t)$
Longstaff y Schwartz (1992)	$dx(t) = (a_x - b_x x(t))dt + c_x \sqrt{x}dW_x(t)$ $dy(t) = (a_y - b_y y(t))dt + c_y \sqrt{y}dW_y(t)$
Duffie y Kan (1996)	$dx_i(t) = (a_i + b_i x_i(t))dt + \sqrt{c_i + d_i x_i}dW_i(t) \quad i = 1, \dots, n$

<sup>36</sup> Richard (1978)

<sup>37</sup> Brennan y Schwartz (1980b y 1982)

<sup>38</sup> Schaefer y Schwartz (1984)

<sup>39</sup> Fong y Vasicek (1991, 1992a y 1992b)

Chen (1996)	$dr(t) = \beta_r(\theta - r(t))dt + \sqrt{v}dW_r(t)$ $d\theta(t) = \beta_\theta(\bar{\theta} - \theta(t))dt + \sigma_\theta\sqrt{\theta}dW_\theta(t)$ $dv(t) = \beta_v(\bar{v} - v(t))dt + \sigma_v\sqrt{v}dW_v(t)$
Chen y Scott (1992)	$r(t) = y_1(t) + y_2(t)$ $dy_i(t) = \beta_i(m_i - y_i(t))dt + \sigma_i\sqrt{y_i}dW_i(t) \quad i = 1,2$

Cuadro 3.2. Modelos de la ETTI dinámicos de varias variables, que no se ajustan a la ETTI.

Al permitir formas más complejas de la ETTI, se acerca más a la actual que los modelos de una variable. Como inconveniente destacar su complejidad respecto de los anteriores modelos, lo que motiva que se deba recurrir para su implementación a métodos numéricos.

### 3.3.2.2. Modelos que se ajustan a la ETTI actual

Podemos distinguir tres familias de modelos dinámicos que se ajustan a la ETTI actual.

La primera familia de modelos que se ajustan a la ETTI actual, son versiones extendidas de los modelos descritos en el apartado 3.3.2.1.1. De las tres familias que expondremos son los primeros en aparecer. En este tipo de modelos una determinada función del tipo instantáneo evoluciona bajo la probabilidad riesgo – neutro según la difusión:

$$df(r) = (\theta(t) - af(r))dt + \sigma dW(t) \quad (3.1)$$

La función  $\theta(t)$  se calibra de manera que el modelo sea consistente con la ETTI inicial. Como ejemplo de estos modelos tenemos:

Hoo - Lee (1986)	$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t)$
Black, Derman y Toy (1990)	$d \ln(r(t)) = \left[ \theta(t) - \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \right] dt + \sigma(t)dW(t)$
Black y Karasinski (1991)	$d \ln(r(t)) = (\theta(t) - a \ln(r(t)))dt + \sigma dW(t)$
Hull - White (1990)	$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t)$

Cuadro 3.3. Modelos de la ETTI dinámicos de una sola variable, que se ajustan a la ETTI.

Dentro de esta familia, tenemos también una serie de modelos de dos factores de riesgo, que replican además la ETVs:

$$df(r) = (\theta(t) - a(t)f(r))dt + \sigma(t)dW(t)$$

Las dos funciones  $a(t)$  y  $\sigma(t)$  son parámetros de volatilidad que en este caso proporcionan dos grados de libertad adicionales. Permiten replicar la ETVs inicial, así como la volatilidad futura del tipo instantáneo. De dos factores es por ejemplo el modelo de Hull – White extendido:

$$dr(t) = (\theta(t) - a(t)r(t))dt + \sigma(t)dW(t)$$

A la segunda familia pertenece el modelo de Heath, Jarrow y Morton (1992) (HJM) que aborda la evolución de los tipos forward instantáneos. Su idea es modelizar la ETTI en su totalidad. Utiliza la ETTI actual como valor inicial de modo que bajo la probabilidad,  $Q$ , riesgo – neutro los tipos forward instantáneos evolucionan según la siguiente EDE:

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t)dW(t).$$

Debiendo especificar una EDE para cada vencimiento  $T$ .

Posteriormente han aparecido los denominados “Market Models”, como el modelo de Brace, et. al. (1997) (BGM) (considera que los tipos LIBOR implícitos son lognormales), o el modelo de Jamshidian (1997) (considera que los tipos swap forward son lognormales) que abordan la evolución de tipos forward no instantáneos. Éstos modelos son en realidad más realistas que los tipo HJM, ya que los tipos forward instantáneos no son observados en la realidad. Como ventajas de esta familia de modelos destaquemos que se puede extender a varios factores de riesgo, permitiendo replicar además de la ETTI actual, cuyos tipos implícitos suelen ser una de las variables explicativas del modelo, replicar también la estructura temporal de volatilidades (ETVs) implícita en la negociación. Como principal inconveniente, decir que debido a la propiedad de no markovianidad, son muy difíciles de implementar mediante métodos numéricos (salvando la simulación de montecarlo).

La última generación de modelos, presenta como ventajas además de poder tomar como variable explicativa los tipos implícitos en la ETTI actual, y replicar también la ETV, que es un modelo markoviano, y como tal puede implementarse numéricamente en forma de árbol recombinante. Este es el caso del Markovian Function Model (Hunt et. al. 2000).

### 3.4. MODELOS AFINES. EL MODELO DE HULL – WHITE

#### 3.4.1. Modelos afines unifactoriales

Dentro de los modelos dinámicos expuestos, existe un grupo conocido por la literatura al respecto como modelos afines. Estos modelos se caracterizan porque el precio de los bonos cupón cero, se puede expresar como

$$P(t, T) = A(\tau)e^{B(\tau)r(t)}, \quad \tau = T - t \quad (3.2.)$$

lo cual cuenta con importantes propiedades. Este tipo de modelos suponen que el precio del bono de descuento,  $P(t,T)$ , depende de un único factor de riesgo que identificamos con el tipo instantáneo,  $r(t)$ , por lo que lo representaremos por  $P(t,T,r(t))$ . Asimismo parten de que la evolución del tipo instantáneo,  $r(t)$ , sigue la siguiente EDE

$$dr(t) = \mu(t,r(t))dt + \sigma(t,r(t))dW(t)$$

donde el coeficiente de deriva,  $\mu(t,r(t))$  y la volatilidad,  $\sigma(t,r(t))$ , vendrán especificados por el correspondiente modelo afín unifactorial. Para modelizar el precio del bono de descuento,  $P(t,T,r(t))$ , se introduce el numerario cuenta bancaria  $\beta(t)$ , definida como

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)$$

para considerar que existe una probabilidad,  $Q$ , riesgo – neutro, según la cual los precios

$$\frac{P(t,T,r(t))}{\beta(t)}$$

son martingala. A partir del desarrollo de Itô – Taylor y una serie de manipulaciones algebraicas llegamos al siguiente problema de valor final

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + (\mu + \sigma\pi(t))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP &= 0 \\ P(T,T) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

donde para el cambio a la medida de probabilidad,  $Q$ , riesgo neutro, se ha introducido

$$\pi(t) = -\frac{\mu_p(t,T) - r(t)}{\sigma_p(t,T)}$$

como una prima asociada al factor de riesgo, e independiente del plazo  $[t,T]$ .

Llegados a este punto, los modelos afines unifactoriales, ofrecen al anterior problema de valor final una solución de la forma 3.2. La forma de las funciones  $A(\tau)$  y  $B(\tau)$  dependerán del modelo afín unifactorial.

En el caso del modelo de Vasicek (1977)

$$dr(t) = \beta(m - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

tenemos que

$$\left. \begin{aligned} A(\tau) &= \frac{1}{\beta}(B(\tau) - \tau)\left(\beta(\beta m - \pi_0\sigma) - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{\sigma^2}{4\beta^3}B(\tau)^2 \\ B(\tau) &= \frac{1}{\beta}(1 - \exp(-\beta\tau)) \end{aligned} \right\}$$

donde  $\pi_0$  es la prima de riesgo del modelo de Vasicek (1977) que es una constante.

O en el modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985)

$$dr(t) = \beta(m - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

se obtiene

$$\left. \begin{aligned} A(\tau) &= \left[ \frac{2\theta \exp((\theta + \psi)\tau/2)}{(\theta + \psi)(\exp(\theta\tau) - 1) + 2\theta} \right]^{2k\theta/\sigma^2} \\ B(\tau) &= \frac{2(\exp(\theta\tau) - 1)}{(\theta + \psi)(\exp(\theta\tau) - 1) + 2\theta} \end{aligned} \right\}$$

donde  $\theta = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2}$ ,  $\psi = \beta + \pi\sigma$ . Este modelo considera que la prima de riesgo depende del nivel de tipos de interés

$$\pi(t, r(t)) = \pi_0 \frac{\sqrt{r(t)}}{\sigma}$$

Por el contrario no son modelos afines, aquellos que consideran para el tipo de interés instantáneo un comportamiento lognormal, como por ejemplo el modelo de Black y Karasinski (1991), o el modelo de Dothan (1978).

### 3.5. MODELO DE HULL – WHITE

#### 3.5.1. Resultados analíticos

El modelo de Hull – White se viene utilizando activamente por un gran número de mesas de mercados de capitales de las entidades financieras, para la valoración y cobertura de derivados sobre tipos de interés.

Nos es útil para proporcionar un ajuste en el valor razonable por el riesgo de tipo de interés, es decir, para incorporar en la valoración la incertidumbre asociada a la evolución futura de los tipos de interés, de manera que se puedan valorar las asimetrías en la valoración de los escenarios futuros probables, y por tanto el incremento en el valor razonable de las PTSV derivado de estas opcionalidades.

Usaremos la versión de un factor, que si bien no ajusta la ETVs, sí que ajusta la ETTI, además de tener reversión a esta ETTI, lo cual será suficiente para exponer la metodología que nos interesa abordar en la determinación del valor razonable de las PTSV. Expondremos los

resultados analíticos del modelo, para posteriormente llevar a cabo la implementación numéricamente mediante un árbol trinomial de tipos de interés. De tal forma que no implementaremos la evolución del tipo instantáneo, sino del tipo continuo a un plazo corto determinado.

El modelo de Hull – White, se conoce también como Vasicek extendido y aporta sobre este entre otras cuestiones, que se puede replicar la ETTI. El modelo de Hull – White de un factor, considera que el proceso riesgo – neutro para el tipo instantáneo tiene la forma

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t)$$

donde  $a$  y  $\sigma$  son constantes, pero la función  $\theta$  depende del tiempo de modo que la ETTI quede perfectamente replicada. No obstante, en su artículo de 1990 Hull y White consideran también  $a$  y  $\sigma$  dependientes del tiempo de modo que también se puede replicar la ETVs.

El modelo de Hull – White pertenece al grupo de los modelos afines, y como tal, proporciona al problema de valor final 3.3 una solución de la forma 3.2.

Si identificamos en este caso,  $\mu(t) = (\theta(t) - ar(t))$ , y hacemos que  $\pi(t) = 0$ , el anterior problema de valor final quedaría

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + (\theta(t) - ar(t)) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP &= 0 \\ P(T, T, r(t)) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Diferenciando en la expresión anterior respecto a  $t$  y a  $r$  en los términos de la solución propuesta, llegamos a:

$$\left[ A' - \theta(t)AB + \frac{1}{2} \sigma^2 AB^2 - (B' - aB + 1)r \right] P = 0$$

siendo,  $A'(\tau)$  y  $B'(\tau)$  las derivadas respecto a  $\tau$ , de sus correspondientes funciones.

Dividiendo por  $P(t, T, r(t))$  y teniendo en cuenta que para todo  $r$  se ha de cumplir la anterior expresión llegamos a

$$\left. \begin{aligned} A' - \theta(t)AB + \frac{1}{2} \sigma^2 AB^2 &= 0 \\ B' - aB + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$



Por otra parte la condición final  $P(T, T, r(t)) = 1$  equivale a decir que  $A(0) = 1$  y  $B(0) = 0$ . Dado que la segunda ecuación no incluye la función  $\theta$ , tenemos la misma solución que para el modelo de Vasicek:

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-a\tau}}{a}$$

Para resolver la primera ecuación a partir de la solución anterior e integrando en el intervalo  $s \in [t, T]$ , obtenemos

$$A(\tau) = \exp \left[ - \int_t^T \theta(s) B(\tau) ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} (B(\tau) - \tau) - \frac{\sigma^2}{4a} B(\tau)^2 \right]$$

En cuanto al proceso  $r(t)$ , lo podemos descomponer como sigue:

$$r(t) = \Omega(t) + s(t)$$

donde el segundo es un proceso similar al del tipo instantáneo pero con reversión a 0

$$\left. \begin{aligned} ds(t) &= -as(t)dt + \sigma dW(t) \\ s(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Su resolución proporciona para el proceso  $s(t)$

$$s(t) \approx N \left( e^{-at}, \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2at}}{2a}} \right)$$

Para que se dé la mencionada equivalencia entre el proceso  $r(t)$  y la suma de los otros dos, una vez obtenida la evolución correspondiente a  $s(t)$ , se ha de cumplir que

$$\left. \begin{aligned} \Omega' + a\Omega &= \theta \\ \Omega(0) &= r(0) \end{aligned} \right\}$$

cuya resolución es inmediata

$$(e^{-at} \Omega)' = e^{-at} \theta$$

por lo que obtenemos

$$\Omega(t) = r(0)e^{-at} + \int_0^t \theta(u)e^{a(t-u)} du$$

De esta forma el proceso para  $r(t)$  será

$$r(t) \approx N \left( \Omega(t), \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2at}}{2a}} \right)$$

La labor del proceso  $\Omega(t)$  es que el proceso  $r(t)$  replique perfectamente la ETTI.

Por otra parte, nos interesa trabajar con el tipo continuo a un plazo  $\Delta t$ ,  $R(t, t + \Delta t)$  en lugar del tipo instantáneo,  $r(t)$ , ya que de esta forma podemos acometer su implementación numérica mediante árboles trinomiales.

### 3.5.2. Implementación mediante árboles trinomiales

Asumiremos que el tipo al plazo  $\Delta t$ ,  $R_t$ , sigue el mismo proceso estocástico descrito para el tipo instantáneo  $r(t)$

$$dR_t = (\theta(t) - aR_t)dt + \sigma dW_t \quad (3.4)$$

siendo por supuesto, los parámetros de volatilidad  $a$  y  $\sigma$ , distintos a los que resultarían para el tipo instantáneo.

Como se expuso en el capítulo 2, el anterior proceso estocástico de Ornstein – Uhlenbeck se puede escribir una vez discretizado como sigue:

$$R_t - R_{t-1} = \frac{\theta(t)}{a}(1 - e^{-a}) + (e^{-a} - 1)R_{t-1} + \varepsilon_t$$

siendo  $\varepsilon_t \approx N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , donde  $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a})$ .

Expondremos el algoritmo para la implementación en árbol, del modelo de un factor de Hull – White.

En primer lugar como ya se ha expuesto para el tipo instantáneo se procede a la descomposición del proceso  $R_t$  en dos procesos claramente diferenciados:

$$R_t = S_t + \Omega(t)$$

donde,  $S_t$ , es un proceso estocástico similar a  $R_t$ , pero con nivel de reversión a 0, y  $\Omega(t)$  es una función determinística dependiente de  $t$ .

La anterior descomposición permite acometer el proceso de implementación en dos pasos. El primer paso se centra en la construcción del proceso  $S_t$ , de manera que quede recogida toda la volatilidad inherente al proceso  $R_t$ . Mientras que en el segundo paso, se adaptan los valores de  $\Omega(t)$ , de modo que se repliquen perfectamente los precios de los bonos  $P(0, t)$ .

### Primer paso

Según la anterior descomposición el proceso  $S_t$  tendrá la siguiente evolución temporal:

$$\left. \begin{aligned} dS_t &= -aS_t dt + \sigma dW'_t \\ S_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

El proceso  $S_t$  es un proceso de Ornstein – Uhlenbeck y como tal exhibe reversión a la media, que en este caso es 0, es decir, el componente tendencial es positivo cuando  $S_t < 0$ , y negativo cuando  $S_t > 0$ .

Para su implementación hemos de discretizar el proceso, considerando un salto temporal  $\Delta t$ , que determina que la anterior dinámica pase a ser como vimos en el capítulo 2, el siguiente proceso AR(1):

$$S_t - S_{t-1} = (e^{-a\Delta t} - 1)S_{t-1} + \varepsilon_t$$

siendo  $\varepsilon_t \approx N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

La aproximación mediante árboles trinomiales consiste en considerar esperanzas y varianzas condicionales de los saltos de  $S_t$  a partir de la anterior expresión de modo que:

$$\left. \begin{aligned} E[S_i - S_{i-1} | S_{i-1}] &= M \cdot S_{i-1} \\ V[S_i - S_{i-1} | S_{i-1}] &= V \end{aligned} \right\} \quad (3.6.)$$

donde  $M = (e^{-a\Delta t} - 1)$  y  $V = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2a\Delta t})}{2a}$ .

Fijémonos que  $M$  y  $V$  son cantidades determinadas a partir de  $a$  y  $\sigma^2$ , siendo cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $M \approx -a \cdot \Delta t$  y  $V \approx \sigma^2 \cdot \Delta t$ .

Si consideramos saltos de tiempo constantes,  $\Delta t$ , e igualmente unos parámetros  $a$  y  $\sigma^2$  constantes, podemos fijar unos valores de  $S_t$ , cuyo valor será múltiplo de un espacio,  $\Delta S$ , por determinar. Para unas cantidades fijas de  $\Delta t$  y  $\Delta S$ , podemos identificar los valores del proceso  $S_i$ , por  $S(i, j) \equiv S(i\Delta t, j\Delta S)$ .

Dado que pretendemos ajustar tres condiciones: media, varianza y probabilidades de transición, hemos de construir árboles con ramificación trinomial.

Un árbol trinomial constituye la representación natural en tiempo discreto de un determinado proceso estocástico, de la siguiente forma

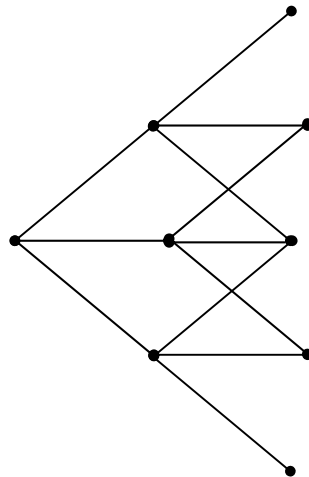


Figura 3.1. Árbol trinomial para un paso temporal  $\Delta t$ .

Cada nodo en el espacio  $(t, s)$ , se denotará por  $(i, j) \equiv (i\Delta t, j\Delta s)$ . A continuación podremos comprobar que el esquema de bifurcación varía:

**a) Configuración central**

El esquema de bifurcación normal a partir del nodo  $(i - 1, j)$  es:

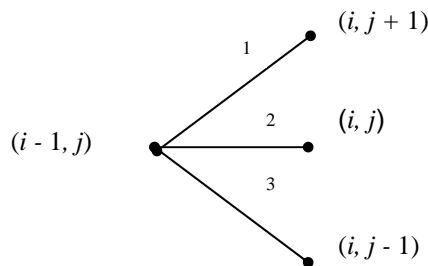


Figura 3.2. Configuración central

En este caso, si para  $(i - 1)\Delta t$  tenemos un valor del proceso  $S(i - 1, j)$ , entonces el valor del proceso en el siguiente salto temporal, puede tomar tres valores:  $S(i, j + 1)$ ,  $S(i, j)$  y  $S(i, j - 1)$ .

Como ya se ha explicado, implementamos el árbol trinomial de manera que tanto la media como la varianza proporcionadas por el árbol, sean idénticas a las que exhibe

localmente  $S_t$ . De ahí que se pueda plantear el siguiente sistema de ecuaciones lineales con incógnitas las probabilidades de transición sobre el árbol,  $p_1(j)$ ,  $p_2(j)$  y  $p_3(j)$ :

$$\left. \begin{aligned} E[\Delta S | S(i-1, j)] &= \Delta S(p_1(j) - p_3(j)) = M \cdot S(i-1, j) = M \cdot j \cdot \Delta S \\ V[\Delta S^2 | S(i-1, j)] &= \Delta S^2(p_1(j) + p_3(j)) = V + (M \cdot S(i-1, j))^2 = V + (M \cdot j \cdot \Delta S)^2 \\ p_1(j) + p_2(j) + p_3(j) &= 1 \end{aligned} \right\} (3.7)$$

siendo

$p_1(j)$ : probabilidad de transición del nodo  $(i-1, j)$  a  $(i, j+1)$ ;

$p_2(j)$ : probabilidad de transición del nodo  $(i-1, j)$  a  $(i, j)$ ;

$p_3(j)$ : probabilidad de transición del nodo  $(i-1, j)$  a  $(i, j-1)$ .

La resolución de (3.7) es:

$$\left. \begin{aligned} p_1(j) &= \frac{w}{2} + \frac{(jM)^2 + jM}{2} \\ p_2(j) &= 1 - w - (jM)^2 \\ p_3(j) &= \frac{w}{2} + \frac{(jM)^2 - jM}{2} \end{aligned} \right\} (3.8)$$

donde se ha introducido la cantidad  $w = V \frac{\Delta t}{\Delta S^2}$ .

Fijado un parámetro de reversión a la media,  $a$ , y un plazo  $\Delta t$ , estas probabilidades dependen de  $w$  y de la altura  $j$  del nodo  $(i, j)$  correspondiente al árbol trinomial. Transcurridos  $n$  saltos temporales ( $i = n$ ) tenemos que la probabilidad de subida será

$$p_{n,1}(j) = p_1(j) - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}w$$

Para que las probabilidades de transición se tornen estacionarias<sup>40</sup>, basta con establecer  $w = \frac{1}{3}$ , de modo que todas ellas serán independientes del corte temporal,  $i$ , dependiendo exclusivamente de la altura  $j$ .

Así a partir de  $V$ , determinamos el valor de  $\Delta S = \sqrt{3V\Delta t}$ . De esta forma:

<sup>40</sup> Independientes del nivel temporal  $i$ .

$$\left. \begin{aligned} p_1(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 + jM}{2} \\ p_2(j) &= \frac{2}{3} - (jM)^2 \\ p_3(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 - jM}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

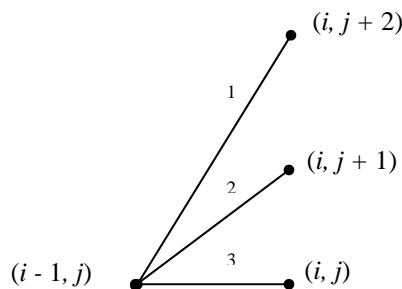
para todos los cortes temporales.

Por otra parte, es necesario que todas las probabilidades de transición se mantengan positivas, no siendo así cuando

$$j < -\frac{\sqrt{2/3}}{|M|}$$

Para evitar que ocurra esto, hemos de plantear configuraciones alternativas de manera que la probabilidad central se mantenga positiva sea cual sea el valor de  $j$ .

### **b) Configuración ascendente**



**Figura 3.3. Configuración ascendente**

En este otro esquema de bifurcación las probabilidades de transición son:

$p_1(j)$ : probabilidad de transición del nodo  $(i-1, j)$  a  $(i, j+2)$ ;

$p_2(j)$ : probabilidad de transición del nodo  $(i-1, j)$  a  $(i, j+1)$ ;

$p_3(j)$ : probabilidad de transición del nodo  $(i-1, j)$  a  $(i, j)$ .

Al igual que hemos hecho en el caso de la configuración central, obtenemos las probabilidades

$$\left. \begin{aligned} p_1(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 - jM}{2} \\ p_2(j) &= -\frac{1}{3} - (jM)^2 + 2jM \\ p_3(j) &= \frac{7}{6} + \frac{(jM)^2 - 3jM}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

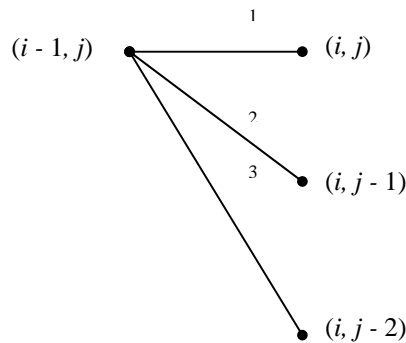
Como en el caso de la configuración central, es la probabilidad  $p_2(j)$  la que cambia de signo según varía el índice  $j$ , siendo  $p_2(j) > 0$  cuando

$$-\frac{1 + \sqrt{2/3}}{|M|} < j < -\frac{1 - \sqrt{2/3}}{|M|}$$

Así los  $j$ 's que permiten la sustitución de la configuración ascendente por la central son

$$-\frac{\sqrt{2/3}}{|M|} < j_{min} < -\frac{1 - \sqrt{2/3}}{|M|}$$

### **c) Configuración descendente**



**Figura 3.4. Configuración descendente**

Aquí las probabilidades de transición son

$p_1(j)$ : probabilidad de transición del nodo  $(i-1, j)$  a  $(i, j)$ ;

$p_2(j)$ : probabilidad de transición del nodo  $(i-1, j)$  a  $(i, j-1)$ ;

$p_3(j)$ : probabilidad de transición del nodo  $(i-1, j)$  a  $(i, j-2)$ .

En este caso

$$\left. \begin{aligned} p_1(j) &= \frac{7}{6} + \frac{(jM)^2 + 3jM}{2} \\ p_2(j) &= -\frac{1}{3} - \frac{(jM)^2 - 2jM}{2} \\ p_3(j) &= \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 + jM}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Siendo  $p_2(j) > 0$  cuando  $\frac{1 - \sqrt{2/3}}{|M|} < j < \frac{1 + \sqrt{2/3}}{|M|}$ . Los  $j$ 's que permiten la sustitución de la configuración descendente por la central son

$$\frac{1 - \sqrt{2/3}}{|M|} < j_{\max} < \frac{\sqrt{2/3}}{|M|}$$

Las probabilidades de transición son simétricas de manera que  $j_{\min} = -j_{\max}$ , siendo  $p_1(j) = p_3(-j)$  y  $p_2(j) = p_2(-j)$ . De esta manera podemos escoger  $j_{\max}$  como el entero más próximo por la derecha del límite inferior del anterior intervalo de  $j$ 's permitidos, tomándose  $j_{\min} = -j_{\max}$ . Para decidir la ramificación adecuada para cada nodo, definimos

$$L = \left[ \frac{0,1835}{|M|} \right],$$

de manera que

$$\left. \begin{aligned} -L \geq j \geq L &\rightarrow \text{central} \\ j > L &\rightarrow \text{descendente} \\ j < -L &\rightarrow \text{ascendente} \end{aligned} \right\}$$

Llegamos de este modo a la siguiente configuración del árbol trinomial:

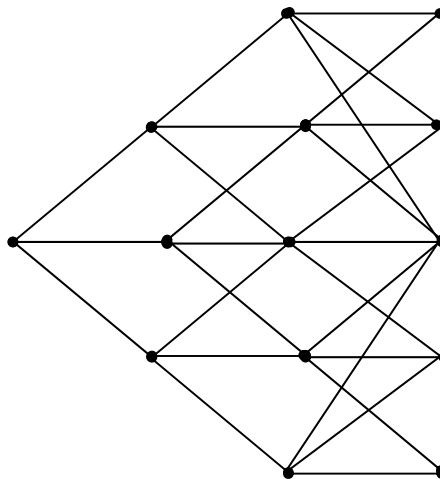


Figura 3.5. Árbol trinomial para un paso temporal  $\Delta t$ .



Para ilustrar el proceso anterior, incluiremos un ejemplo. Si suponemos unos parámetros de Vasicek de  $a = 0,09860$  y  $\sigma = 0,01103$  obtenemos:

J	$p_1(j)$	$p_2(j)$	$p_3(j)$
2	0,902612	0,006984	0,090404
1	0,124127	0,657850	0,218023
0	0,166667	0,666667	0,166667
-1	0,218023	0,657850	0,124127
-2	0,090404	0,006984	0,902612

Cuadro 3.1.: Probabilidades estacionarias de transición en el árbol de la variable  $S_t$

y

J	$S_0$	$S_1$	$S_2$
2			0,036401
1		0,018200	0,018200
0	0	0	0
-1		-0,018200	-0,018200
-2			-0,036401

Cuadro 3.2.: Valores temporales en el árbol de la variable  $S_t$ .

### Segundo paso

El segundo paso en la implementación del modelo consiste en convertir este árbol para  $S_t$  en el correspondiente para  $R_t$ . Puesto que

$$dR_t = (\theta(t) - aR_t)dt + \sigma dW_t$$

y que

$$dS_t = -aS_t dt + \sigma dW_t$$

tenemos que  $\Omega(t)$  es totalmente determinístico:

$$d\Omega(t) = (\theta(t) - a\Omega(t))dt$$

Para recuperar los tipos a plazo en el árbol  $R_{i,j} \equiv R(i\Delta t, j\Delta t)$ , lo único que hay que hacer es determinar en cada período el valor de  $\Omega_i \equiv \Omega(i\Delta t)$ .

### Precios Arrow – Debreu

Introducimos  $Q_{i,j}$  como el valor actualizado de un activo cuyo flujo de caja es 1 en el nodo (i, j) y 0 en cualquier otro caso, es lo que denominamos precios Arrow - Debreu. Tanto los  $\Omega_i$  como los  $Q_{i,j}$  se pueden obtener mediante inducción forward para que la ETTI quede replicada. Éstos precios Arrow – Debreu, nos serán de utilidad además de para construir el árbol trinomial, para determinadas valoraciones que efectuaremos en el apartado de determinación de los recursos propios óptimos.

Supongamos que la curva cupón cero es:

t	P(0, t)
0	1
1	0,977469
2	0,947188
3	0,912773
4	0,875619
5	0,837634

**Cuadro 3.3.: CCC.**

El proceso sería:

1. Inicializar la inducción forward haciendo  $Q_{0,0} = 1$  y puesto que para  $i = 0$ , j toma exclusivamente el valor 0, resulta  $\Omega_0 = R_0$ .

Para nuestro ejemplo,

$$R_0 = \ln \left[ \frac{1}{0,977469} \right] = 2,27884\%$$

2. El siguiente paso es calcular los precios Arrow-Debreu  $Q_{1,1}$ ,  $Q_{1,0}$  y  $Q_{1,-1}$ , que según se ha establecido serán:

$$\left. \begin{aligned} Q_{1,1} &= Q_{0,0} \cdot p_1(0,1) \cdot e^{-R_0} = 0,162912 \\ Q_{1,0} &= Q_{0,0} \cdot p_2(0,0) \cdot e^{-R_0} = 0,651646 \\ Q_{1,-1} &= Q_{0,0} \cdot p_3(0,-1) \cdot e^{-R_0} = 0,162912 \end{aligned} \right\}$$

3. A partir del conjunto completo de precios Arrow - Debreu en un determinado paso de tiempo, i, ya podemos proceder al cálculo de la cantidad  $\Omega_i$ .

Los precios observados en los nodos  $(i, j)$ 's para un bono con vencimiento en  $i + 1$  serán también los factores de descuento aplicables al período  $[i, i + 1]$ , por lo que el precio del bono que vence en el instante  $i = 2$  tiene los precios en cada uno de los nodos  $(1, j)$ 's:

$$\left. \begin{aligned} P_{1,1}(2) &= e^{-(\Omega_1 + \Delta S)} \\ P_{1,0}(2) &= e^{-\Omega_1} \\ P_{1,-1}(2) &= e^{-(\Omega_1 - \Delta S)} \end{aligned} \right\}$$

A partir de la ecuación fundamental de valoración en tiempo y pagos discretos, el precio observado desde el inicio del bono que vence en  $i = 2$  será:

$$P(2) = Q_{1,1}e^{-(\Omega_1 + \Delta S)} + Q_{1,0}e^{-\Omega_1} + Q_{1,-1}e^{-(\Omega_1 - \Delta S)}$$

Por lo que se obtiene

$$\Omega_1 = \log \left( \frac{\sum_j Q_{1,j} e^{-j\Delta S \Delta t}}{P(2)} \right) = 0,031524$$

Quedando determinados

$$\left. \begin{aligned} R_{1,1} &= \Omega_1 + S_1 = 0,049725 \\ R_{1,0} &= \Omega_1 + S_0 = 0,031524 \\ R_{1,-1} &= \Omega_1 + S_{-1} = 0,013324 \end{aligned} \right\}$$

Hemos obtenido un algoritmo recursivo. En cuanto a la generalización de las expresiones anteriores:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i &= \log \left( \frac{\sum_j Q_{i,j} e^{-j\Delta S \Delta t}}{P(i+1)} \right) \\ Q_{i+1,j} &= \sum_{j'} Q_{i,j'} P(j', j) e^{-R_{j'} \Delta t} \end{aligned} \right\}$$

Para nuestro ejemplo obtenemos

J	0	1	2
2			0,01924
1		0,16291	0,20721
0	0	0,65165	0,48979
-1		0,16291	0,21099
-2			0,01995

Cuadro 3.4.: Precios Arrow Debreu.

y

J	0	1	2	3	4
2			7,36119%	7,83677%	8,14159%
1		4,97247%	5,54114%	6,01672%	6,32154%
0	2,27887%	3,15242%	3,72110%	4,19668%	4,50150%
-1		1,33237%	1,90105%	2,37663%	2,68145%
-2			0,08100%	0,55658%	0,86140%

Cuadro 3.5. Tipos R(t).

Gráficamente:

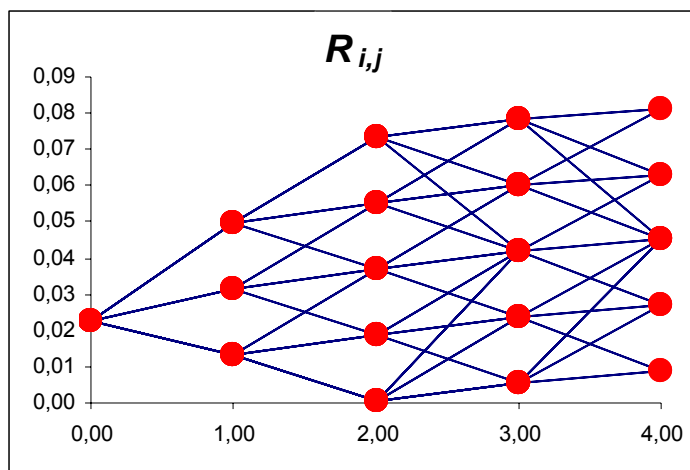


Gráfico 3.1.: Árbol del tipo de interés a corto plazo.

### 3.5.3. Calibración

La calibración del modelo Hull – White consiste en obtener el valor de los parámetros de volatilidad  $\alpha$  y  $\sigma$ , a partir del mercado de derivados. Para que un instrumento financiero sea válido para calibrar, debe ser negociado activamente. En España contamos por ejemplo con el caplet, como instrumento financiero negociado activamente en el mercado de derivados OTC sobre tipos de interés. Los caplets se suelen valorar con el modelo de Black. Según este modelo, el valor actualizado de un caplet con fecha de inicio,  $t$ , del periodo de amortización del tipo interés vigente entre  $t$  y  $T$ , sería

$$C(0,t,T) = L(T-t)e^{-R(0,T)} \left[ F(0,t,T)N(d1) - R_{cap}N(d2) \right]$$

siendo

$L(T-t)$ : cantidad fija sobre la que se estima el caplet, también denominado nocional del caplet,

$F(0, t, T)$ : el tipo forward para el período  $t$  a  $T$  observado en la fecha de valoración,

$$d_{1,2} = \frac{\log(F(0, t, T) / R_{cap}) \pm \sigma^2(t) \cdot t / 2}{\sigma(t)\sqrt{t}}$$

y  $\sigma(t)$  la volatilidad para el caplet con fecha de inicio  $t$ .

Identificamos esta volatilidad con la del proceso de forwards:

$$\sigma_s^2(t) = V(F(s, t, T) | G_{s-1})$$

siendo  $G_{s-1}$  la información disponible hasta el período  $s - 1$ .

Por otra parte obtenemos inmediatamente los tipos forward implícitos a partir de la relación

$$F(0, t, T) = \frac{F(0, T) \cdot T - F(0, t) \cdot t}{T - t}$$

Considerando,  $\phi_t = \log F_t - \log F_{t-1}$ , obtenemos un estimador insesgado de la volatilidad de  $F_t$ ,  $\sigma^2_t$ , utilizando las  $m$  observaciones más recientes como sigue

$$\sigma^2_t = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\phi_{t-i} - \phi)^2$$

donde  $\phi = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \phi_{t-i}$ .

En cuanto a la medida de bondad del ajuste, si disponemos de  $n$  instrumentos calibrantes, podríamos escoger

$$\sum_{i=1}^n \frac{|C_i - M_i|}{C_i}$$

siendo  $C_i$  el precio de mercado del  $i$ -ésimo instrumento y  $M_i$  es el precio proporcionado por el modelo.

Los parámetros para los que el modelo quedaría calibrado, serían aquellos que minimizaran esta distancia

$$\arg \min \left( \sum_{i=1}^n \frac{|C_i - M_i(a, \sigma)|}{C_i} \right) \quad (3.12.)$$

Una aplicación práctica de esta calibración se puede encontrar en Navarro (2003).

Hasta aquí, nos hemos centrado en el proceso estocástico correspondiente a los tipos de interés para la determinación del valor razonable. El paso siguiente será identificar el proceso estocástico correspondiente a la probabilidad de supervivencia del asegurado, durante los períodos de vigencia de la póliza.

# CAPÍTULO 4

## RIESGO TÉCNICO EN EL VALOR RAZONABLE

### 4.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se expone la influencia del riesgo técnico en el valor razonable de las PTSV, y más concretamente el riesgo técnico sistemático de desconocimiento de la prestación esperada.

La metodología propuesta para recoger en la estimación del valor razonable de las PTSV el riesgo técnico sistemático se descompone en dos partes:

- En primer lugar se ajusta la tabla de mortalidad dinámica correspondiente a la población de donde se extrae el colectivo asegurado.
- En segundo lugar se propone un proceso de difusión de la medida de mortalidad inherente a esta tabla de mortalidad dinámica.

Así el apartado 4.2. introduce el riesgo técnico en los Seguros de Vida, para centrarse en el riesgo biométrico. A continuación se presenta el concepto de tablas de mortalidad y de sus diferentes modalidades, para exponer en el apartado que sigue los distintos métodos de ajuste de tablas de mortalidad dinámicas.

En el apartado 4.5. se ajustan las tablas de mortalidad dinámicas para Andalucía, mediante dos métodos de ajuste: el modelo de Heligman y Pollard y el modelo de Lee – Carter. Aunque será este último el escogido por el presente trabajo para ser incorporado a la metodología propuesta, el modelo de Heligman y Pollard servirá de contraste de los resultados obtenidos.

El último apartado propone un proceso de difusión para el tanto de mortalidad, implementándose numéricamente a través de árboles trinomiales recombinantes. La implementación en forma de árbol, permitirá en los capítulos que siguen la construcción de algoritmos para la estimación del valor razonable de las PTSV, rápidos y fácilmente aplicables

## 4.2. INTRODUCCIÓN AL RIESGO TÉCNICO EN LOS SEGUROS DE VIDA

El riesgo técnico puede ser definido como aquel derivado de una inadecuada o insuficiente estimación de las prestaciones futuras de las pólizas. Este riesgo puede ser dividido en dos partes:

1. Riesgo no sistemático o de desviación de la prestación real respecto de la prestación esperada.
2. Riesgo sistemático o de desconocimiento de la prestación esperada.

### Riesgo no sistemático

El riesgo no sistemático puede ser reducido tomando un gran número de prestaciones independientes. Si bien en ocasiones puede ser especialmente difícil de diversificar, no existiendo además en la mayoría de los casos instrumentos financieros que permitan de manera fácil y barata la negociación de tales riesgos.

Supongamos una Póliza de Seguro de Vida por la cual el Asegurado percibirá al vencimiento la siguiente prestación

$$X(n) = \begin{cases} X & \rightarrow \tau > n \\ 0 & \rightarrow \tau \leq n \end{cases}$$

siendo  $\tau$  el tiempo hasta el fallecimiento. Es lo que denominamos en el argot actuarial “capital diferido”. Si la aseguradora tiene  $m$  contratos de estas características tenemos como valor actualizado de la prestación correspondiente a un contrato de esta cartera

$$V(0) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P(0, n) X_i(n)$$

donde  $P(0, n)$  es el precio del bono cupón cero, y  $X_i(n)$  la prestación en  $n$  de la Póliza  $i$  –ésima. Según la ley de los grandes números tenemos que

$$V(0) \Rightarrow \exp\left(-\int_0^n r(t) dt\right) Ep[X(n)] \quad \text{para } m \rightarrow \infty$$

es decir, la frecuencia relativa de las prestaciones tiende a la esperanza matemática de estas prestaciones cuando el número de contratos tiende a infinito. En los Seguros de Vida, la prestación esperada depende de la supervivencia humana o del fallecimiento. Es por ello que para el análisis del riesgo técnico correspondiente a los Seguros de Vida, nos centraremos en el riesgo biométrico.



El riesgo biométrico es aquel asociado al fenómeno de la supervivencia humana, caracterizado por el suceso de que un individuo, perteneciente a un colectivo determinado supere con vida una edad concreta. También se puede caracterizar por el complementario, que sería el suceso de que un individuo perteneciente a un colectivo determinado, fallezca antes de alcanzar una edad concreta.

Denominaremos por  $q_x$ , a la esperanza matemática de fallecer en un año para un individuo de edad  $x$ .

Si consideramos un grupo específico de individuos de edad  $x$  y que representaremos por  $l_x$  (donde  $l_0$  toma un valor  $10^n$ ), la variable aleatoria número de fallecidos en un año  $d_x$ , sigue una distribución binomial ( $d_x \sim B(l_x, q_x)$ ), con esperanza matemática y varianza:

$$\left. \begin{aligned} E(d_x) &= l_x \cdot q_x \\ V(d_x) &= l_x \cdot q_x \cdot (1 - q_x) \end{aligned} \right\}$$

Como explica Betzuen (1989) con antelación a la fijación del precio del Seguro de Vida, es imprescindible analizar el comportamiento de la mortalidad para el colectivo a asegurar. Existen dos posibilidades para definir la mortalidad del colectivo, la primera es establecer la expresión analítica de la distribución de probabilidad sobre la variable tiempo futuro de supervivencia, y la segunda es la construcción de la tabla de mortalidad.

Se incluye un cuadro resumen con la expresión analítica de la ley de mortalidad propuesta por algunos autores. Esta viene expresada en función del tanto instantáneo o fuerza de mortalidad<sup>41</sup>, o de la probabilidad de fallecimiento.

De Moivre (1724)	$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}, 0 < t < \omega - x$
Gompertz (1825)	$\mu_{x+t} = Bc^{x+t}, t > 0$
Makeham (1860)	$\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}, t > 0$
Weibull (1939)	$\mu_{x+t} = k(x+t)^n, k, n, t > 0$
Thiele (1972)	$\mu_x = a_1 \exp(-b_1 x) + a_2 \exp(-\frac{1}{2} b_2 (x - c)^2) + a_3 \exp(b_3 x)$
Perks (1825)	$\mu_x = \frac{A + Bc^x}{Kc^{-x} + 1 + Dc^x}$

<sup>41</sup> Como veremos mas adelante, el tanto instantáneo de mortalidad es la intensidad de fallecimiento del asegurado.

Heligman y Pollard (1980)	$\frac{q_x}{1 - q_x} = \sum_{i=1}^n A_i \exp(-B_i(f_i(x) - C_i)^{D_i})$
---------------------------	---

**Cuadro 4.1. Distribuciones analíticas del tiempo de supervivencia.**

En cuanto a la construcción de tablas de mortalidad nos extenderemos ampliamente en los apartados 4.3 y siguientes.

### Riesgo sistemático

El riesgo sistemático puede ser reducido por la suscripción de un gran número de coberturas de seguro. Aunque los riesgos que tienen distribuciones con alta curtosis<sup>42</sup>, son especialmente difíciles de reducir a través de la diversificación.

El riesgo técnico de desconocimiento de la prestación esperada se agrava en el caso de los seguros de Vida, ya que la duración de los contratos es mucho mayor.

Para reducir este riesgo, se podrían utilizar activos referenciados explícitamente al comportamiento de la cartera asegurada. Este enfoque se ha dado en llamar mercado de “Reaseguro Dinámico” y ya fue propuesto por Sondermann (1991) y Delbaen y Haezendonck (1989), analizado más recientemente por Møller (2004). Algunas aplicaciones en Seguros de Vida pueden encontrarse en Møller (1998) y Steffensen (2001).

Más recientemente se han introducido los llamados “mortality bonds” y “mortality swaps”<sup>43</sup>.

Los “mortality bonds” son en esencia un bono cuyo flujo de caja se halla referenciado al comportamiento de la mortalidad de una determinada cohorte. Tenemos como antecedentes el EIB/BNP Long – term longevity bond, de noviembre 2004, que se trata de un bono de duración 25 años, cuyo flujo de caja se halla indiciado a una población de referencia consistente en una cohorte de hombres de 65 años de Inglaterra y Gales, y cuyo objetivo es cubrir el riesgo de longevidad. También tenemos otro antecedente, el Swiss – Re Short – term catastrophe bond, consistente en un bono de duración 3 años, cuyo flujo de caja se halla referenciado a los fallecimientos debidos a catástrofes, de la cohorte de referencia compuesta por personas de varios países. Cubre los fallecimientos debidos a catástrofes, que suelen ser excluidos de muchos seguros de fallecimiento.

<sup>42</sup> Supone una probabilidad muy pequeña de una pérdida extremadamente grande.

<sup>43</sup> Ver Blake, et. al (2006) para más detalle.

En cuanto a los “mortality swap” supone el intercambio de una corriente fija de pagos a una cartera asegurada, por los que tendrán lugar en realidad según el comportamiento de la cartera asegurada. Tenemos un ejemplo en lo que Schrager (2006) denomina GAOs (Guaranteed Annuity Options) y que toman como subyacente una renta vitalicia, constante a prima única, que se devenga en un tiempo posterior,  $T$ , a la fecha de valoración  $t$ .

Por otra parte, para modelizar el riesgo técnico sistemático, se han desarrollado últimamente varios modelos. Así por ejemplo tenemos el caso del modelo de Lee – Carter<sup>44</sup> que considera para el factor de la medida de mortalidad dependiente del tiempo cronológico un modelo ARIMA(0, 1, 0). Posteriormente ha sido adaptado por Denuit, et. al (2005) para aplicarlo estocásticamente en tiempo continuo. Milevsky y Promislow (2001) aplican el denominado modelo de Gompertz con reversión a la media, mientras que Dahl (2004) aplica un modelo afín de los ya expuestos para el proceso estocástico correspondiente al tanto instantáneo de mortalidad. Biffis y Millosovich (2006) analizan modelos afines con saltos. En cuanto a modelos de la forma HJM (sobre tipos forward) mencionados para los tipos de interés, tenemos el caso del modelo de Smith – Olivier descrito en Olivier y Jeffrey (2004).

Blake, et. al. (2004) aplican modelos de la familia de los “Market Models” para “forward life annuity rates” y “forward Survivor Credit Offer Rates (SCOR)”. El primer caso toma como subyacente unas rentas diferidas a prima única del tipo de las ya mencionadas GAOs, mientras que el segundo es una reminiscencia del  $\tau$ –LIBOR (el London Interbank Offer Rate con duración o tenor  $\tau$ ), así si tenemos que respecto a los tipos de interés el  $\tau$ –LIBOR se define como

$$L = \frac{1 - P(t, t + \tau)}{\tau P(t, t + \tau)}$$

para un forward SCOR tendríamos

$$L = \frac{1 - {}_{\tau}p_{x+t}^Q}{\tau {}_{\tau}p_{x+t}^Q}$$

En nuestro caso una vez construida la tabla de mortalidad para la población andaluza de los años 1980 a 2000 por los modelos de Heligman y Pollard y de Lee – Carter, construiremos en el apartado 4.6. un modelo estocástico afín unifactorial no homogéneo, es decir, que replique la tabla de mortalidad ajustada. Una vez definido el modelo para el tanto instantáneo de mortalidad siguiente,

$$d\mu_x(t) = (\theta(t) - \bar{a}\mu_x(t))dt + \bar{\sigma}dW(t)$$

lo implementaremos numéricamente mediante árboles trinomiales recombinantes. La calibración del modelo debería llevarse a cabo a partir de “mortality bonds” o “mortality swap”,

---

<sup>44</sup> Ver Lee – Carter (1992) y Lee (2000).

de modo que quede recogida adecuadamente la probabilidad,  $Q$ , riesgo neutro. De no ser posible proponemos como hacerlo a partir del ajuste del modelo ARIMA del modelo de Lee – Carter, con lo cual no se habría calibrado a mercado, pero sí consideraría el riesgo sistemático de desconocimiento de la prestación esperada.

### 4.3. INTRODUCCIÓN A LAS TABLAS DE MORTALIDAD

Siguiendo a Palacios (1996) una tabla de mortalidad es una serie temporal en la que se pone de manifiesto la reducción gradual de un grupo inicial de individuos, como consecuencia de los fallecimientos. De esta manera, la tabla refleja los individuos que sobreviven a cada edad.

Las dimensiones temporales que nos interesan desde el punto de vista de una tabla de mortalidad, siguiendo a Felipe y Guillén (1999) son las siguientes:

- Nos referiremos al tiempo cronológico o de calendario como al período en que se realiza la observación demográfica, y lo denotaremos por  $t$ . Por ejemplo, la mortalidad observada en el año 1990 será la correspondiente a  $t = 1990$ .
- El tiempo será una duración si hace referencia al período transcurrido desde el suceso origen hasta un tiempo cronológico determinado. Así la edad o tiempo biológico de 29 años en el año 1990, corresponderá a  $x = 29$ .
- Por último el tiempo en el sentido de línea de vida, será aquella trayectoria de la cual conocemos el suceso origen pero no el suceso final. A las personas que comparten el suceso origen las denominamos cohorte. Así la cohorte de 1975, será  $g = 1975$ .

Estas tres dimensiones temporales se relacionan de la manera siguiente:

$$g + x = t$$

Para profundizar en todo lo anterior ver Felipe y Guillén (1999).

La tabla de mortalidad facilita de manera asombrosa los cálculos de todo tipo de valoraciones actuariales, y mucho más, cuando no existía la potencia en los cálculos que en la actualidad proporcionan los medios computacionales

#### **Tablas estáticas y dinámicas**

La tabla de mortalidad es una abstracción matemática que modeliza la supervivencia de los individuos pertenecientes a un determinado colectivo. El fenómeno de la supervivencia se halla caracterizado porque sus sucesos se refieren a la posibilidad de que un individuo

perteneciente al colectivo alcance y supere una edad concreta, siendo por tanto esta última el eje fundamental de la tabla de mortalidad.

Los postulados recogidos en Vegas (1982) respecto de las tablas de mortalidad son los que siguen:

- Principio de Homogeneidad: según el cual todos los individuos considerados son equivalentes en términos de mortalidad, es decir, la variable edad de muerte es una variable aleatoria idénticamente distribuida.
- Principio de Independencia: las variables edad de muerte de los individuos pertenecientes al colectivo, son además de variables aleatorias idénticamente distribuidas, como se citaba en el Principio anterior, independientes entre sí (a partir de ahora v.a.i.i.d).
- Principio de estacionariedad: la probabilidad de un individuo de sobrevivir a una edad concreta es independiente del tiempo cronológico.

Desde el punto de vista del tiempo cronológico las tablas de mortalidad pueden ser:

- De momento: no tiene en cuenta el tiempo cronológico. La cohorte considerada por la tabla de mortalidad se compone de múltiples generaciones, tratándose todas ellas como si se trataran de una misma generación.
- De generación: sí que considera en su estructura el tiempo cronológico para la determinación del suceso origen nacimiento. De esta manera cada cohorte corresponderá a una generación real.

Por otra parte, en la legislación española se aplican lo que se conoce por tablas de mortalidad de segundo orden. Esto quiere decir que implícitamente incorporan un margen de seguridad en sus probabilidades condicionadas, que será diferente según se trate de un Seguro de Vida – Ahorro<sup>45</sup> o de Vida – Riesgo<sup>46</sup>. La probabilidad de fallecimiento en el primer caso se atenúa, mientras que en el segundo se agrava.

La finalidad de este margen de seguridad es, entre otras, la de hacer frente a desviaciones desfavorables de la siniestralidad real respecto de la esperada. Si pretendemos un acercamiento al valor razonable de las Provisiones Técnicas no es de recibo incorporar este margen, por lo que las tablas vigentes no serían válidas desde nuestro punto de vista.

Entre las tablas de mortalidad vigentes en la actualidad para los Seguros de Vida, y más concretamente para los de Ahorro, tenemos las tablas de momento GRM/F – 95, y las

---

<sup>45</sup> Seguro cuya prestación consiste en un capital pagadero a la supervivencia del Asegurado.

<sup>46</sup> La prestación en este caso, consiste en un capital pagadero al fallecimiento del Asegurado.

tablas generacionales PERM/F – 2000 P (para la nueva producción), y las PERM/F – 2000 C (para los contratos en cartera). De las tablas GRM/F – 95 (de momento y experiencia suiza), ha quedado demostrado (Betzen, 1997), que sobrevaloran la mortalidad española para edades mayores, lo cual, infravaloraría por consiguiente el valor razonable de las PTSV de Seguros de Vida – Ahorro.

Con respecto a los Seguros de Vida – Riesgo contamos con las tablas de momento GKM/F – 95.

Las actuales tablas de mortalidad quedan invalidadas en primer lugar porque están elaboradas para una población genérica, con un comportamiento de mortalidad que no tiene por qué ser similar al de la población objeto de aseguramiento, y en segundo lugar porque incorporan el citado margen de seguridad. Es por ello que incluiremos los mecanismos básicos que permitan la construcción de unas tablas de mortalidad dinámicas, más adecuadas y particularizadas para la población objeto de estudio, por supuesto sin margen de seguridad.

Han sido escogidas las tablas de mortalidad dinámicas, debido a que en la literatura actuarial se ha reconocido últimamente que estas son las más adecuadas. Elaboraremos una tabla de mortalidad dinámica sin margen de seguridad para la población andaluza. La tabla se elaborará sobre la base de la experiencia de mortalidad de los años 1980 a 2000 en Andalucía, a fin de mostrar como se implementarían los resultados obtenidos en la cuantificación del valor razonable de las PTSV.

Antes haremos una exposición de varios modelos que permiten la obtención de tablas de mortalidad dinámicas.

#### 4.4. TABLAS DE MORTALIDAD DINÁMICAS

##### 4.4.1. Clasificación

Los métodos de obtención de tablas dinámicas se pueden clasificar siguiendo a Debón et.al. (2004) en tres grandes grupos:

**1.-Modelos paramétricos:** ajustan a la mortalidad una función dependiente de unos parámetros,  $q_{x,t}$  (ó  $m_{x,t}$ ) =  $f(\alpha_i, x)$  donde  $x$  es la edad (v.a. independiente) y  $\alpha_i$  son los distintos parámetros a estimar. Como puede observarse, estamos ante un problema de regresión, con las ventajas que esta técnica estadística tiene, entre las que destaca la posibilidad de obtener una medida de la bondad del ajuste del modelo y facilitar así la comparación.

Hay que tener en cuenta en esta metodología, que la introducción de más parámetros al modelo dará lugar a una medida de la bondad del ajuste mejor, siendo de vital importancia mantener un equilibrio entre el número final de parámetros escogidos y esta bondad de ajuste, para evitar una sobreparametrización del modelo.

Los modelos paramétricos a su vez pueden ser:

- a) **Modelos estructurales:** consideran que la influencia del tiempo afecta únicamente a los parámetros: establecen un mismo modelo a lo largo de los años calibrado según el tiempo cronológico.
- b) **Modelos no estructurales:** incorporan el tiempo cronológico como variable.

**2.-Modelos no paramétricos:** se combinan las ideas básicas de procesos estocásticos donde el tiempo cronológico es la escala de tiempo, y la edad una covariable del proceso.

**3.-Modelos basados en los factores de reducción:** los cuales una vez modelizadas las medidas de mortalidad, incorporan la evolución de estas según el tiempo cronológico a través de los factores de reducción.

Un procedimiento óptimo para la estimación de tablas de mortalidad dinámicas es, primero utilizar la metodología no paramétrica, con la finalidad de aplicarla como método de smoothing o suavizado de la mortalidad y posteriormente utilizar modelos paramétricos para su estimación final (incluyendo o no factores de reducción).

#### 4.4.2. Modelo de Heligman y Pollard

El modelo de Heligman y Pollard pertenece al grupo de los paramétricos estructurales. En estos métodos la medida de mortalidad  $q_{x,t}$ ,  $m_{x,t}$ , ..., es función de la edad  $x$ , de forma que el modelo se mantiene a lo largo de los años, dependiendo del tiempo cronológico a través del valor de sus parámetros, es decir,  $q_{x,t} = f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ , donde  $\alpha_i$  son los parámetros a estimar. Por lo tanto ajustan el mismo modelo para los distintos años, obteniendo una secuencia de parámetros estimados, para posteriormente analizar la serie cronológica de cada parámetro y ajustarla para obtener estimaciones de los parámetros a futuro.

Las leyes de Heligman y Pollard (1980) se ajustaron inspirándose en Thiele (1972) a la Australia de la posguerra. Su expresión genérica es:

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = \sum_{i=1}^n A_i \exp(-B_i (f_i(x) - C_i)^{D_i})$$

siendo  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ , los parámetros a estimar. Las tres expresiones que realmente se ajustaron son las que siguen:

- Primera ley.

$$q_x = A^{(x+B)^C} + D \exp\left(-E(\ln x - \ln F)^2\right) + \frac{GH^x}{1 - GH^x}$$

- Segunda ley.

$$q_x = A^{(x+B)^C} + D \exp\left(-E(\ln x - \ln F)^2\right) + \frac{GH^x}{1 - KGH^x}$$

- Tercera ley.

$$q_x = A^{(x+B)^C} + D \exp\left(-E(\ln x - \ln F)^2\right) + \frac{GH^{x^K}}{1 - KGH^{x^K}}$$

Como puede observarse en las tres leyes anteriores, la mortalidad en el método de Heligman y Pollard está dividida en tres sumandos, donde cada uno de ellos tiene una interpretación particular:

- Primer sumando, se refiere a la mortalidad infantil (en especial en el primer año de vida), que hace que la función  $q_x$  sea decreciente para valores de  $x$  pequeños.
- Segundo sumando, representa la mortalidad para edades más adultas, donde se muestra una joroba que indica la existencia de una sobremortalidad debida al fallecimiento por accidentes, enfermedades como el SIDA, mortalidad maternal...
- Tercer sumando, refleja el crecimiento de la mortalidad en relación con el aumento de la edad  $x$ .

De las tres leyes anteriores vamos a utilizar la segunda ley en nuestro estudio, ya que al introducir el parámetro  $k$  mejora el ajuste de la primera ley para edades altas (tercer sumando) y su fórmula es menos laboriosa que la de la tercera ley por lo que se facilitarán los cálculos. Los parámetros se estiman para cada uno de los años mediante mínimos cuadrados ponderados no lineales de la forma:

$$\sum_x w_x (q_x - F(x))^2$$

donde  $F(x)$  es la función a ajustar y la inversa de  $w_x$  es proporcional a la varianza de la observación a la edad  $x$ , sirviendo como ponderación de la forma  $\frac{1}{(q_x)^n}$ .

La estimación de los parámetros se realiza mediante métodos iterativos de ajuste para un modelo de regresión no lineal, el método más usual es el de Gauss-Newton. Una vez estimados los valores de los parámetros para cada uno de los años hay que determinar el modelo que siguen, para ello se ajusta una serie temporal a cada parámetro y se obtienen las predicciones para posteriormente obtener la predicción de  $q_x$ . Para el ajuste de las series



temporales utilizamos la metodología de Box-Jenkins, cuyo procedimiento resumido es el siguiente:

1. Se estabiliza la varianza para posteriormente diferenciar la serie (estos dos pasos no son obligatorios, sólo se hacen si fuese necesario).
2. Observando las funciones de autocorrelación simple y de autocorrelación parcial se asignan varios valores a  $p$  y  $q$ .
3. A partir de los valores de  $p$  y  $q$  se proponen varios modelos  $ARIMA(p, d, q)$  que cumplen una serie de hipótesis (normalidad, independencia...).
4. De los modelos propuestos se escogerá aquel modelo que tenga una medida BIC menor.

Con ello conseguimos reducir el número de series temporales a analizar, de 109 series (que son las edades consideradas habitualmente en una tabla de mortalidad), analizamos 9 series.

Si bien algunos autores dudan de la robustez de este modelo (ver v.g. Gage y Mode (1993)), servirá a nuestra causa como contraste de los resultados obtenidos respecto de la población andaluza mediante el modelo de Lee – Carter que veremos a continuación.

#### 4.4.3. Modelo de Lee-Carter

El modelo paramétrico estructural de Lee – Carter (1992), ajusta a la medida de mortalidad la función

$$\ln(q_{xt}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon'_{xt}$$

Este modelo relaciona las tasas de mortalidad por edad con un único factor no observable  $k_t$  que engloba las características generales de la mortalidad en el año  $t$  conocidas como índice de mortalidad. Los parámetros  $a_x$  y  $b_x$  son los parámetros que dependen de la edad, siendo  $b_x$  el factor que captura la dinamicidad del proceso.

En cuanto al ajuste del modelo para que la función tenga solución única los parámetros han de ser normalizados, por lo que en primer lugar normalizamos  $a_x$  resultando

$$\hat{a}_x = \frac{\sum_t \ln q_{xt}}{T}$$

El modelo de Lee – Carter supone que los componentes de la serie vectorial  $q_{x,t}$ , pueden escribirse como una combinación lineal de  $n$  factores comunes más un término error:

$$Q_t = P f_t + \varepsilon_t$$

$$m \times 1 = m \times n \quad n \times 1 \quad m \times 1$$

siendo  $f_t$  un vector n-dimensional de factores comunes. Es por ello que para estimar los valores  $b_x$  y  $k_t$  aplicamos el método del Singular Value Decomposition<sup>47</sup> (SVD) a la matriz  $\ln(q_{xt}) - \hat{a}_x$ .

A partir de los resultados, normalizamos los valores de  $b_x$  y  $k_t$ , de manera que  $\sum b_x = 1$  y  $\sum k_t = 0$ . En función de estos valores normalizados, reestimamos  $k_t$  utilizando la ecuación

$$D_t = \sum_x (N_{xt} \exp(\hat{a}_x + k_t \hat{b}_x))$$

donde  $D_t$  es el número de muertes en el año  $t$  y  $N_{xt}$  la población de edad  $x$  en el año  $t$ . Las estimaciones de  $k_t$  se hallan mediante métodos iterativos.

Posteriormente hay que encontrar un modelo para  $\hat{k}_t$  utilizando Box-Jenkins. En muchas aplicaciones un buen modelo es un  $ARIMA(0,1,0)$  con una constante negativa que refleja el decrecimiento de la mortalidad a través de los años, este modelo es de la forma:

$$k_t = c + k_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde  $c$  es la constante y  $\varepsilon_t$ , es ruido blanco, es decir,  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ .

#### 4.5. APLICACIÓN A LA POBLACIÓN DE LA COMUNIDAD ANDALUZA

Se han aplicado a la Comunidad Andaluza, la segunda ley de Heligman y Pollard destacado por Felipe y Guillén (1999), y el modelo de Lee – Carter destacado por Debón et. al. (2004).

<sup>47</sup> Cualquier matriz  $A_{m \times n}$ , sea singular o no, puede ser descompuesta en un producto de tres matrices, de la forma  $A = U D V'$ , donde  $U_{m \times m}$  y  $V_{n \times n}$  son matrices ortogonales (por lo que sus inversas son iguales a sus transpuestas), y  $D$  es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los valores singulares de  $A$  (son las raíces cuadradas positivas de los valores propios de  $A'A$ ). Las columnas de  $U$  son los vectores singulares por la izquierda de  $A$  y las columnas de  $V$  son los vectores singulares de  $A$  por la derecha.

### **Modelo de Heligman y Pollard**

Como ya se ha explicado antes, la segunda Ley de Heligman y Pollard es la que sigue:

$$q_x = A^{(x+B)^C} + D \exp(-E(\ln x - \ln F)^2) + \frac{GH^x}{1 - KGH^x}$$

Siendo este el primer modelo que se ha ajustado a la mortalidad de la población andaluza para los años 1980 – 2000. No se han considerado menores de 15 años, por ser esta la edad mínima para ser asegurado, ni los mayores de 84 años por la escasez de datos para estas edades. Al desestimar los menores de 15 años hemos de obviar el primer sumando, con lo cual la función que se ha ajustado es la que sigue:

$$q_x = D \exp(-E(\ln x - \ln F)^2) + \frac{GH^x}{1 - KGH^x}$$

Recurrimos al algoritmo recursivo de Gauss – Newton, para obtener los estimadores de cada uno de los años para hombres que siguen:

<b>AÑO</b>	<b>D</b> <b>(10<sup>3</sup>)</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b> <b>(10<sup>5</sup>)</b>	<b>H</b>	<b>K</b>
1980	0,532	4,969	20,913	3,716	1,107	1,408
1981	0,552	9,400	20,645	4,926	1,102	0,817
1982	0,549	7,441	20,964	3,874	1,106	1,355
1983	0,552	6,214	21,480	3,327	1,108	1,488
1984	0,623	10,304	20,464	4,510	1,103	1,018
1985	0,768	10,291	21,294	4,127	1,104	1,155
1986	0,657	7,490	21,628	4,127	1,104	1,063
1987	0,816	6,889	22,595	4,207	1,103	1,070
1988	0,862	6,413	22,064	4,508	1,102	0,791
1989	1,055	5,613	23,496	3,960	1,104	0,992
1990	1,016	6,075	23,947	4,662	1,100	0,550
1991	1,189	4,916	25,783	3,145	1,108	2,230
1992	1,183	5,983	25,461	3,634	1,105	1,972
1993	1,226	5,034	27,900	2,502	1,111	2,469
1994	1,064	3,059	30,741	2,622	1,109	2,169
1995	1,337	3,389	32,117	1,777	1,116	2,837
1996	1,362	1,958	37,213	1,390	1,119	1,979
1997	0,831	0,945	36,889	2,539	1,109	2,466
1998	1,836	0,494	97,752	0,938	1,125	2,369
1999	0,812	2,165	33,115	2,182	1,111	1,453
2000	0,914	0,645	51,648	1,704	1,114	1,375

**Cuadro 4.1: Estimaciones de los parámetros para la segunda ley de Heligman y Pollard, en la población andaluza. Hombres.**

Para las mujeres tendríamos los siguientes estimadores

AÑO	D (10 <sup>3</sup> )	E	F	G (10 <sup>5</sup> )	H	K
1980	0,468	1,403	39,696	0,477	1,130	1,542
1981	0,441	1,062	42,886	0,403	1,132	1,448
1982	0,329	0,665	41,997	0,450	1,130	1,456
1983	0,391	0,677	41,712	0,367	1,133	1,378
1984	0,384	0,705	46,604	0,374	1,132	1,281
1985	0,326	1,126	33,683	0,369	1,132	1,121
1986	0,364	0,359	37,792	0,352	1,132	1,070
1987	0,426	0,428	50,156	0,383	1,131	1,063
1988	0,421	0,816	42,598	0,367	1,131	0,943
1989	0,326	0,696	34,064	0,361	1,131	0,967
1990	0,517	1,214	43,072	0,311	1,132	0,931
1991	0,448	1,416	36,249	0,282	1,135	1,879
1992	0,383	1,386	31,241	0,309	1,132	1,842
1993	0,488	1,956	37,746	0,236	1,137	1,896
1994	0,485	2,512	38,224	0,299	1,132	1,444
1995	0,523	3,160	37,918	0,305	1,131	1,062
1996	0,506	2,588	35,494	0,293	1,131	0,433
1997	0,433	1,602	38,535	0,322	1,131	1,669
1998	0,317	1,504	36,137	0,284	1,132	0,308
1999	0,432	4,203	38,990	0,282	1,131	0,267
2000	0,449	4,238	39,789	0,274	1,131	0,389

Cuadro 4.2: Estimaciones de los parámetros suavizados para la segunda ley de Heligman y Pollard, en la población andaluza. Mujeres.

En cuanto a la bondad del ajuste se ha realizado la prueba del  $R^2$ , dando lugar a la siguiente tabla en la que también se ha incluido el error porcentual absoluto medio (MAPE). Los resultados para los hombres son los que siguen:

AÑO	$R^2$ (ajust.por g.l)	MAPE
1980	97,4953	13,2697
1981	97,5599	13,8574
1982	98,1975	9,7281
1983	98,0399	9,7679
1984	97,6367	15,0695
1985	98,6369	7,4377
1986	98,3238	8,2580
1987	98,3847	9,8707
1988	98,6398	10,6560
1989	97,5098	12,7547
1990	98,7028	8,3379
1991	98,4008	9,3502
1992	98,1446	8,0444
1993	98,2175	11,7508
1994	97,7508	17,6117
1995	97,2680	19,0985
1996	97,5964	13,3020
1997	97,7461	12,6947
1998	97,7243	16,2469
1999	98,0249	14,3792
2000	98,5396	10,6892

Cuadro 4.3: Bondad del ajuste y contraste MAPE del modelo de Heligman y Pollard, en la población andaluza. Hombres.

Para las mujeres:

<b>AÑO</b>	<b>R<sup>2</sup> (ajust.por g.l)</b>	<b>MAPE</b>
1980	99,3100	20,3360
1981	99,0695	14,2580
1982	99,2700	23,4768
1983	99,3428	20,7534
1984	99,0065	29,8215
1985	99,2683	17,2497
1986	99,3741	21,1380
1987	99,3400	20,2430
1988	99,3800	17,8300
1989	99,4355	18,1699
1990	99,2635	21,2715
1991	98,8019	21,2208
1992	98,5520	17,5375
1993	98,8108	18,3708
1994	98,7564	23,8974
1995	99,0664	20,4689
1996	99,0634	22,9069
1997	98,8692	21,7589
1998	98,9643	30,4115
1999	99,0402	34,5878
2000	98,9210	37,6049

**Cuadro 4.4: Bondad del ajuste y contraste MAPE del modelo de Heligman y Pollard, en la población andaluza. Mujeres**

No obstante si tenemos en cuenta la dispersión que provoca la mortalidad de los últimos años de la serie, hemos de suavizar los estimadores con la finalidad de obtener una serie temporal más adecuada, obteniendo la siguiente estimación:

<b>AÑO</b>	<b>D</b> <b>(10<sup>3</sup>)</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b> <b>(10<sup>5</sup>)</b>	<b>H</b>	<b>K</b>
1980	0,544	7,270	20,841	4,172	1,105	1,193
1981	0,546	7,006	21,001	3,961	1,106	1,267
1982	0,562	7,665	20,893	4,071	1,105	1,217
1983	0,609	8,730	20,970	4,153	1,104	1,167
1984	0,630	8,348	21,166	3,993	1,105	1,216
1985	0,683	8,238	21,492	4,060	1,104	1,159
1986	0,745	8,277	21,609	4,296	1,103	1,020
1987	0,832	7,339	22,216	4,186	1,103	1,014
1988	0,881	6,496	22,746	4,293	1,102	0,893
1989	0,988	5,981	23,577	4,096	1,103	1,126
1990	1,061	5,800	24,150	3,982	1,104	1,307
1991	1,134	5,524	25,317	3,580	1,105	1,642
1992	1,136	5,013	26,766	3,313	1,107	1,878
1993	1,200	4,476	28,400	2,736	1,110	2,335
1994	1,235	3,885	30,686	2,385	1,112	2,285
1995	1,164	2,877	32,972	2,166	1,113	2,384
1996	1,286	1,969	35,741	1,853	1,116	2,364
1997	1,236	1,790	36,216	1,765	1,116	2,221
1998	1,151	1,242	40,122	1,750	1,115	1,928
1999	1,098	1,063	40,849	1,840	1,115	1,916
2000	1,187	1,102	42,169	1,608	1,117	1,732

**Cuadro 4.5: Estimaciones de los parámetros suavizados para la segunda ley de Heligman y Pollard, en la población andaluza. Hombres.**

Con respecto a las mujeres los estimadores suavizados son:

<b>AÑO</b>	<b>D</b> <b>(10<sup>3</sup>)</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b> <b>(10<sup>5</sup>)</b>	<b>H</b>	<b>K</b>
1980	0,413	1,043	41,527	0,443	1,131	1,495
1981	0,407	0,952	41,573	0,424	1,131	1,482
1982	0,403	0,902	42,579	0,414	1,131	1,427
1983	0,374	0,847	40,625	0,392	1,132	1,371
1984	0,359	0,706	42,119	0,382	1,132	1,260
1985	0,378	0,659	42,077	0,369	1,132	1,157
1986	0,384	0,687	40,944	0,369	1,132	1,085
1987	0,373	0,685	41,138	0,366	1,132	1,026
1988	0,411	0,703	39,659	0,355	1,132	0,991
1989	0,428	0,914	39,310	0,341	1,132	1,157
1990	0,419	1,106	39,304	0,326	1,133	1,312
1991	0,433	1,334	37,599	0,300	1,133	1,503
1992	0,464	1,697	36,931	0,288	1,133	1,599
1993	0,466	2,086	37,135	0,286	1,133	1,625
1994	0,477	2,320	36,487	0,288	1,133	1,336
1995	0,487	2,363	36,471	0,291	1,132	1,301
1996	0,453	2,273	37,578	0,300	1,132	0,983
1997	0,442	2,611	37,870	0,297	1,131	0,804
1998	0,427	2,827	37,789	0,291	1,131	0,748
1999	0,408	2,887	38,363	0,290	1,131	0,613
2000	0,399	3,315	38,305	0,280	1,131	0,658

**Cuadro 4.6: Estimaciones de los parámetros suavizados para la segunda ley de Heligman y Pollard, en la población andaluza. Mujeres.**

En este caso los valores de  $R^2$  y del MAPE son los siguientes para hombres y mujeres respectivamente:

<b>AÑO</b>	<b>R<sup>2</sup> (ajust.por g.I)</b>	<b>MAPE</b>
1980	99,4650	11,9676
1981	99,1649	10,0450
1982	99,6502	14,5520
1983	99,6336	13,1744
1984	99,1295	14,6210
1985	99,4606	12,8667
1986	99,6976	13,7159
1987	99,6388	13,1342
1988	99,5935	11,9609
1989	99,5661	12,1512
1990	99,3754	13,7709
1991	99,4973	14,3586
1992	99,3969	15,3115
1993	99,3444	12,4838
1994	99,4023	14,5336
1995	99,2900	13,3893
1996	99,3590	14,2004
1997	99,5803	15,9666
1998	99,4303	20,1361
1999	99,4825	20,3658
2000	99,3280	17,6469

**Cuadro 4.7: Bondad del ajuste y contraste MAPE del modelo de Heligman y Pollard suavizado, en la población andaluza . Hombres**

<b>AÑO</b>	<b>R<sup>2</sup> (ajust.por g.I)</b>	<b>MAPE</b>
1980	99,4650	11,9676
1981	99,1649	10,0450
1982	99,6502	14,5520
1983	99,6336	13,1744
1984	99,1295	14,6210
1985	99,4606	12,8667
1986	99,6976	13,7159
1987	99,6388	13,1342
1988	99,5935	11,9609
1989	99,5661	12,1512
1990	99,3754	13,7709
1991	99,4973	14,3586
1992	99,3969	15,3115
1993	99,3444	12,4838
1994	99,4023	14,5336
1995	99,2900	13,3893
1996	99,3590	14,2004
1997	99,5803	15,9666
1998	99,4303	20,1361
1999	99,4825	20,3658
2000	99,3280	17,6469

**Cuadro 4.8: Bondad del ajuste y contraste MAPE del modelo de Heligman y Pollard suavizado, en la población andaluza . Mujeres**

Posteriormente al igual que Felipe y Guillén (1999) aplicamos el método de series temporales propuesto por Box y Jenkins (1976) sobre las estimaciones de los parámetros anteriores, para obtener modelos ARIMA suficientemente válidos.

Los modelos elegidos son los que siguen para los hombres:

	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>K</b>
<b>Modelo</b>	ARIMA(0,1,0)	ARIMA(0,1,1)	ARIMA(1,2,0)	ARIMA(0,1,2)	ARIMA(1,1,0)	ARIMA(0,1,2)
<b>Constante</b>	X					
<b>Trans.</b>	X		X		X	X

**Cuadro 4.9: Modelo ARIMA aplicado en los parámetros suavizados para la predicción. Hombres.**

Mientras que para las mujeres son:

	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>K</b>
<b>Modelo</b>	ARIMA(0,1,1)	ARIMA(1,1,0)	ARIMA(5,1,0)	ARIMA(0,1,0)	ARIMA(0,1,0)	ARIMA(0,1,0)
<b>Constante</b>				X	X	
<b>Trans.</b>	X	X	X		X	X

**Cuadro 4.10: Modelo ARIMA aplicado en los parámetros suavizados para la predicción. Mujeres.**

A partir de estos modelos ARIMA, los valores de los parámetros predichos desde 2001 a 2020 para los hombres son los siguientes:

AÑO	D (10 <sup>3</sup> )	E	F	G (10 <sup>5</sup> )	H	K
2001	1,216	0,848	40,124	1,547	1,117	1,769
2002	1,244	0,848	38,468	1,451	1,117	1,769
2003	1,272	0,848	36,862	1,451	1,117	1,769
2004	1,300	0,848	35,512	1,451	1,117	1,769
2005	1,327	0,848	34,264	1,451	1,117	1,769
2006	1,355	0,848	33,158	1,451	1,117	1,769
2007	1,382	0,848	32,143	1,451	1,117	1,769
2008	1,409	0,848	31,220	1,451	1,117	1,769
2009	1,436	0,848	30,370	1,451	1,117	1,769
2010	1,463	0,848	29,588	1,451	1,117	1,769
2011	1,489	0,848	28,862	1,451	1,117	1,769
2012	1,516	0,848	28,187	1,451	1,117	1,769
2013	1,542	0,848	27,558	1,451	1,117	1,769
2014	1,568	0,848	26,968	1,451	1,117	1,769
2015	1,594	0,848	26,416	1,451	1,117	1,769
2016	1,619	0,848	25,895	1,451	1,117	1,769
2017	1,645	0,848	25,405	1,451	1,117	1,769
2018	1,671	0,848	24,941	1,451	1,117	1,769
2019	1,696	0,848	24,502	1,451	1,117	1,769
2020	1,721	0,848	24,085	1,451	1,117	1,769

**Cuadro 4.11: Predicciones de los parámetros para la segunda ley de Heligman y Pollard, en la población andaluza. Hombres**

Con respecto a las mujeres quedaría:

AÑO	D (10 <sup>3</sup> )	E	F	G (10 <sup>5</sup> )	H	K
2001	0,397	3,564	38,187	0,270	1,131	0,702
2002	0,397	3,564	38,265	0,262	1,131	0,719
2003	0,397	3,564	38,265	0,253	1,131	0,719
2004	0,397	3,564	38,265	0,245	1,131	0,719
2005	0,397	3,564	38,265	0,237	1,131	0,719
2006	0,397	3,564	38,265	0,228	1,131	0,719
2007	0,397	3,564	38,265	0,220	1,131	0,719
2008	0,397	3,564	38,265	0,211	1,131	0,719
2009	0,397	3,564	38,265	0,203	1,131	0,719
2010	0,397	3,564	38,265	0,195	1,131	0,719
2011	0,397	3,564	38,265	0,186	1,131	0,719
2012	0,397	3,564	38,265	0,178	1,131	0,719
2013	0,397	3,564	38,265	0,169	1,131	0,719
2014	0,397	3,564	38,265	0,161	1,131	0,719
2015	0,397	3,564	38,265	0,152	1,131	0,719
2016	0,397	3,564	38,265	0,144	1,131	0,719
2017	0,397	3,564	38,265	0,136	1,131	0,719
2018	0,397	3,564	38,265	0,127	1,131	0,719
2019	0,397	3,564	38,265	0,119	1,131	0,719
2020	0,397	3,564	38,265	0,110	1,131	0,719

**Cuadro 4.12: Predicciones de los parámetros para la segunda ley de Heligman y Pollard, en la población andaluza. Mujeres.**

### **Modelo de Lee – Carter**

También se ha ajustado el modelo de Lee – Carter (1992) a la población andaluza para el mismo período, con la finalidad de contrastar ambos resultados. Recordemos que el modelo de Lee – Carter ajusta la siguiente función:



$$\ln(q_{x,y}) = a_x + b_x k_y + \varepsilon'_{x,y}$$

No obstante, como ya se ha hecho referencia, para que el modelo tenga solución única, los parámetros han de normalizados. Para ello en primer lugar normalizamos el valor de  $a_x$  resultando

$$\hat{a}_x = \frac{\sum_y \ln(q_{x,y})}{T}$$

Los resultados obtenidos para hombres y mujeres  $\hat{a}_x$  son los que siguen

<i>Edad</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>	<i>Edad</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>
15	-7,808	-8,357	51	-5,109	-6,000
16	-7,508	-8,405	52	-5,014	-5,905
17	-7,380	-8,301	53	-4,884	-5,818
18	-7,171	-8,166	54	-4,794	-5,753
19	-7,072	-8,170	55	-4,711	-5,615
20	-7,046	-8,108	56	-4,605	-5,541
21	-6,917	-8,182	57	-4,523	-5,484
22	-6,883	-8,058	58	-4,429	-5,360
23	-6,832	-8,181	59	-4,316	-5,240
24	-6,857	-7,980	60	-4,246	-5,175
25	-6,781	-8,036	61	-4,162	-5,055
26	-6,723	-7,965	62	-4,085	-4,949
27	-6,680	-7,874	63	-3,964	-4,859
28	-6,670	-7,824	64	-3,902	-4,748
29	-6,549	-7,741	65	-3,776	-4,629
30	-6,567	-7,661	66	-3,709	-4,526
31	-6,501	-7,556	67	-3,616	-4,439
32	-6,463	-7,480	68	-3,527	-4,306
33	-6,467	-7,456	69	-3,422	-4,170
34	-6,487	-7,425	70	-3,316	-4,050
35	-6,362	-7,260	71	-3,246	-3,915
36	-6,336	-7,216	72	-3,123	-3,783
37	-6,281	-7,203	73	-3,029	-3,672
38	-6,232	-7,100	74	-2,930	-3,529
39	-6,153	-7,015	75	-2,844	-3,408
40	-6,080	-6,933	76	-2,723	-3,271
41	-6,030	-6,928	77	-2,623	-3,135
42	-5,916	-6,757	78	-2,535	-2,982
43	-5,827	-6,694	79	-2,436	-2,856
44	-5,784	-6,619	80	-2,314	-2,707
45	-5,647	-6,534	81	-2,236	-2,594
46	-5,565	-6,466	82	-2,128	-2,465
47	-5,472	-6,338	83	-2,040	-2,351
48	-5,396	-6,260	84	-1,962	-2,225
49	-5,302	-6,185	>=85	-1,664	-1,765
50	-5,171	-6,067			

Cuadro 4.13: Valores de  $a_x$  normalizados para el modelo de Lee - Carter.

A continuación estimamos los valores  $b_x$  y  $k_y$  a través del Singular Value Decomposition (SVD), aplicado a la matriz  $\ln(q_{x,y}) - \hat{a}_x$ . No obstante y dado que para que el

modelo tenga solución única los parámetros  $b_x$  y  $k_y$  han de ser normalizados de manera que

$\sum b_x = 1$  y  $\sum k_y = 0$ . Obteniendo:

<i>Edad</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>	<i>Edad</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>
15	0,296	0,006	51	0,296	0,010
16	0,268	0,015	52	0,230	0,019
17	0,003	0,035	53	0,246	0,015
18	0,009	0,024	54	0,222	0,017
19	0,243	0,024	55	0,184	0,014
20	-0,045	0,022	56	0,113	0,014
21	-0,044	0,039	57	0,237	0,017
22	-0,034	0,023	58	0,138	0,016
23	-0,173	0,030	59	0,211	0,019
24	-0,161	0,014	60	0,252	0,019
25	-0,393	0,008	61	0,166	0,020
26	-0,417	0,003	62	0,200	0,023
27	-0,567	0,007	63	0,231	0,018
28	-0,841	0,024	64	0,203	0,017
29	-0,804	-0,001	65	0,207	0,019
30	-1,021	0,001	66	0,203	0,019
31	-0,733	0,007	67	0,205	0,017
32	-0,982	0,008	68	0,176	0,018
33	-0,882	0,002	69	0,222	0,016
34	-0,928	0,008	70	0,284	0,018
35	-0,690	0,007	71	0,241	0,017
36	-0,397	-0,003	72	0,320	0,017
37	-0,313	0,019	73	0,274	0,016
38	-0,099	0,007	74	0,273	0,016
39	-0,098	0,010	75	0,294	0,016
40	0,067	0,005	76	0,322	0,016
41	0,014	0,005	77	0,311	0,015
42	0,228	0,014	78	0,257	0,013
43	0,130	0,007	79	0,259	0,012
44	0,178	0,012	80	0,238	0,012
45	0,059	0,006	81	0,246	0,013
46	0,170	0,009	82	0,219	0,011
47	0,207	0,006	83	0,126	0,012
48	0,179	0,012	84	0,241	0,011
49	0,230	0,017	>=85	0,303	0,007
50	0,192	0,018			

**Cuadro 4.14: Valores de  $b_x$  normalizados para el modelo de Lee - Carter. Hombres y Mujeres**

A continuación en lugar de considerar los resultados para  $k_y$  obtenidos del SVD, reestimamos  $k_y$  utilizando la ecuación

$$D_y = \sum_x N_{x,y} \exp(\hat{a}_x + k_y \hat{b}_x)$$

Dando lugar a los siguientes resultados de  $k_y$

<i>Año</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>	<i>Año</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>
1980	0,50232	14,34867	1991	-0,01636	-3,54663
1981	0,56774	13,04597	1992	-0,22811	-8,14748
1982	0,38986	10,36936	1993	-0,21629	-5,84921
1983	0,35433	11,10903	1994	-0,37338	-9,23175
1984	0,34472	7,51604	1995	-0,29052	-9,57255
1985	0,39376	7,93592	1996	-0,25542	-6,68203
1986	0,25294	6,48588	1997	-0,48048	-9,19282
1987	0,17589	5,07784	1998	-0,28585	-7,66584
1988	0,18265	4,63239	1999	-0,39324	-9,27095
1989	0,15554	2,37694	2000	-0,62463	-11,60429
1990	0,13115	0,45904			

**Cuadro 4.15: Valores de  $k_t$ , reestimados. Hombres y Mujeres**

De esta manera ya tenemos ajustados los parámetros, y sólo resta comprobar la bondad del ajuste así como el análisis de los errores, antes de aplicar Box - Jenkins. Para ello hemos realizado la prueba  $R^2$ , así como la del error porcentual absoluto medio (MAPE), dando lugar a los siguientes resultados para los hombres:

<i>AÑO</i>	<i>R<sup>2</sup> (ajust.por g.l)</i>	<i>MAPE</i>
1980	99,6666	8,0683
1981	99,7993	9,1663
1982	99,8038	7,1021
1983	99,8477	7,7512
1984	99,8563	7,1082
1985	99,8928	6,2736
1986	99,9014	6,6653
1987	99,8028	8,0298
1988	99,7847	7,7607
1989	99,7098	11,2975
1990	99,7038	10,3163
1991	99,4941	9,6591
1992	99,4947	8,2150
1993	99,6956	7,6027
1994	99,6564	8,0336
1995	99,6713	9,1550
1996	99,3732	9,2745
1997	99,5457	12,7844
1998	99,4818	14,4403
1999	99,2777	16,0761
2000	99,2666	24,2985

**Cuadro 4.16: Bondad del ajuste y contraste MAPE del modelo de Lee - Carter, en la población andaluza. Hombres.**

Para las mujeres:

<b>AÑO</b>	<b>R<sup>2</sup> (ajust.por g.l)</b>	<b>MAPE</b>
1980	99,6495	12,8143
1981	99,8023	10,8058
1982	99,9091	13,6786
1983	99,9218	10,4448
1984	99,7383	11,8450
1985	99,8112	13,4746
1986	99,8638	11,6127
1987	99,8015	10,6564
1988	99,8432	9,6636
1989	99,7506	10,3450
1990	99,8121	8,8155
1991	99,5576	10,6798
1992	99,2564	13,2430
1993	99,5981	10,6962
1994	99,6823	11,2338
1995	99,8758	11,3737
1996	99,8207	10,5146
1997	99,5368	12,4120
1998	99,7209	13,9056
1999	99,6934	13,8640
2000	99,8421	13,7814

**Cuadro 4.17: Bondad del ajuste y contraste MAPE del modelo de Lee - Carter, en la población andaluza. Mujeres**

Aplicamos para  $k_y$  Box-Jenkins, obteniendo un buen modelo  $ARIMA(0,1,0)$  con constante, que para hombres sería:

$$k_y = k_{y-1} - 0,05635 + \varepsilon_y$$

Mientras que para las mujeres quedaría

$$k_y = k_{y-1} - 1,2976 + \varepsilon_y$$

### **Comparación de ambos modelos**

Si nos detenemos un momento y analizamos la determinación de la medida de mortalidad según el modelo de Lee – Carter:

$$\ln(q_{x,y}) = a_x + b_x k_y + \varepsilon'_{x,y}$$

determinamos que si tenemos un  $b_x$  positivo, tendremos un decremento de la mortalidad ante un  $k_y$  menor; y lógicamente, ocurre lo contrario ante un  $b_x$  negativo, es decir, frente a un  $k_y$  menor, obtendremos un incremento de la mortalidad.

Si observamos los resultados obtenidos, podemos comprobar que se produce un decremento de la mortalidad con el tiempo cronológico, para ambos sexos y todas las edades, con la excepción de los hombres de entre 20 y 39 años.

Parece afectar este incremento de la mortalidad con el tiempo, a lo que conocemos como la “joroba de los accidentes” de los hombres. Si bien el modelo de Heligman y Pollard también predice un incremento de la mortalidad para este tramo de edad, este incremento es mucho menos acusado que en el modelo de Lee – Carter, como puede apreciarse al comprobar la medida de la mortalidad con el tiempo para una edad de 30 años:

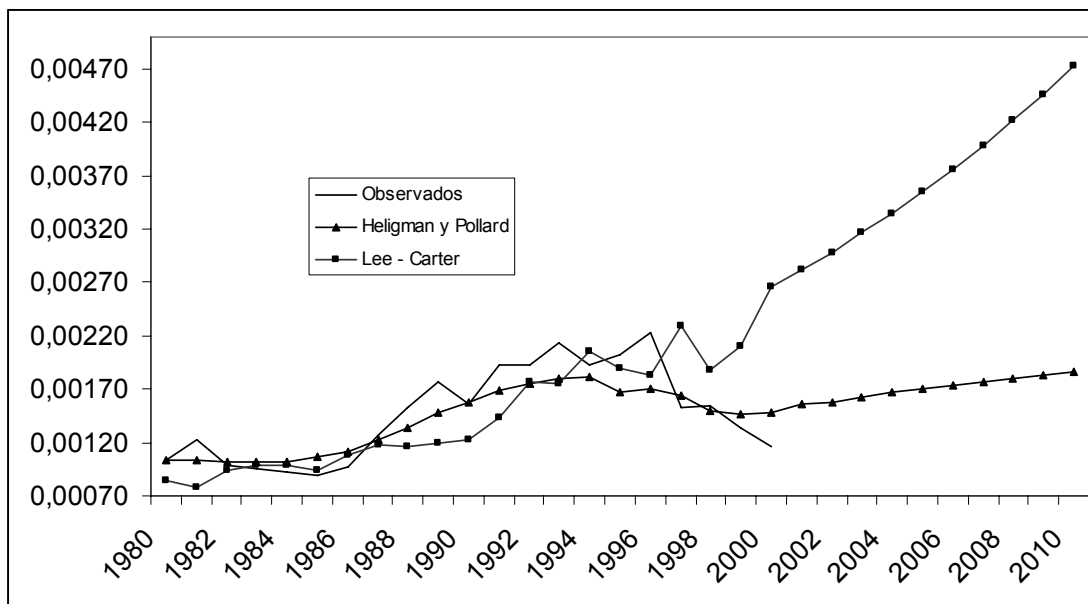
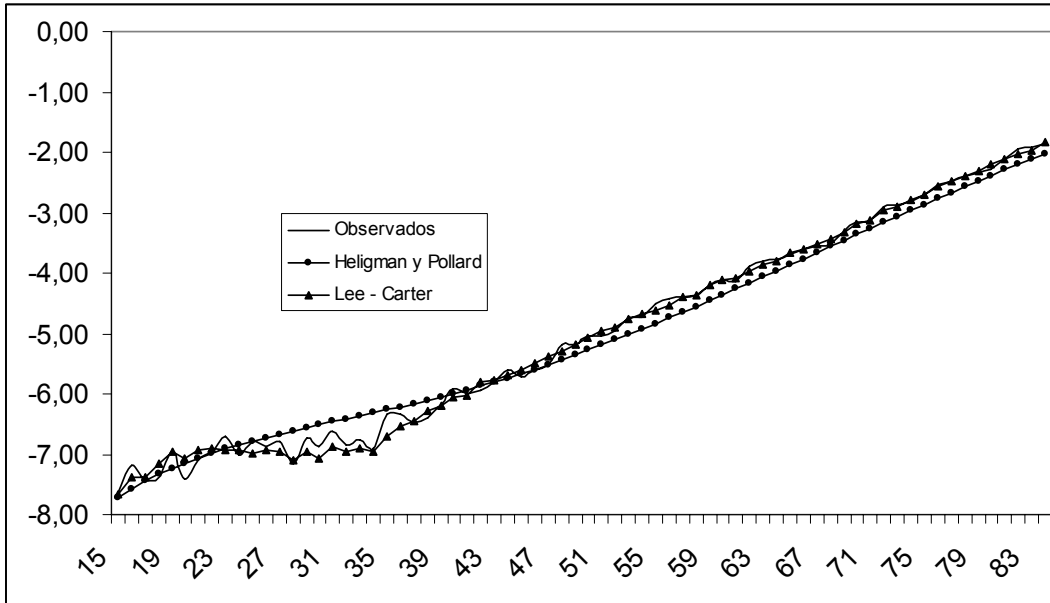


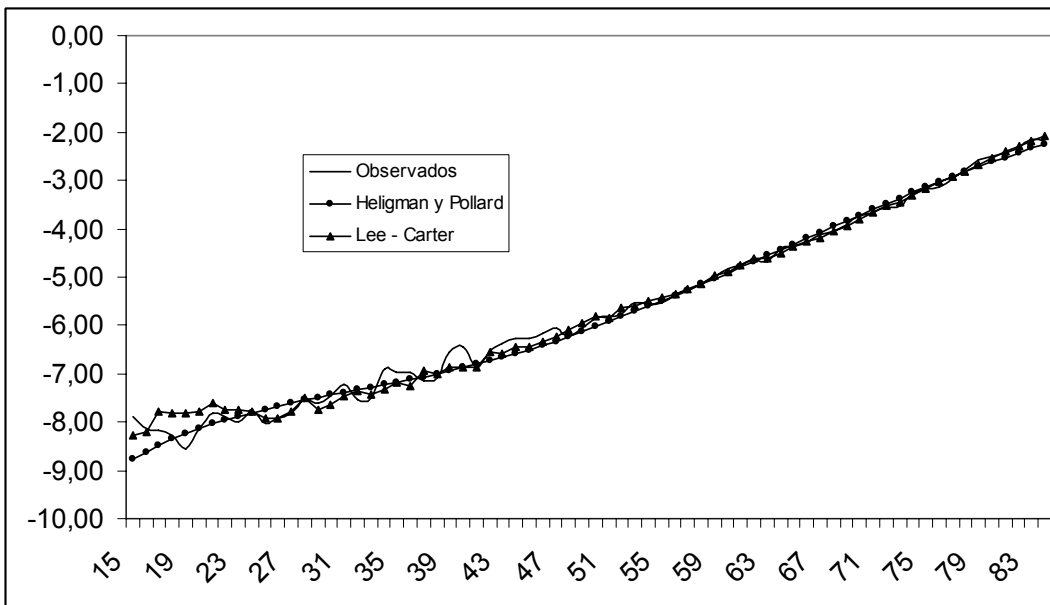
Gráfico 4.1.: Comparativa de la medida de la mortalidad  $q_{xy}$  para una edad de 30 años. Hombres

Si representamos  $\ln[q_{x,y}]$  para todas las edades según ambos modelos y comparados asimismo con las observaciones reales, para los años 1980 y 2000, así como la predicción para 2010, podemos acotar las tendencias en la mortalidad según tramos de edad.

Para el año 1980 los resultados son los que siguen:



**Gráfico 4.2.: Comparativa de los resultados para  $\ln(q_{xy})$  obtenidos mediante el modelo de Heligman y Pollard, Lee - Carter y los observados. Año 1980. Hombres.**



**Gráfico 4.3.: Comparativa de los resultados para  $\ln(q_{xy})$  obtenidos mediante el modelo de Heligman y Pollard, Lee - Carter y los observados. Año 1980. Mujeres.**

Para el año 2000 tendríamos los siguientes resultados:

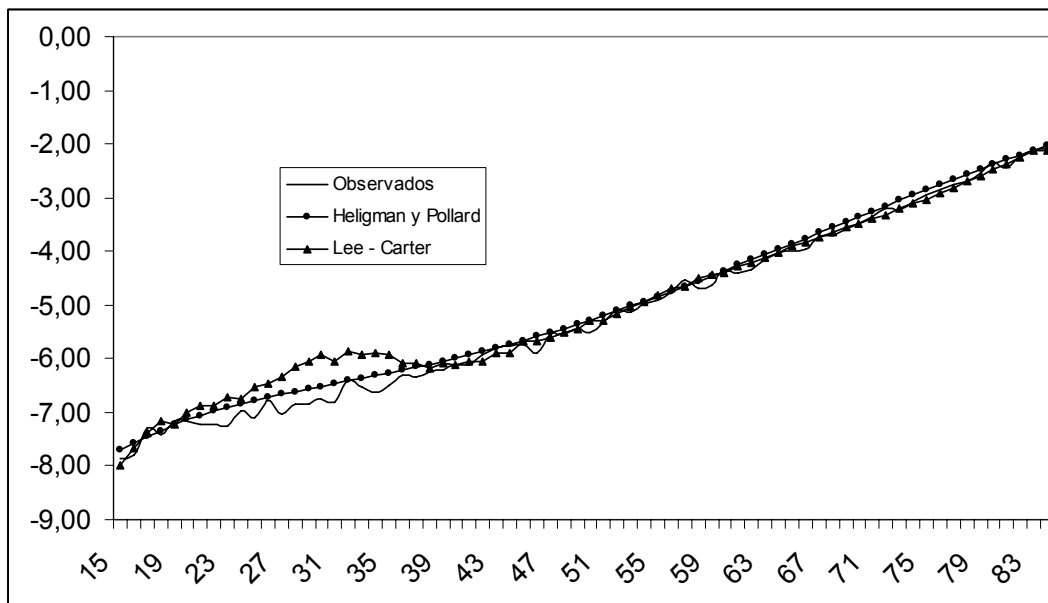


Gráfico 4.4.: Comparativa de los resultados para  $\ln(q_{xy})$  obtenidos mediante el modelo de Heligman y Pollard, Lee - Carter y los observados. Año 2000. Hombres.

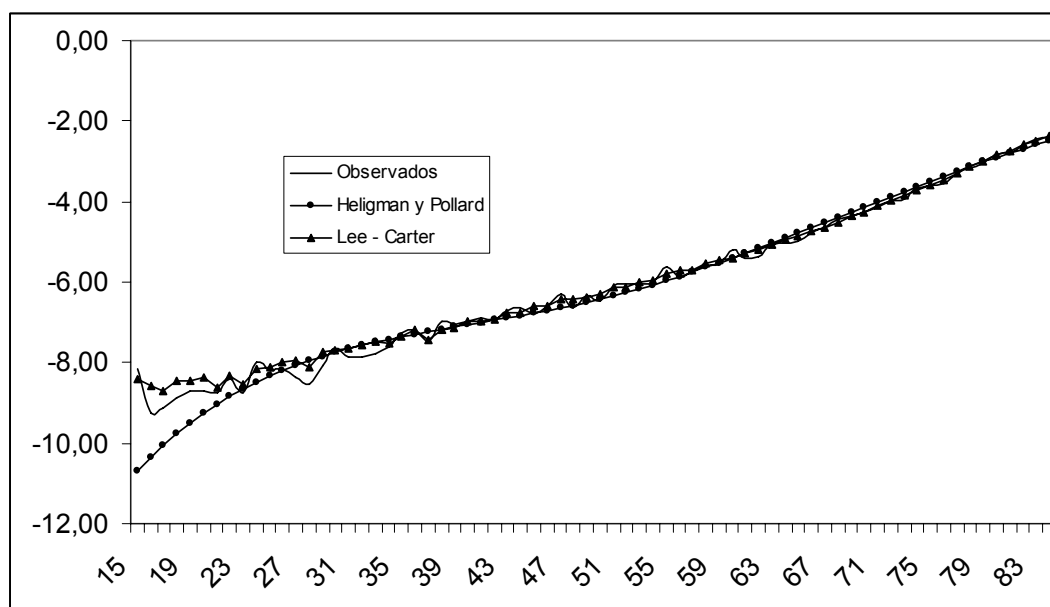
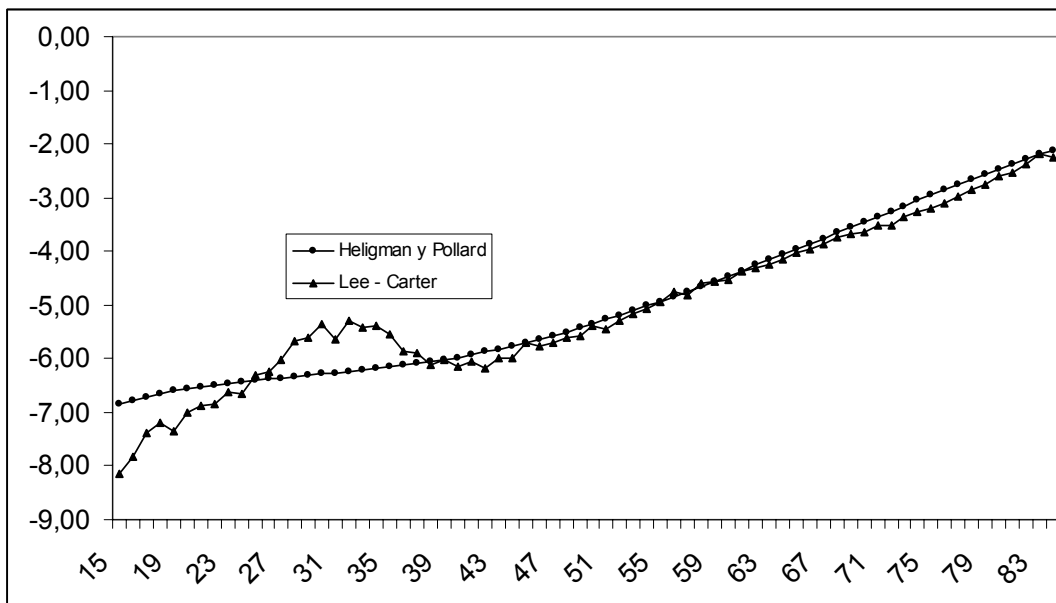
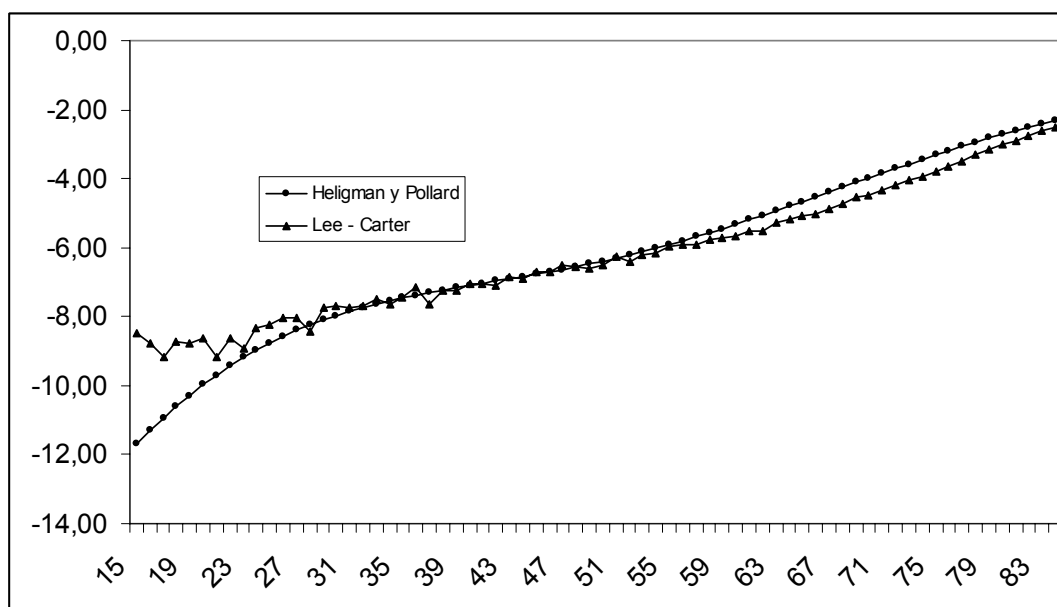


Gráfico 4.5.: Comparativa de los resultados para  $\ln(q_{xy})$  obtenidos mediante el modelo de Heligman y Pollard, Lee - Carter y los observados. Año 2000. Mujeres.

La predicción de ambos modelos para el año 2010, sería la siguiente:



**Gráfico 4.6.:** Comparativa de los resultados para  $\ln(q_{xy})$  obtenidos mediante el modelo de Heligman y Pollard y Lee - Carter. Año 2010. Hombres.

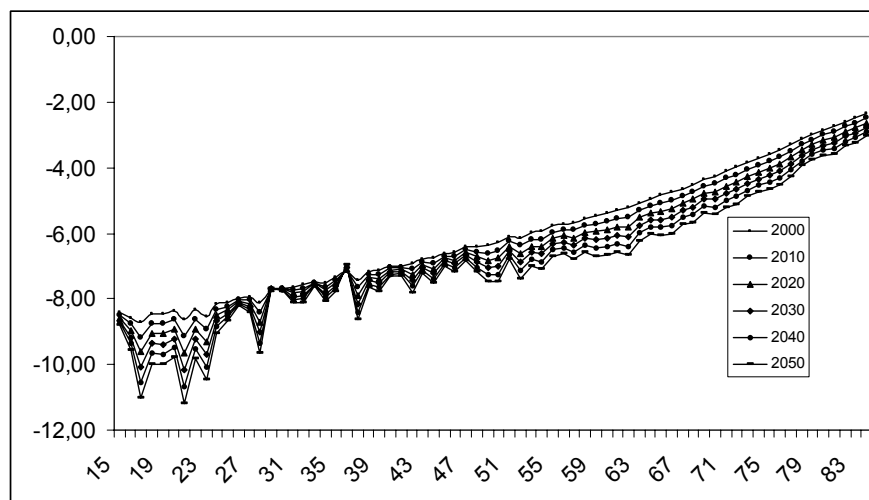


**Gráfico 4.7.:** Comparativa de los resultados para  $\ln(q_{xy})$  obtenidos mediante el modelo de Heligman y Pollard y Lee - Carter. Año 2010. Mujeres.

De esta manera hemos comprobado que los resultados obtenidos mediante ambos modelos para las mujeres, predicen una disminución para todas las edades.

La proyección de la curva de la medida de mortalidad para los próximos 50 años correspondiente a las mujeres, según el modelo de Lee – Carter, es la que sigue:



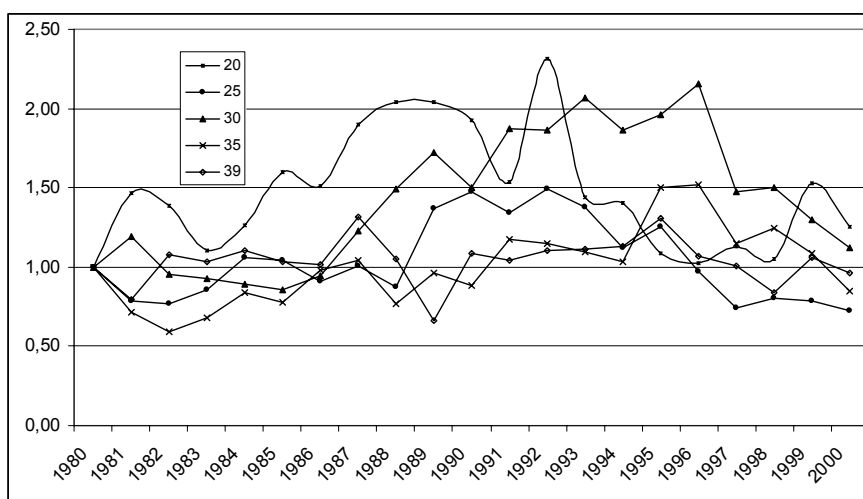


**Gráfico 4.8.: Resultados proyectados de  $\ln(q_{xy})$  obtenidos mediante el modelo de Lee - Carter, Mujeres.**

En la cual observamos una disminución en la mortalidad para todas las edades.

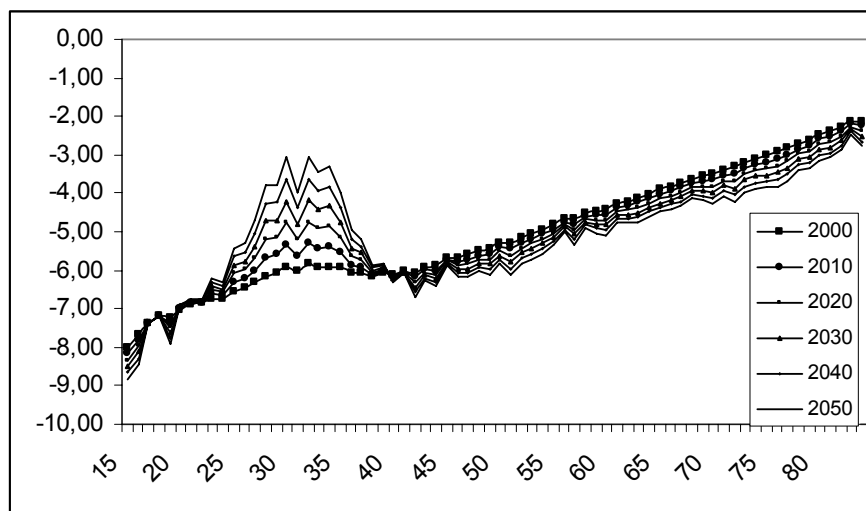
No obstante, con respecto a los hombres hemos comprobado que ambos modelos coinciden en predecir una disminución en la mortalidad para todas las edades salvo para los adultos – jóvenes, en concreto en lo que conocemos como la “joroba de los accidentes”.

Coincidimos con Alonso et. al. (2005) en que el incremento de la mortalidad que concluyen ambos modelos se puede deber al aumento de los accidentes de tráfico y la epidemia del SIDA, y que en los últimos años está remitiendo. Esto último se puede comprobar si analizamos las tasas reescaladas de manera que no influya el valor absoluto de la tasa, para comparar las diferentes dinámicas:



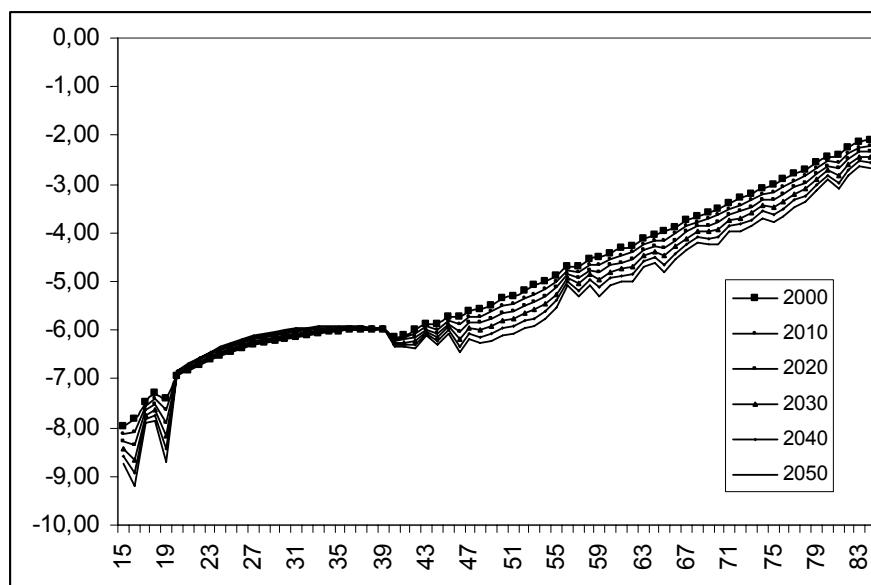
**Gráfico 4.9.: Tasas de mortalidad reales reescaladas. Hombres.**

Si no eliminamos este efecto, el modelo sobreestimaría en el futuro la mortalidad para estas edades, lo que se puede comprobar si proyectamos la curva de la medida de la mortalidad para hombres andaluces a 50 años, mediante el modelo de Lee - Carter:



**Gráfico 4.10.: Resultados proyectados de  $\ln(q_{xy})$  obtenidos mediante el modelo De Lee - Carter. Hombres.**

Para eliminar el efecto de la sobremortalidad nos basaremos en el segundo sumando del modelo de Heligman y Pollard, que es el que introduce el efecto de la “joroba de los accidentes”, ajustando dicha función a las medidas de mortalidad de las cinco edades anteriores (de 15 a 19 años de edad) y a las cinco posteriores (de 40 a 44 años de edad), para utilizar de esta manera los valores estimados de las medidas de mortalidad para las edades de 20 a 39 en lugar de las reales. Como resultado de introducir esta modificación, obtenemos los siguientes resultados proyectados de la curva de la medida de mortalidad:



**Gráfico 4.11.: Resultados proyectados de  $\ln(q_{xy})$  obtenidos mediante el modelo de Lee - Carter, detraída la sobremortalidad juvenil masculina. Hombres.**

No obstante, se puede observar que el proceso presenta dos incongruencias, que si bien al principio pueden pasar casi desapercibidas, al proyectarse la mortalidad a lo largo de los años, estas se acentúan de forma considerable (como puede observarse en los gráficos 4.13, 4.15 y 4.16). El primer problema es la existencia de unos saltos en algunas probabilidades de fallecimiento entre dos edades consecutivas que en realidad se pueden considerar ilógicas ya que deberían presentarse de una forma mucho más atenuada. El segundo problema es la presencia de unos valores de  $q_x$  mayores para unas edades más pequeñas (al margen del intervalo de edades donde existe el problema de la sobremortalidad ya estudiada anteriormente) y que como en el caso anterior hay que solucionar.

Por estas razones se presenta la necesidad de una suavización de los datos para eliminar estos dos efectos, suavización que se va a realizar sobre los parámetros  $a_x$  y  $b_x$  de las tablas de mortalidad femenina y de la masculina sin sobremortalidad. Existen muchos métodos de suavización de datos, el que se va a utilizar en este caso va a ser el de las medias móviles ponderadas con información de los tres años anteriores y posteriores, su fórmula general es la siguiente

$$\tilde{y}_{x_0} = y_{x_0} \cdot w_{x_0} + \sum_{p=1}^K (y_{x_0+p} \cdot w_{x_0+p} + y_{x_0-p} \cdot w_{x_0-p})$$

donde  $\sum_{\forall x} w_x = 1$ .

Para la población andaluza los parámetros suavizados quedan de la siguiente forma:

<i>Edad</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>	<i>Edad</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>
15	-7,790	-8,439	50	-5,193	-6,082
16	-7,581	-8,362	51	-5,097	-5,996
17	-7,393	-8,285	52	-4,999	-5,907
18	-7,228	-8,228	53	-4,898	-5,818
19	-7,088	-8,183	54	-4,802	-5,730
20	-6,967	-8,151	55	-4,706	-5,638
21	-6,856	-8,130	56	-4,611	-5,546
22	-6,755	-8,106	57	-4,518	-5,455
23	-6,661	-8,084	58	-4,426	-5,357
24	-6,575	-8,042	59	-4,334	-5,258
25	-6,498	-7,998	60	-4,246	-5,159
26	-6,428	-7,945	61	-4,158	-5,056
27	-6,366	-7,879	62	-4,069	-4,953
28	-6,310	-7,812	63	-3,978	-4,850
29	-6,260	-7,733	64	-3,887	-4,744
30	-6,215	-7,655	65	-3,794	-4,637
31	-6,175	-7,581	66	-3,703	-4,528
32	-6,139	-7,508	67	-3,612	-4,415
33	-6,107	-7,441	68	-3,518	-4,297
34	-6,079	-7,375	69	-3,423	-4,173
35	-6,054	-7,304	70	-3,326	-4,047
36	-6,033	-7,236	71	-3,229	-3,917
37	-6,021	-7,167	72	-3,130	-3,789
38	-6,016	-7,096	73	-3,031	-3,662
39	-6,011	-7,025	74	-2,931	-3,532
40	-6,001	-6,948	75	-2,831	-3,401
41	-5,969	-6,870	76	-2,731	-3,266
42	-5,912	-6,784	77	-2,629	-3,129
43	-5,838	-6,702	78	-2,529	-2,991
44	-5,752	-6,617	79	-2,429	-2,855
45	-5,659	-6,529	80	-2,329	-2,722
46	-5,569	-6,445	81	-2,232	-2,595
47	-5,477	-6,353	82	-2,134	-2,469
48	-5,383	-6,263	83	-2,042	-2,348
49	-5,291	-6,173	84	-1,988	-2,267

**Cuadro 4.18: Valores de  $a_x$  normalizados y suavizados para el modelo de Lee - Carter. Hombres y Mujeres.**

<i>Edad</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>	<i>Edad</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>
15	0,007	0,009	50	0,014	0,015
16	0,013	0,016	51	0,014	0,016
17	0,018	0,021	52	0,014	0,016
18	0,022	0,025	53	0,013	0,016
19	0,026	0,026	54	0,012	0,016
20	0,027	0,028	55	0,011	0,016
21	0,028	0,028	56	0,010	0,016
22	0,028	0,026	57	0,009	0,017
23	0,028	0,022	58	0,010	0,017
24	0,028	0,017	59	0,011	0,018
25	0,028	0,013	60	0,011	0,019
26	0,028	0,010	61	0,012	0,020
27	0,027	0,009	62	0,012	0,020
28	0,026	0,009	63	0,011	0,019
29	0,025	0,007	64	0,012	0,019
30	0,024	0,006	65	0,012	0,019
31	0,023	0,006	66	0,012	0,018
32	0,022	0,005	67	0,011	0,018
33	0,020	0,005	68	0,011	0,018
34	0,019	0,006	69	0,010	0,017
35	0,017	0,006	70	0,010	0,017
36	0,016	0,007	71	0,010	0,017
37	0,014	0,008	72	0,010	0,017
38	0,012	0,008	73	0,010	0,017
39	0,010	0,008	74	0,010	0,016
40	0,008	0,008	75	0,011	0,016
41	0,005	0,008	76	0,010	0,015
42	0,004	0,009	77	0,010	0,014
43	0,004	0,009	78	0,010	0,014
44	0,006	0,009	79	0,009	0,013
45	0,008	0,009	80	0,009	0,012
46	0,011	0,009	81	0,009	0,012
47	0,012	0,010	82	0,009	0,012
48	0,013	0,012	83	0,009	0,011
49	0,014	0,014	84	0,009	0,011

Cuadro 4.19: Valores de  $b_x$  normalizados y suavizados para el modelo de Lee - Carter. Hombres y Mujeres.

Al variar los parámetros anteriores obtendremos unas nuevas estimaciones para los  $k_t$  futuros que son los siguientes:

<i>Año</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>	<i>Año</i>	<i>Hombres</i>	<i>Mujeres</i>
1980	9,55068	14,45367	1991	0,27982	-0,91038
1981	11,72585	12,90290	1992	-3,59045	-4,53071
1982	7,54060	10,60192	1993	-2,69844	-3,38805
1983	6,07352	10,54834	1994	-6,81826	-6,60790
1984	8,31936	7,37817	1995	-3,06554	-8,13951
1985	7,85675	6,90005	1996	-7,73414	-8,10053
1986	3,99908	5,45306	1997	-8,41794	-5,52760
1987	3,15486	4,54866	1998	-7,28777	-9,90589
1988	3,12874	3,66199	1999	-7,81119	-11,46065
1989	2,16672	1,40739	2000	-12,69314	-12,66755
1990	2,38255	-0,28630			

Cuadro 4.20: Valores de  $k_t$  reestimados una vez suavizados. Hombres y Mujeres

Variando también la constante de los modelos ARIMA(0,1,0) que ahora son de la forma

- Hombres:  $k_y = k_{y-1} - 1,1122 + \varepsilon_y$
- Mujeres:  $k_y = k_{y-1} - 1,3561 + \varepsilon_y$

Las medidas de bondad de ajuste de los nuevos modelos son:

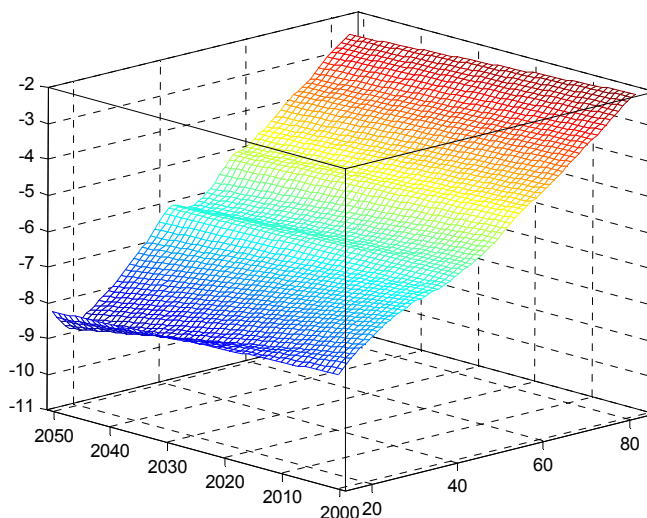
<b>AÑO</b>	<b><math>R^2</math> (ajust.por g.l)</b>	<b>MAPE</b>
1980	99,3451	16,3365
1981	99,3746	11,6735
1982	99,4177	14,9494
1983	99,5218	15,6638
1984	99,7500	6,6858
1985	99,7038	10,9958
1986	99,7820	13,8580
1987	99,5678	12,3438
1988	99,8448	9,5774
1989	99,7328	9,5546
1990	99,7051	13,5880
1991	99,6962	11,8535
1992	99,7497	12,4762
1993	99,7797	17,0270
1994	99,6451	12,0653
1995	99,6028	18,5193
1996	99,7675	12,7612
1997	99,1712	23,1902
1998	99,6877	18,9799
1999	99,5593	22,5275
2000	99,6035	22,6506

**Cuadro 4.21: Bondad del ajuste y contraste MAPE del modelo de Lee – Carter, en la población andaluza suavizada. Hombres.**

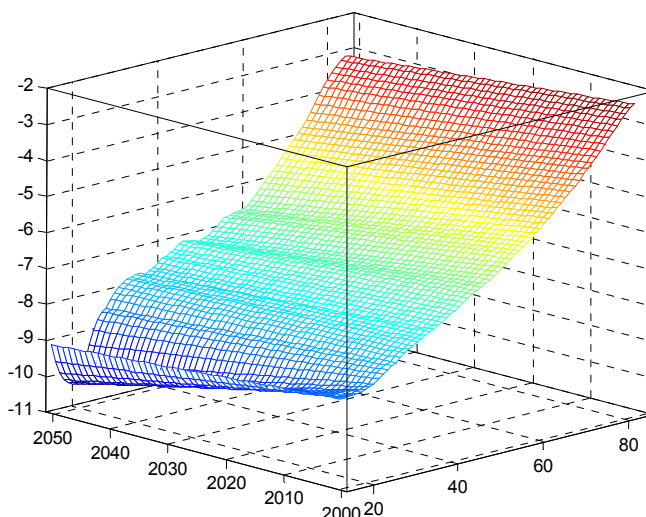
<b>AÑO</b>	<b><math>R^2</math> (ajust.por g.l)</b>	<b>MAPE</b>
1980	99,5541	15,8049
1981	99,2630	13,6610
1982	99,7534	17,1857
1983	99,7311	13,1879
1984	99,4174	14,3859
1985	99,4536	15,1479
1986	99,7903	14,9313
1987	99,7823	17,4676
1988	99,7442	15,5516
1989	99,6383	12,8113
1990	99,6061	13,5978
1991	99,8688	21,6392
1992	99,7773	18,3617
1993	99,8002	19,8113
1994	99,8504	17,2733
1995	99,6983	25,4528
1996	99,8509	16,4556
1997	99,8199	23,8147
1998	99,6563	19,8430
1999	99,7773	20,9559
2000	99,7808	32,3850

**Cuadro 4.22: Bondad del ajuste y contraste MAPE del modelo de Lee - Carter, en la población andaluza. Mujeres**

Finalmente obtenemos los gráficos de la evolución de la mortalidad con los datos suavizados:



**Gráfico 4.12.: Resultados proyectados de  $\ln(q_{xy})$  obtenidos mediante el modelo de Lee – Carter suavizado. Hombres.**



**Gráfico 4.13.: Resultados proyectados de  $\ln(q_{xy})$  obtenidos mediante el modelo de Lee – Carter suavizado. Mujeres.**

Comparando estos últimos con los gráficos 4.13. y 4.16., llegamos a la conclusión de que mediante el suavizado se ha conseguido eliminar los dos problemas anteriormente citados y observamos además que tanto la mortalidad como las medidas de bondad de ajuste apenas han sufrido variaciones.

A continuación elaboraremos la tabla de mortalidad a partir de cuya distribución aproximada, abordaremos la influencia del riesgo biométrico en el valor razonable de las PTSV.

## Construcción de la tabla de mortalidad

Una tabla de mortalidad dinámica se trata actuarialmente como generacional, es decir, se establece una tabla para cada generación. Para construir la tabla generacional, a partir de los resultados obtenidos del modelo de Lee - Carter, tenemos dos opciones dependiendo de la capacidad computacional:

- Generar como paso previo a cualquier cálculo actuarial, la tabla de mortalidad correspondiente a todas las generaciones, de manera que no sea necesario generar la tabla de mortalidad individual para cada ocasión.
- Disponer de la información necesaria, para construir la tabla de mortalidad correspondiente a la generación a la que pertenece el Asegurado cuyas valoraciones actuariales se van a llevar a cabo.

En el primer caso partimos de la matriz cuadrada, en la que por columnas tenemos el tiempo cronológico desde el año de nacimiento de la primera generación considerada hasta el correspondiente a la última, y por filas las edades desde 15 (por ser esta la edad mínima considerada) hasta la edad máxima considerada. A partir de aquí, asignamos a cada componente de la matriz la medida de mortalidad  $q_{xy}$  correspondiente según los resultados del modelo de Lee - Carter.

En cuanto a los valores de estas  $q_{xy}$ , siempre que el valor no haya sido proyectado, utilizaremos la correspondiente a este año 2000. En realidad estas medidas de mortalidad no serán utilizadas siempre que estemos calculando valores actuariales posteriores al año 2000, pero es necesario introducir estas componentes con el fin de facilitar la utilización de las tablas. La medida de mortalidad quedaría como sigue

$$Q_{xt} = \begin{pmatrix} q_{15,2000} & q_{15,2000} & q_{15,2000} & q_{15,2000} & q_{15,2000} & q_{15,2000} & q_{15,2000} & q_{15,2000} \\ q_{16,2001} & q_{16,2000} & q_{16,2000} & q_{16,2000} & q_{16,2000} & q_{16,2000} & q_{16,2000} & q_{16,2000} \\ q_{17,2002} & q_{17,2001} & q_{17,2000} & q_{17,2000} & q_{17,2000} & q_{17,2000} & q_{17,2000} & q_{17,2000} \\ q_{18,2003} & q_{18,2002} & q_{18,2001} & q_{18,2000} & q_{18,2000} & q_{18,2000} & q_{18,2000} & q_{18,2000} \\ q_{19,2004} & q_{19,2003} & q_{19,2002} & q_{19,2001} & q_{19,2000} & q_{19,2000} & q_{19,2000} & q_{19,2000} \\ q_{20,2005} & q_{20,2004} & q_{20,2003} & q_{20,2002} & q_{20,2001} & q_{20,2000} & q_{20,2000} & q_{20,2000} \\ q_{21,2006} & q_{21,2005} & q_{21,2004} & q_{21,2003} & q_{21,2002} & q_{21,2001} & q_{21,2000} & q_{21,2000} \\ q_{22,2007} & q_{22,2006} & q_{22,2005} & q_{22,2004} & q_{22,2003} & q_{22,2002} & q_{22,2001} & q_{22,2000} \end{pmatrix}$$

Así, la primera columna sería la tabla correspondiente a la generación de 1985, la segunda a la de 1984, y así sucesivamente (recordemos que la edad mínima que hemos considerado es 15 años). La tabla de mortalidad se obtiene a partir de la matriz anterior, y



suponiendo una cohorte de 100.000 individuos para una edad de 15 años ( $l(15) = 100.000$ ) mediante el siguiente proceso iterativo:

$$l_{x+1,y+1} = l_{x,y} \cdot (1 - q_{x,y})$$

En el segundo caso, es decir, cuando estimamos la tabla de mortalidad a aplicar al caso particular del Asegurado objeto de valoración, tendríamos a partir de las estimaciones de los parámetros  $a_x$  y  $b_x$  por edades y del parámetro  $k_y$  por años, la tabla de mortalidad generada como sigue:

$\underline{x}$	$\underline{l_x}$	$\underline{q_{x,y}}$
$x_0$	$l_{x_0} = 10^n$	$q_{x_0,y_0} = \exp(a_{x_0} + b_{x_0} k_{y_0})$
$x_0 + 1$	$l_{x_0+1} = l_{x_0} (1 - q_{x_0,y_0})$	$q_{x_0+1,y_0+1} = \exp(a_{x_0+1} + b_{x_0+1} k_{y_0+1})$
$x_0 + T$	$l_{x_0+T} = l_{x_0+T-1} (1 - q_{x_0+T-1,y_0+T-1})$	

donde

$y_0$ : fecha de realización de los cálculos.

$x_0$ : edad del Asegurado en la fecha de los cálculos,  $y_0$ .

$T$ : número de años de duración del seguro.

Una vez construida la tabla de mortalidad, podemos obtener la esperanza matemática de los siguientes sucesos:

- Probabilidad de supervivencia en el año  $y + t$  de un asegurado de edad  $x$ , en el año  $y$ :

$${}_t p_{x,y} = \frac{l_{x+t,y+t}}{l_{x,y}}$$

- Probabilidad de fallecimiento en el intervalo  $[y, y + t]$  de un asegurado de edad  $x$ , en el año  $y$ :

$${}_t q_{x,y} = \frac{l_{x+t,y+t} - l_{x,y}}{l_{x,y}}$$

- Probabilidad de fallecimiento en el intervalo  $[y + t, y + T]$  de un asegurado de edad  $x$ , en el año  $y$ :

$${}_{t/T-t} q_{x,y} = {}_t p_{x,y} \cdot {}_{T-t} q_{x+t,y+t} = \frac{l_{x+t,y+t}}{l_{x,y}} \cdot \frac{l_{x+t,y+t} - l_{x+T,y+T}}{l_{x+t,y+t}} = \frac{l_{x+t,y+t} - l_{x+T,y+T}}{l_{x,y}}$$

Si la probabilidad de supervivencia o fallecimiento no tiene un subíndice precedente, se considera que el suceso abarca un año de duración, es decir,

$$\left. \begin{aligned} p_{x,y} &= \frac{l_{x+1,y+1}}{l_{x,y}} \\ q_{x,y} &= \frac{l_{x+1,y+1} - l_{x,y}}{l_{x,y}} \end{aligned} \right\}$$

## 4.6. PROCESO ESTOCÁSTICO ASOCIADO A LA MEDIDA DE MORTALIDAD

### 4.6.1. Resultados analíticos

Una vez construida la tabla de mortalidad generacional, disponemos de la esperanza matemática de todas las probabilidades condicionadas de supervivencia y fallecimiento. No obstante, esta esperanza matemática no es más que una representación de todas las posibles.

Nuestro objetivo aquí es considerar difusión sobre la tabla de mortalidad dinámica ajustada, al igual que ya lo hemos hecho con la ETTI. Ello permitiría recoger en la valoración un ajuste por el riesgo técnico de desconocimiento de la prestación esperada. Como ya se expuso al inicio del presente capítulo, el riesgo técnico se puede separar en dos partes claramente diferenciadas: riesgo de desconocimiento de la prestación esperada o sistemático, y riesgo de desviación respecto de esta prestación esperada o no sistemático.

Recordemos que la medida de mortalidad que hemos ajustado mediante el método de Lee – Carter ha sido

$$\ln(q_{x,y}) = a_x + b_x k_y + \varepsilon'_{xy}$$

quedando determinado a su vez el valor del parámetro  $k_y$ , mediante un modelo *ARIMA*(0,1,0) con constante negativa

$$k_y = k_0 + c \cdot y + \varepsilon_y$$

Así

$$\ln(q_{x,y}) = a_x + b_x \cdot (k_0 + c \cdot y + \varepsilon_y) + \varepsilon'_{xy}$$

La variabilidad del parámetro  $k_y$ , viene determinada por el ruido blanco,  $\varepsilon_y$ , que constituye una distribución normal de media 0 y desviación típica  $\sigma_y$ . Los intervalos de confianza al 95% son en nuestro caso los que siguen:

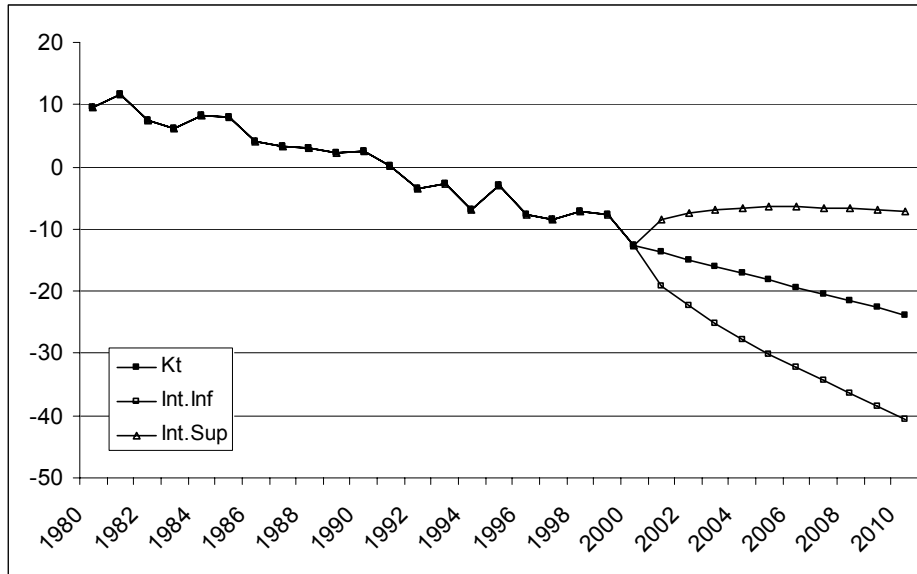


Gráfico 4.14.: Intervalos de confianza para el  $k_t$  correspondiente al modelo Lee – Carter. Hombres.

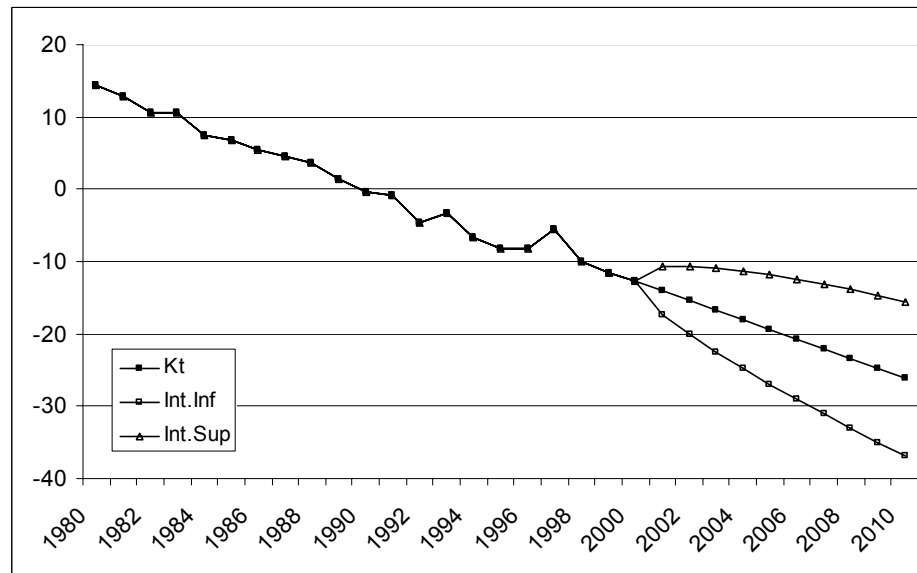
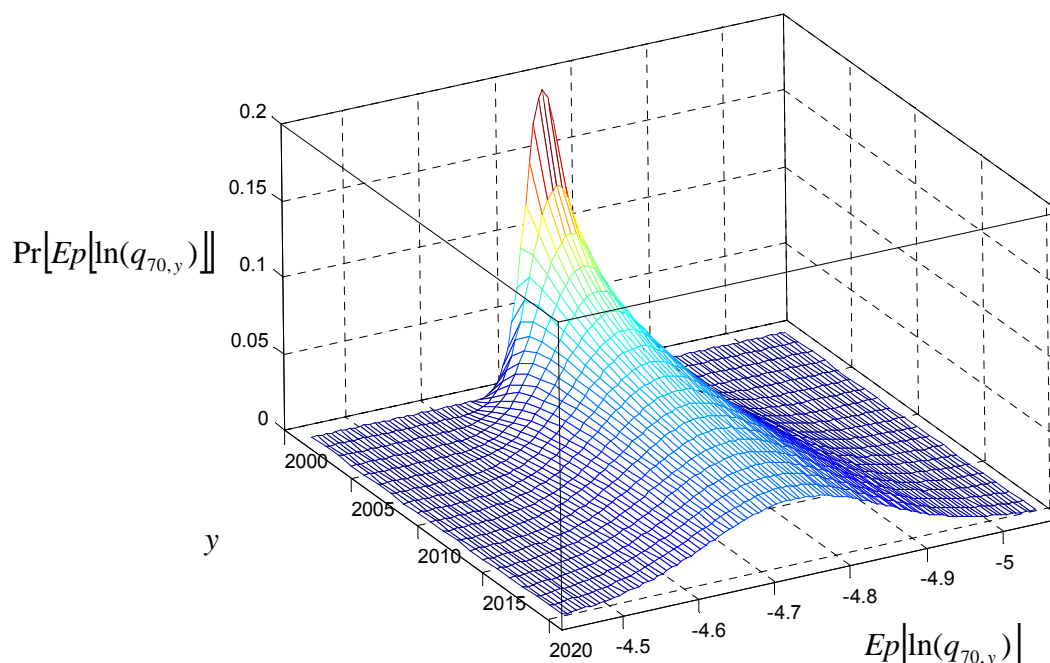


Gráfico 4.15.: Intervalos de confianza para el  $k_t$  correspondiente al modelo Lee – Carter. Mujeres.

El riesgo de desconocimiento de la prestación esperada, se puede derivar del error,  $\varepsilon_y$ , mientras que el riesgo de desviación de la prestación real respecto a la prestación esperada se puede derivar del error  $\varepsilon_{xy}$ . Consideraremos

$$Ep[\ln(q_{x,y})] = a_x + b_x \cdot (k_0 + c \cdot y + \varepsilon_y)$$

es decir, supondremos la esperanza matemática del suceso fallecimiento, para los años 2001 y siguientes, como un proceso estocástico. Si para ilustrar lo anterior, representamos la distribución de probabilidad correspondiente a la esperanza matemática, de una mujer de 70 años de edad en los años 2001 y siguientes,  $Pr[Ep[\ln(q_{70,y})]]$ , tendríamos:



**Gráfico 4.16.: Distribución de la esperanza matemática de la medida de mortalidad para una mujer de 70 años en los años 2001 y siguientes.**

El otro riesgo técnico, el de desviación de la prestación real respecto de la esperada, se puede extraer de la distribución de probabilidad del número de fallecidos en un año,  $d_{xy}$ , consistente en una binomial,  $B(l_{x,y}, q_{x,y})$ , y su aproximación aplicando el teorema de Moivre – Laplace, a una normal,  $N(m_d, \sigma_d)$ , siendo

$$m_d = l_{x,y} \cdot q_{x,y}$$

$$\sigma_d = \sqrt{l_{x,y} \cdot q_{x,y} \cdot (1 - q_{x,y})}$$

Si bien el error  $\varepsilon_{xy}$ , o riesgo de desviación de la prestación real respecto de la esperada puede llegar a ser importante, aquí nos centraremos en el error,  $\varepsilon_y$ , o riesgo de desconocimiento de la prestación esperada, ya que el primero se puede reducir o eliminar al incrementar la cartera asegurada.

Para introducir en la valoración el riesgo de desconocimiento de la prestación esperada, usado en la valoración de las PTSV, consideraremos que el tanto instantáneo o fuerza de mortalidad,  $\mu_x(t)$ , definido como

$$\mu_x(t) = \left[ - \frac{\partial \ln({}_{T-t}P_{x+t})}{\partial t} \right]_{T=t}$$

sigue un proceso estocástico, cuya evolución cumple la siguiente EDE:

$$d\mu_x(t) = (\bar{\theta}(t) - \bar{a}\mu_x(t))dt + \bar{\sigma}dW(t)$$

Hemos de diferenciar los parámetros  $\bar{a}$  y  $\bar{b}$ , de los parámetros de Vasicek,  $a$  y  $b$  correspondientes al modelo de Hull – White para los tipos de interés.

A partir de aquí introduciremos la probabilidad de supervivencia del Asegurado en  $t$ ,

$${}_t P_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_x(s)ds\right)$$

para considerar que existe una medida de probabilidad,  $Q$  riesgo neutro, para la cual las probabilidades de supervivencia del Asegurado en  $[t, T]$ , condicionadas a la supervivencia en  $t$ ,

$${}^t/_{T-t} P_x = {}_t P_x \cdot {}_{T-t} P_{x+t}$$

son martingala. Esto nos permitirá determinar la probabilidad de supervivencia en el intervalo  $[t, T]$ ,  ${}_{T-t} P_{x+t}$ , la cual consideramos que tiene un sólo factor de riesgo, y que identificamos con el tanto instantáneo de mortalidad,  $\mu_x(t)$ . Por lo anterior, representamos la probabilidad de supervivencia por  ${}_{T-t} P_{x+t}(\mu_x(t))$ . Aplicando Itô – Taylor así como las manipulaciones algebraicas expuestas para el tipo instantáneo obtenemos que

$${}_{\tau} P_{x+t} = \bar{A}(\tau) e^{-\bar{B}(\tau)\mu(t)} \quad (4.1)$$

siendo

$$\bar{B}(\tau) = \frac{1 - e^{-\bar{a}\tau}}{\bar{a}}$$

$$\bar{A}(\tau) = \exp\left[-\int_t^T \bar{\theta}(s)B(\tau)ds - \frac{\bar{\sigma}^2}{2\bar{a}}(B(\tau) - \tau) - \frac{\bar{\sigma}^2}{4\bar{a}}B(\tau)^2\right]$$

En cuanto al proceso  $\mu_x(t)$ , lo descomponemos como la suma de dos procesos:

$$\mu_x(t) = \Omega(t) + s(t)$$

con una evolución para  $s(t)$  similar al de  $\mu_x(t)$  pero con reversión a 0. Este proceso auxiliar, no plantea ninguna diferencia respecto al ya expuesto para el tipo de interés, siendo

$$s(t) \approx N\left(e^{-\bar{a}t}, \bar{\sigma}\sqrt{\frac{1 - e^{-2\bar{a}t}}{2\bar{a}}}\right)$$

El proceso  $\Omega(t)$  determinista será

$$\Omega(t) = e^{-\bar{a}t} \cdot \int_0^t e^{\bar{a}u} \bar{\theta}(u) du + \bar{\theta}(0)$$

y por consiguiente

$$\mu_x(t) \approx N\left(\Omega(t), \bar{\sigma} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\bar{a}t}}{2\bar{a}}}\right)$$

Usando el proceso  $\Omega(t)$ , obtenemos que el proceso  $\mu_x(t)$  replica perfectamente la tabla de mortalidad previamente ajustada.

$${}_{\tau} p_{x+t}(\mu_x(t)) = Ep\left(\exp\left(-\int_t^T \mu_x(s) ds\right) \middle| F_t\right)$$

donde como antes,  $\tau = T - t$ .

#### 4.6.2. Implementación mediante árboles trinomiales

Implementaremos numéricamente el anterior proceso estocástico a través de un árbol trinomial. Para ello supondremos que la difusión tiene lugar cada período de tiempo  $\Delta t$ , para lo cual definiremos el tanto de mortalidad a un plazo  $[t, t + \Delta t]$

$$\mu_{x+t}^{\Delta t} = \int_t^{t+\Delta t} \mu_x(s) ds$$

de modo que la probabilidad de supervivencia del asegurado de edad  $x + t$  durante el plazo  $[t, t + \Delta t]$  será

$${}_{\Delta t} p_{x+t} = \exp(-\mu_{x+t}^{\Delta t})$$

En adelante, y dado que la tabla de mortalidad se ha ajustado para tramos de un año de duración, fijaremos para el tanto de mortalidad un plazo  $\Delta t = 1$ . De esta manera a partir de la tabla de mortalidad ajustada obtenemos:

$$\mu_x^1 = -\log\left[\frac{l_{x+1}}{l_x}\right]$$

No obstante, como ya se ha explicado en el punto anterior, la tabla de mortalidad lo es de doble entrada: tiempo biológico y tiempo cronológico. De este modo la medida  $\mu_{x,y}^1$ , ha de tener dos subíndices,  $y$ , para referirnos al tiempo cronológico, y  $x$  para referirnos al tiempo biológico. Así a partir de la tabla de mortalidad ajustada mediante el modelo de Lee – Carter obtenemos

$$\mu^1_{x,y} = -\log \left[ \frac{l_{x+1,y+1}}{l_{x,y}} \right]$$

Sin olvidar lo anterior, usaremos para simplificar en la exposición de la implementación mediante árboles trinomiales, la siguiente notación

$$\mu^1_{x+t,y+t} \equiv \mu^1_t$$

Supondremos que la medida de mortalidad,  $\mu^1_t$ , es un proceso estocástico que sigue la dinámica expuesta para  $\mu_x(t)$ :

$$d\mu^1_t = (\theta(t) - \bar{a}\mu^1_t)dt + \bar{\sigma}dW(t)$$

Como ya se estableció para el tipo simple a corto, tenemos el proceso  $\mu^1_t$  separado en dos componentes: una determinística y otra estocástica con nivel de reversión a 0, como sigue

$$\mu^1_t = S_t + \Omega_t$$

donde  $\Omega_t$  es una función determinística que únicamente depende de  $t$ . Su finalidad es que el proceso replique la tabla de mortalidad ajustada mediante Lee – Carter. De este modo  $\Omega_t$ , depende de la edad del asegurado,  $x$ , el año de calendario en el que se efectúan los cálculos,  $y$ , y del tiempo transcurrido,  $t$ .  $S_t$  es un proceso estocástico similar a  $\mu^1_t$  pero con nivel de reversión a 0.

### **Primer paso**

El primer paso no difiere del expuesto para el tipo de interés libre de riesgo, salvo por supuesto la calibración de los parámetros  $\bar{a}$  y  $\bar{\sigma}$  que veremos más adelante, por lo que no nos detendremos mucho más.

Una vez obtenidas las probabilidades de transición entre nodos, cuya configuración, como se ha expuesto en el capítulo 3, puede ser normal, ascendente o descendente, así como los niveles probables del proceso  $S_t$ , con reversión a 0, el paso siguiente será adaptar este proceso para configurar el correspondiente a  $\mu^1_t$ .

Para ilustrar el procedimiento anterior, expondremos un ejemplo sencillo de implementación del árbol trinomial recombinante para la medida,  $\mu_{i,k}$ .

Partimos de unos parámetros de Vasicek de  $\bar{a} = 0,203954$  y  $\bar{\sigma} = 0,45231\%$ . Siguiendo el proceso ya descrito obtenemos los siguientes valores para las probabilidades de transición:

J	$p_1(k)$	$p_2(k)$	$p_3(k)$
1	0,906937	0,001627	0,091437
0	0,166667	0,666667	0,166667
-1	0,091437	0,001627	0,906937

**Cuadro 4.24.: Probabilidades de transición en el árbol de la variable  $S_t$  que son estacionarias.**

Igualmente los valores de  $S_t$  son

J	$S_t$
1	0,70992%
0	0,00000%
-1	-0,70992%

**Cuadro 4.25.: Valores temporales en el árbol de la variable  $S_t$ .**

### **Segundo paso**

El segundo paso en la implementación del modelo consiste en convertir este árbol para  $S_t$  en el correspondiente para  $\mu^1_t$ , de manera que quede replicada la tabla de mortalidad ajustada. Para determinar los valores de  $\mu^1_t$  a cada plazo en el árbol

$$\mu^1_{i,k} \equiv \mu^1_{x,y}(i\Delta t, k\Delta S),$$

lo único que resta es determinar en cada período las cantidades  $\Omega_i \equiv \Omega(i\Delta t)$

En cuanto a las cantidades  $\Omega_i$ , nos apoyaremos en los razonamientos que sugieren los ya tratados precios Arrow – Debreu. El sentido económico que le atribuiremos en este caso es el valor probable de un euro prometido en el escenario correspondiente a:

- supervivencia del asegurado en  $i + 1$ , y
- que el tanto de mortalidad  $\mu^1_{i,k}$  se halle en el nodo  $k$ , para el intervalo  $i + 1$ .

El proceso sería como antes el que sigue:



1. Inicializamos el algoritmo con  $Q_{0,0} = 1$ . Puesto que para  $i = 0$ ,  $k$  toma el valor 0 únicamente,

$$\text{resulta que } \Omega_0 = \mu^1_0 = -\log\left(\frac{l_{x+1,y+1}}{l_{x,y}}\right)$$

2. El siguiente paso consiste en calcular los pseudo - precios  $Q_{1,1}$ ,  $Q_{1,0}$  y  $Q_{1,-1}$ . De su definición, se deriva:

$$\left. \begin{aligned} Q_{1,1} &= Q_{0,0} \cdot p_3(1) \cdot p_{x,y} \\ Q_{1,0} &= Q_{0,0} \cdot p_2(0) \cdot p_{x,y} \\ Q_{1,-1} &= Q_{0,0} \cdot p_1(-1) \cdot p_{x,y} \end{aligned} \right\}$$

siendo  $p_{x,y} = \frac{l_{x+1,y+1}}{l_{x,y}}$  la probabilidad de supervivencia del asegurado en el primer año.

3. Una vez se tiene un conjunto completo de pseudo - precios  $Q_{i,k}$  en un determinado paso de tiempo,  $i$ , ya podemos proceder al cálculo de la cantidad  $\Omega_i$ .

Por otra parte, la probabilidad de supervivencia del asegurado para un año, una vez transcurrido el primer año,  $p_{x+1,y+1}$ , será diferente según los siguientes nodos:

$$\left. \begin{aligned} p_{x+1,y+1}(1) &= \exp(-(\Omega_1 + \Delta S)) \\ p_{x+1,y+1}(0) &= \exp(-\Omega_1) \\ p_{x+1,y+1}(-1) &= \exp(-(\Omega_1 - \Delta S)) \end{aligned} \right\}$$

Aplicando Bayes podemos determinar inmediatamente que:

$${}_2 p_x = Q_{1,1} \exp(-(\Omega_1 + \Delta S)) + Q_{1,0} \exp(-\Omega_1) + Q_{1,-1} \exp(-(\Omega_1 - \Delta S))$$

Por lo que se obtiene la expresión

$$\Omega_1 = \log\left(\frac{\sum_{j=-1}^1 Q_{1,j} \cdot \exp(-j\Delta S)}{{}_2 p_x}\right)$$

Y ya es inmediato obtener los valores

$$\left. \begin{aligned} \mu^1_{x+1,1} &= \Omega_1 + S_1 \\ \mu^1_{x+1,0} &= \Omega_0 + S_0 \\ \mu^1_{x+1,-1} &= \Omega_{-1} + S_{-1} \end{aligned} \right\}$$

El enfoque anterior proporciona un algoritmo recursivo, ya que en general

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i &= \log \left( \frac{\sum_{\forall j} Q_{i,j} \cdot \exp(-j\Delta S)}{{}_{i+1}P_x} \right) \\ Q_{i,j} &= \sum_{j'} Q_{i-1,j'} \cdot p_j(i-1, j') \cdot p_{x+i-1, j'} \end{aligned} \right\}$$

Los pseudo – precios Arrow – Debreu para nuestro ejemplo serían

J	0	1	2	3	4
1		0,164584	0,269280	0,334385	0,373259
0	1,000000	0,658335	0,433295	0,285227	0,187917
-1		0,164584	0,271159	0,338974	0,380767

**Cuadro 4.26.:** Valores temporales en el árbol de los precios Arrow – Debreu, para el tanto de mortalidad.

Y por último los valores correspondientes a  $\mu^1_{i,k}$

J	0	1	2	3	4
1		2,11482%	2,28046%	2,46667%	2,68457%
0	1,25767%	1,40490%	1,57054%	1,75675%	1,97465%
-1		0,69497%	0,86062%	1,04683%	1,26473%

**Cuadro 4.27.:** Valores temporales en el árbol de la variable tanto de mortalidad.

Gráficamente

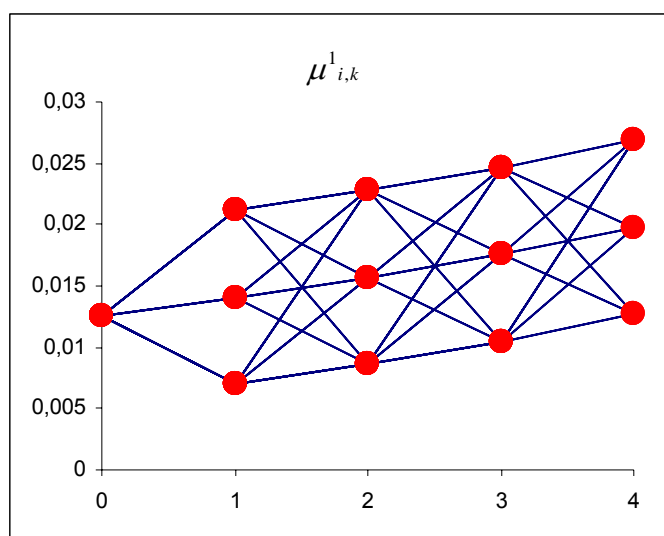


Gráfico 4.17.: Árbol del tanto de mortalidad a cada plazo.

### 4.6.3. Calibración

Como hemos podido comprobar, la construcción del árbol trinomial para el tanto de mortalidad se sirve de la tabla de mortalidad ajustada, de modo que las probabilidades de supervivencia obtenidas con la tabla de mortalidad son equivalentes a las proporcionadas por el árbol trinomial. La calibración que persigue este apartado es la determinación de los parámetros de volatilidad  $\bar{a}$  y  $\bar{\sigma}$ . El objetivo es pasar de la probabilidad real,  $P$ , a una probabilidad martingala riesgo – neutro,  $Q$ , que considere las expectativas de los intervinientes en el mercado, en cuanto a la futura evolución de la medida de mortalidad.

Lamentablemente no tenemos un mercado de instrumentos financieros líquido y cuyo subyacente sea el tanto de mortalidad. Como ya hemos mencionado, unicamente tenemos como antecedentes el EIB/BNP Long – term longevity bond, de noviembre 2004, y el Swiss – Re Short – term. Aquí expondremos como calibrar nuestro modelo a partir de un derivado OTC, que tomará como subyacente una renta vitalicia, constante a prima única, que se devenga en un tiempo posterior,  $T$ , a la fecha de valoración  $t$ . Es lo que Schrager (2006) denomina GAOs (Guaranteed Annuity Options).

Denotemos por  $F_x(t, T)$ , la cuantía determinada en  $t$ , de una pensión vitalicia constante y pagadera a partir de  $T$  (diferida por tiempo  $T - t$ ), por periodos vencidos de longitud,  $\Delta t$ , a cambio de una prima única de un euro, sin gastos que se devengará asimismo en  $T$ . El valor razonable de  $F_x(t, T)$  sería si no consideramos riesgo de crédito

$$F_x(t, T) = \frac{{}_t E_{x+t}^Q}{\tau / a_{x+t}^Q}, \quad \tau = T - t$$

donde

${}_t E_{x+t}^Q = {}_t p_{x+t}^Q \cdot P(t, T)^Q \Rightarrow$  valor actual actuarial en  $t$ , de un euro prometido en  $T$ , para una persona de edad  $x + t$ , en  $t$ , bajo la probabilidad martingala riesgo neutro,  $Q$ .

$\tau / a_{x+t}^Q = \sum_{i=T+1}^{\omega-T-1} {}_{i-t} p_{x+t}^Q \cdot P(t, i)^Q \Rightarrow$  valor actual actuarial en  $t$ , de una renta vitalicia, constante y postpagable pagadera a partir de  $T$ , para un persona de edad  $x + t$ , en  $t$ , bajo la probabilidad martingala riesgo neutro,  $Q$ .

$\omega$  : edad máxima que puede alcanzar la persona.

La valoración de esta pensión determinada en  $T$ , sería en cambio

$$F_x(T, T) = \frac{1}{a_{x+T}^Q}$$

Consideramos a continuación que existe una medida de probabilidad  $Q_x$ , equivalente según la cual

$$\frac{V(t)}{{}^{T-t} / a_{x+t}^{Q_x}}$$

es martingala, siendo  $V(t)$  el proceso correspondiente a un instrumento financiero que cotiza en el mercado. Bajo esta medida de probabilidad,  $Q_x$ , tenemos que  $F_x(t, T)$  es martingala, viniendo reglada su evolución según la siguiente EDE

$$dF_x(t, T) = F_x(t, T) [\sigma_x(t, T) dZ(t) + \sigma_p(t, T) dW(t)]$$

siendo

$dZ(t)$ ,  $dW(t)$  movimiento Browniano para la evolución de la medida de mortalidad y de los tipos de interés sin riesgo respectivamente, según la nueva medida de probabilidad  $Q_x$ .

$\sigma_x(t, T)$ ,  $\sigma_p(t, T)$  proceso de la volatilidad de  $F_x(t, T)$ , respecto de los cambios en la medida de mortalidad y tipos de interés respectivamente.

Si consideramos que  $\sigma_x(t, T)$  y  $\sigma_p(t, T)$  son determinísticos, entonces  $F_x(s, T)$  para  $t < s \leq T$  es log-normal bajo  $Q_x$ , siendo

$$\left. \begin{aligned} E_{Q_x}[F_x(s, T)|F_t] &= F_x(t, T) \\ \text{Var}_{Q_x}[F_x(s, T)|F_t] &= \int_t^s \left( |\sigma_x(u, T)|^2 + |\sigma_p(u, T)|^2 \right) du \end{aligned} \right\}$$

donde  $F_t$  representa toda la información disponible en  $t$ .

Consideramos a continuación un contrato que tiene una garantía referenciada a esta pensión vitalicia anual a partir de  $T$ . En el mercado abierto, cada euro en tiempo  $T$ , garantiza una pensión vitalicia anual de  $F_x(T, T)$  (suponiendo ausencia de gastos y a valor razonable). El mencionado contrato garantiza que la pensión por cada euro de prima en  $T$ , será como mínimo de  $K$ , por lo que se obtendrá,  $\max\{K, F_x(T, T)\}$ , lo cual en términos de  $F_x(T, T)$ , será

$$\frac{\max\{K, F_x(T, T)\}}{F_x(T, T)} = 1 + G(T)$$

donde  $G(T) = \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T)}$  representa el valor en  $T$  de la opción implícita.

Consideramos además que de un número inicial de asegurados,  $N(0)$ , de referencia como nominal, cobrarán los que sigan vivos en  $T$ , y que denotamos por  $N(T)$ . Asimismo con la información hasta  $T$ ,  $F_T$ , tenemos que el número de asegurados,  $N(T)$ , sigue una distribución binomial de parámetros  $N(t)$  y  ${}_t p_{x+t}^Q$ , determinándose su valor esperado como

$N(t) {}_t p_{x+t}^Q$ . Esta última expresión también se puede definir como  $N(t) \frac{{}_T P_x^Q}{{}_t P_x^Q}$ , de modo que

podemos reemplazar el valor esperado de  $N(T)$  por  $n(t) {}_T P_x^Q$ , siendo

$$n(t) = \frac{N(t)}{{}_t P_x^Q}$$

Lo anterior nos será de utilidad más adelante en la expresión 4.2, debido a que el valor de  $N(T)$  es condicionalmente independiente de la tabla de mortalidad en uso en tiempo  $T$ .

Por otra parte, el valor total del contrato en  $T$ , teniendo en cuenta este nominal referenciado al número de supervivientes será  $N(T) \max\{K, F_x(T, T)\} a_{x+T}^Q$  y el de la opción implícita

$$G(T) = N(T) \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T)}$$

Suponemos que la opción implícita se cotiza con precio  $G(t)$  en  $t$ , de manera que  $\frac{G(t)}{\tau / a_{x+t}^Q}$ , es martingala bajo la medida de probabilidad  $Q_x$ . La propiedad martingala de  $Q_x$ , implica que

$$\begin{aligned} \frac{G(t)}{\tau / a_{x+t}^Q} &= E_{Q_x} \left[ \frac{G(T)}{\tau / a_{x+t}^Q} \middle| F_t \right] \\ &= E_{Q_x} \left[ N(T) \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T) \cdot \tau / a_{x+t}^Q} \middle| F_t \right] \\ &= E_{Q_x} \left[ E_{Q_x} \left[ N(T) \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T) \cdot \tau / a_{x+t}^Q} \middle| F_T \right] \middle| F_t \right] \\ &= E_{Q_x} \left[ E_{Q_x} [N(T) | F_T] \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T) \cdot \tau / a_{x+t}^Q} \middle| F_t \right] \\ &= E_{Q_x} \left[ n(t)_T p_x^Q \frac{(K - F_x(T, T))^+}{F_x(T, T) \cdot \tau / a_{x+t}^Q} \middle| F_t \right] \\ &= E_{Q_x} [n(t)(K - F_x(T, T))^+ | F_t] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Llegando de este modo a que

$$G(t) = n(t) \tau / a_{x+t}^Q (K \Phi(-d_2) - F_x(t, T) \Phi(-d_1))$$

donde

$$d_{1,2} = \frac{\log F_x(t, T) / K \pm \frac{1}{2} \sigma_{F_x}^2}{\sigma_{F_x}}$$

$\Phi(\cdot)$ : distribución acumulada de la normal estándar.

$$\sigma_{F_x}^2 = \int_t^T (|\sigma_x(u, T)|^2 + |\sigma_p(u, T)|^2) du.$$

Los parámetros,  $\bar{a}$  y  $\bar{\sigma}$ , para los que el modelo quedaría calibrado, serían aquellos que minimizaran esta distancia:

$$\arg \min \left( \sum_{i=1}^n \frac{|G_i - M_i(\bar{a}, \bar{\sigma})|}{G_i} \right)$$

siendo  $G_i$ : el precio de mercado del instrumento financiero descrito, y  $M_i(\bar{a}, \bar{\sigma})$ , el valor proporcionado por el modelo para este instrumento, considerando difusión en los tipos de interés y el tanto de mortalidad, como expondremos largamente en el capítulo 6.

Dado que no existen en la actualidad instrumentos calibrantes de estas características, determinaremos los parámetros  $\bar{a}$  y  $\bar{\sigma}$ , a partir del ajuste de las tablas de mortalidad. Para ello nos serviremos del modelo de Lee – Carter, así como del ajuste del parámetro  $k_y$ . Recordemos que la medida de mortalidad ajustada fue

$$q_{x,y} = \exp(a_x + b_x k_y) + \varepsilon_{xy},$$

Además de los resultados del ajuste para los parámetros  $a_x$ ,  $b_x$  y  $k_y$ , disponemos de la volatilidad de la serie temporal del parámetro  $k_y$ , al que ajustamos un modelo ARIMA. Tanto para mujeres como para hombres andaluces ha ajustado bien un ARIMA(0, 1, 0) con constante negativa:

$$k_y = k_{y-1} + c + \varepsilon_y$$

siendo  $\varepsilon_y \approx N(0, \sigma_y)$ .

Teniendo en cuenta que el valor del tanto de mortalidad  $\mu_y$ , en términos del parámetro  $k_y$ , se determina como sigue:

$$\mu_y = -\ln(1 - \exp(a_{x+t-y} + b_{x+t-y} k_y))$$

obtenemos un estimador insesgado de la volatilidad inherente al parámetro  $\mu_y$ :

$$\sigma_\mu = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{y=t_0}^t \ln \left( \frac{1 - \exp(a_{x+t-y} + b_{x+t-y} \hat{k}_y)}{1 - \exp(a_{x+t-y} + b_{x+t-y} k_y)} \right)^2}$$

donde

$t$ : es el año final de la serie ajustada.

$t_0$ : es el año inicial de la serie ajustada.

$k_y$ : valor del parámetro obtenido por el método del SVD para el modelo de Lee – Carter una vez normalizado, para el año de calendario  $y$ .

$\hat{k}_y$ : valor del parámetro ajustado por el modelo ARIMA(0,1,0), para el año de calendario  $y$ .

Para el caso de las mujeres andaluzas podemos representar gráficamente el parámetro  $k_y$ , y el ajustado por el  $ARIMA(0,1,0)$ ,  $\hat{k}_y$ , para una mujer de 70 años en el año 2005, como sigue

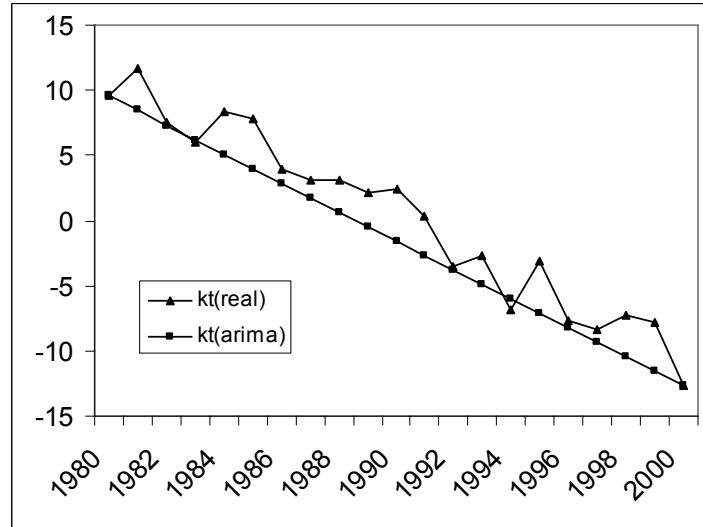


Gráfico 4.18.: Parámetro  $k_y$  del modelo de Lee - Carter y su ajuste mediante un  $ARIMA(0, 1, 0)$ .

Con respecto al parámetro  $\bar{a}$  o tasa de reversion a la media, nuestra propuesta para simplificar los algoritmos de valoración que surgen y que el árbol trinomial resultante, no sea especialmente abierto, es hacer

$$L = \frac{0,1835}{|M|} \leq 2$$

siendo

$L$  = apertura máxima del árbol trinomial;  $abs(j) \leq L$

$$M = \exp(-\bar{a}) - 1$$

con lo cual

$$\bar{a} \geq 0,09624$$

Una vez conocido el valor del parámetro  $\bar{a}$ , obtenemos el valor de  $\bar{\sigma}$  a considerar en el árbol como

$$\bar{\sigma} = \sigma_{\omega} \cdot \frac{(1 - \exp(-\bar{a}))}{\bar{a}}$$



#### 4.7. PROCESO ESTOCÁSTICO ASOCIADO AL FACTOR DE DESCUENTO ACTUARIAL

Vegas y Nieto (1993) definen la fuerza de capitalización actuarial  $\gamma(s)$ , que permite determinar el valor actual actuarial de un euro prometido en  $t$  para el caso de supervivencia del asegurado, a partir del factor de descuento actuarial ( ${}_{T-t}E_{x+t}$ ) como sigue

$${}_{T-t}E_{x+t} = E \left[ \exp \left( - \int_t^T \gamma(s) ds \right) \right]$$

siendo

$$\gamma(s) = \mu(s) + r(s)$$

$\mu(s)$ : fuerza de mortalidad para el instante  $s$ .

$r(s)$ : tipo instantáneo para el instante  $s$ .

El precio del bono con riesgo sería ahora

$${}_{T-t}E_{x+t} = P(t, T) \bar{A}(\tau) e^{-\bar{B}(\tau) \mu_x(t)} \quad (4.3)$$

donde

$P(t, T)$ : precio del bono sin riesgo según la dinámica de la expresión 3.3,

$$\tau = T - t,$$

$$\bar{B}(\tau) = \frac{1}{a} \left[ 1 - e^{-a\tau} \right],$$

$$\bar{A}(\tau) = \exp \left[ - \int_t^T \tilde{\theta}(s) \bar{B}(\tau) ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} (\bar{B}(\tau) - \tau) - \frac{\sigma^2}{4a} \bar{B}(\tau)^2 \right],$$

$\bar{\sigma}^2$  y  $\bar{a}$ : parámetros correspondiente a la calibración del tanto instantáneo de mortalidad.

$$\tilde{\theta}(t) = \bar{\theta}(t) + \rho \cdot \bar{\sigma}(s) \cdot \sigma(s) \cdot B(\tau).$$

$\rho$ : correlación entre el tipo instantáneo de interés y el tanto instantáneo de mortalidad.

$$B(\tau) = \frac{1}{a} \left[ 1 - e^{-a\tau} \right].$$

$\sigma$  y  $a$ : parámetros correspondiente a la calibración del tipo instantáneo.

En adelante, supondremos que la probabilidad de supervivencia y precio del bono cupón cero, son procesos estocásticos independientes que evolucionan según ya se ha expuesto en los apartados anteriores. En estas circunstancias, el factor de descuento actuarial,  ${}_{T-t}E_{x+t}$ , sería el siguiente proceso estocástico

$${}_{T-t}E_{x+t} = P(t, T) {}_{T-t}P_{x+t}$$

donde ahora

$P(t, T)$  : precio en  $t$  del bono cupón cero con vencimiento en  $T$ , según la expresión 3.3;

${}_{T-t}P_{x+t}$  : probabilidad de supervivencia en  $T$ , para un Asegurado de edad  $t$ , según la expresión 4.1.

La implementación práctica la llevaremos a cabo mediante métodos numéricos y más concretamente, un árbol trinomial recombinante tridimensional. Si consideramos el tanto de capitalización actuarial a corto en tiempo continuo derivado de la tabla de mortalidad dinámica como

$$\gamma^1_t = \mu^1_t + R_t$$

obtenemos el siguiente factor de descuento actuarial

$${}_1E_{x+t, y+t} = \exp(-\gamma^1_t)$$

El paso siguiente sería considerar la difusión en el tanto de mortalidad conjuntamente con la del tipo de interés.

Para el árbol trinomial conjunto obtenemos la siguiente configuración:

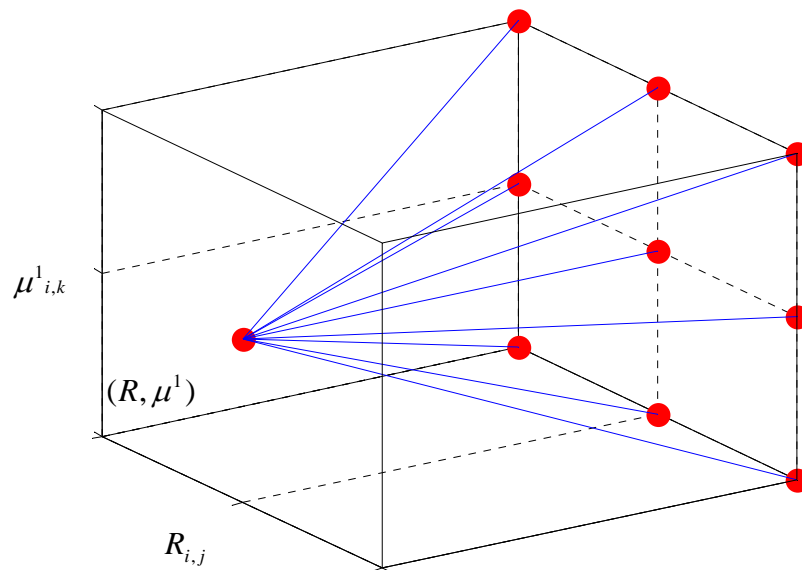


Figura 4.1. Transición del tipo de interés libre de riesgo y tanto de mortalidad a partir de un nodo central

Es decir, cada nodo da lugar a nueve ramas con sus correspondientes probabilidades de ocurrencia. Estas probabilidades de transición conjuntas, suponiendo independencia entre la curva de mortalidad y la ETTI, se obtienen simplemente como sigue

		$\mu^1_{i,k}$		
		Subida	mantenim.	bajada
$R_{i,j}$	Subida	$p_1^\mu \cdot p_1^R$	$p_2^\mu \cdot p_1^R$	$p_3^\mu \cdot p_1^R$
	mantenim.	$p_1^\mu \cdot p_2^R$	$p_2^\mu \cdot p_2^R$	$p_3^\mu \cdot p_2^R$
	bajada	$p_1^\mu \cdot p_3^R$	$p_2^\mu \cdot p_3^R$	$p_3^\mu \cdot p_3^R$

**Cuadro 4.28. Probabilidades de transición conjuntas del tipo de interés libre de riesgo y tanto de mortalidad a partir de un nodo central**

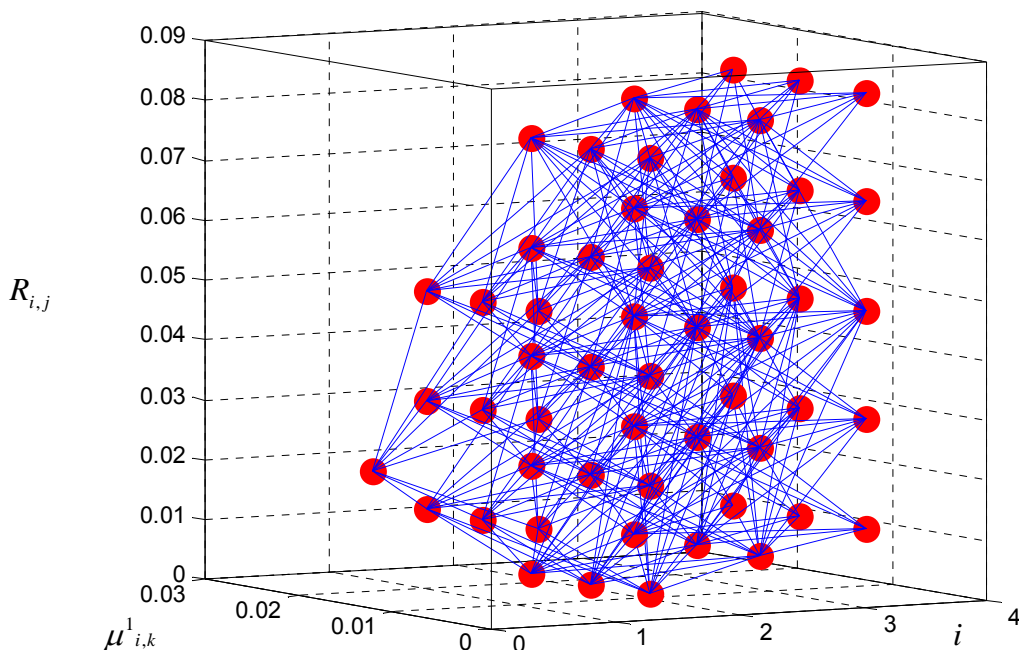
En adelante para identificar la transición a la que se halla referida la probabilidad, emplearemos dos subíndices: el primero corresponderá al tipo de interés,  $R_{i,j}$ , y el segundo a la medida de mortalidad,  $\mu^1_{i,k}$ , de manera que

$$p_{j,k} = p_j^R \cdot p_k^\mu$$

Dado que en este caso estamos tratando con tres dimensiones (tiempo, nivel de tipos a corto y nivel de mortalidad), cada nodo se especificará  $(i, j, k)$ , siendo el primer índice el nivel temporal, el segundo el nivel del nodo respecto al tipo a corto, donde  $j = 0$  es el nivel central, y el último el nivel del nodo desde el punto de vista de la mortalidad, siendo  $k = 0$  el nivel central. El tipo a plazo en el nodo  $(i, j, k)$  se denotará por  $R_{i,j}$ , y la medida de mortalidad se denotará por  $\mu^1_{i,k}$ . De este modo el tanto de capitalización actuarial sería en el nodo  $(i, j, k)$ :

$$\gamma^1_{i,j,k} = R_{i,j} + \mu^1_{i,k}$$

Él árbol de transición conjunto para nuestro ejemplo será



**Gráfico 4.19. Árbol de transición conjunta del tipo de interés libre de riesgo y tanto de mortalidad**



# CAPÍTULO 5

## EL RIESGO DE CRÉDITO EN EL VALOR RAZONABLE

### 5.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO

Aunque no nos decantamos sobre si debe y en qué grado debe ser incluido el riesgo de crédito en el valor razonable de las PTSV, se exponen una serie de propuestas para hacerlo.

El capítulo comienza con una pequeña introducción, en la que se expone una breve clasificación de los modelos de valoración del riesgo de crédito. Destacamos el modelo de Jarrow – Turnbull (1995) a través del apartado 5.3.3., ya que este modelo permite su calibración a mercado, lo cual es requerido para nuestro objetivo de acercamiento al valor razonable.

En el apartado 5.4. presentamos el modelo para la difusión del spread de crédito de Schönbucher (1999), y que desarrolla a partir del trabajo de Lando (1998). El motivo es que nos permitirá crear un árbol trinomial recombinante para el spread por riesgo de crédito y con este implementar un árbol trinomial en cuatro dimensiones, para la determinación del valor razonable de las PTSV. El apartado 5.4.3. expone la calibración de los parámetros de Vasicek, correspondientes al proceso estocástico del spread por riesgo, a partir de una opción sobre CDSs. Ya se ha expuesto previamente, que para que un instrumento financiero sea apto para calibrar, ha de ser negociado activamente. Encontrar este tipo de instrumento para la empresa aseguradora de la cual estamos valorando las PTSV, quizás puede ser complicado. Hasta que exista este mercado, tendríamos que inferir esta distribución a partir de información histórica, como ya hemos hecho con el tanto de mortalidad.

De cualquier modo, con la incorporación de la difusión en el spread por riesgo de crédito, queda completo nuestro modelo teórico de determinación del valor razonable de las PTSV, tomando como subyacentes el tipo de interés libre de riesgo, el tanto de mortalidad y este spread por riesgo de crédito

### 5.2. INTRODUCCIÓN AL RIESGO DE CRÉDITO EN EL VALOR RAZONABLE

Durante la realización del presente trabajo, se está debatiendo si debe ser y en qué grado debe ser reflejado el riesgo de crédito en la valoración de las PTSV. La discusión de este tema nos podría llevar un libro entero.

Más que abordar una exposición profunda de las dos posturas enfrentadas, nuestro propósito aquí es resaltar la base lógica que hay detrás de cada reflexión del riesgo de crédito

en las estimaciones del valor razonable, presentar algunos argumentos que rebaten tal postura, y listar algunas cuestiones que merecen también ser comentadas, así como proponer varios métodos de determinación y cuantificación del riesgo de crédito en el ámbito del valor razonable.

La base racional que sustenta el reflejo de la calidad crediticia en el valor razonable de las PTSV es la siguiente:

- Las PTSV de una compañía es el activo de “alguien”. Desde la perspectiva del poseedor de la póliza, su valor se ve reducido por el riesgo de crédito de la compañía aseguradora. Por tanto, la calidad crediticia de la compañía aseguradora debe ser reflejada en el precio.
- Desde otro punto de vista, la compañía aseguradora mantiene en su balance las PTSV como pasivo para responder de los compromisos que surgen por la póliza. La compañía aseguradora podría extinguir su obligación pagando una cantidad al poseedor de la póliza. Esta cantidad deberá ser la misma que cualquier otra compañía pagaría por la póliza. Como el precio de la póliza refleja el riesgo de crédito de la aseguradora, la cantidad que le cuesta a la aseguradora mantener tal obligación refleja su propia calidad crediticia.
- La mayoría de los pasivos financieros de muchas industrias cuenta con un mercado de negociación pública, y el precio para tales deudas ya refleja la calidad crediticia del emisor. Posiblemente, una compañía podría comprar su deuda o negociar mas deuda en el mercado. En consecuencia, a no ser que el valor razonable de sus deudas sea establecido a su valor de mercado (el cual refleja su calidad crediticia), una compañía podría manipular sus ganancias por la negociación de su propia deuda.

Alguno de los argumentos principales en contra del reflejo de la calidad crediticia en los pasivos de una aseguradora incluyen lo siguiente:

- Si el valor de las PTSV refleja la calidad crediticia de la aseguradora, entonces las ganancias de la aseguradora pueden aumentar si su calidad crediticia disminuye. Ello es contrario a lo que en un principio se podría pensar, y proporciona información menos relevante a los usuarios sobre sus estados financieros.
- Los argumentos para reflejar la calidad crediticia en las PTSV se basan en la valoración de activos. Los activos se negocian, y sus valoraciones reflejan la calidad crediticia. Pero las PTSV, no se negocian. Por tanto, no hay valor de mercado para estas, y los modelos de valoración de activos no necesariamente se aplican a la valoración de las PTSV.
- Los valores de las PTSV que no son ajustados para reflejar el rating de crédito son más útiles a los usuarios de los estados financieros, incluyendo acreedores y compradores potenciales de la firma. Por ejemplo, el valor de las PTSV de una parte que asume responsabilidad para el pago de las prestaciones sería independiente de la calidad crediticia de la original parte responsable para cumplir con la obligación.

Para profundizar más en este tema, consultar:

- “Understanding deh Issues –Credit Standing and Liability Measurement”. Junio 2001 – Volumen 4, Serie 1, FASB, disponible en <http://www.fasb.org/articles&reports/vol4series1.shtml>
- Casualty Actuarial Society –“White Paper on Fair Valuing Property/Casualty Insurance Liabilities”, Section H –Credit Standing and Fair Value, disponible en: <http://www.casact.org/research/tffvl/inditex.htm>

La principal dificultad de la consideración del riesgo de crédito en el valor razonable, estriba en reflejar de alguna manera el precio del riesgo en el mercado.

### 5.3. MODELOS DE VALORACIÓN DEL RIESGO DE CRÉDITO

Podemos clasificar en tres grupos los distintos modelos de valoración del riesgo de crédito elaborados hasta ahora:

- En la primera clase de modelos, los pasivos se entienden como opciones establecidas contra los activos subyacentes de la compañía, con los pagos a todos los pasivos de la entidad en quiebra completamente especificados. La quiebra es determinada mediante la evolución de los activos de la firma en conjunción con varios pactos de deuda<sup>48</sup>.

Este enfoque es difícil de implementar en la práctica, porque la prioridad de la estructura de pagos a todos los pasivos de la compañía debe ser especificada e incluida en el proceso de valoración y esto es complicado<sup>49</sup>. Además, como este enfoque no usa información del rating, no nos sirve para valorar derivados crediticios cuyos pagos dependen directamente de la calidad crediticia, por ejemplo, los pagarés sensibles al crédito y los pagarés con difusión ajustada<sup>50</sup>.

- La segunda clase de modelos trata el riesgo de crédito como el pago de una fracción de cada euro prometido en el momento de quiebra. Dicha fracción viene dada exógenamente. La quiebra se produce cuando el valor de los activos subyacentes de la compañía queda por debajo de una frontera especificada exógenamente<sup>51</sup>. Este enfoque simplifica el cálculo, ya que los flujos de caja vienen determinados exógenamente y esto evita tener que establecer la prioridad de la estructura de pagos a todos los pasivos en quiebra de la compañía. Aún así, presenta dos inconvenientes: primero, se requieren estimaciones para los parámetros del valor de activos, lo cual no siempre es observable y segundo, no

---

<sup>48</sup> Por ejemplo, Black y Cox (1976), Chance (1990), Merton (1974), y Shimko, Tejima, y Van Deventer (1993).

<sup>49</sup> Jones, Mason, y Rosenfeld (1984).

<sup>50</sup> Das y Tufano (1995)

<sup>51</sup> Hull y White (1991) o Longstaff y Schwartz (1992)

funciona con varios derivados crediticios cuyos pagos dependen del rating crediticio de la deuda.

- La tercera clase de modelos evita estos dos últimos problemas. Esta clase, como la anterior, también contempla el riesgo de crédito como pago de una fracción de cada euro prometido en el momento de la quiebra; pero dicho momento es ahora dado como un proceso exógeno<sup>52</sup>. Es decir, el proceso de quiebra viene especificado exógenamente y no depende explícitamente de los activos subyacentes de la compañía. La ventaja de este enfoque es que permite establecer asunciones exógenas en observables. Esta clase de modelos presume la ausencia de oportunidad de arbitraje<sup>53</sup>.

Este tercer enfoque puede ser fácilmente modificado para incluir la información del rating en el proceso de quiebra, y por tanto, puede ser utilizado para valorar derivados crediticios dependientes del rating. El modelo de Jarrow – Lando – Turnbull incorpora sobre el modelo de Jarrow y Turnbull precisamente esta mejora, es decir, caracterizar el proceso de quiebra como un estado finito del proceso de Markov en el rating de crédito de la firma.

Por otra parte existe multitud de modelos para cuantificar este riesgo que recogen ideas de algunos de los enfoques anteriores y que son utilizados habitualmente por diversas compañías, como el modelo de Credit-Suisse (CreditRisk+), el modelo de J. P. Morgan (Credit Metrics), que supone un desarrollo sobre el conocido Risk Metrics, ... Se incluye el siguiente cuadro resumen

METODOLOGÍA	ENFOQUE
Credit Metrics	Supone que el precio de la deuda depende del Rating, centrandó su atención en la incertidumbre asociada a la variación en el mismo.
Credit Risk +	Adopta un punto de vista actuarial y está diseñado para medir el riesgo de una cartera de deuda minorista.
Modelo de Vasicek en Basilea II	Metodología parecida a la anterior, es la que se ha adoptado en el Nuevo Acuerdo de Capital de Basilea
Credit Portfolio View	Introduce aspectos econométricos y la incertidumbre de ciclos económicos.
Credit Manager	Incorpora un índice que intenta capturar la calidad crediticia de una empresa a partir de datos de balance y de la volatilidad que tiene el activo de la empresa.

<sup>52</sup> Jarrow y Turnbull (1995) y Litterman e Iben (1991)

<sup>53</sup> Se puede hacer una analogía entre esta clase de modelos y aquellos usados para valorar opciones sobre acciones de interés variable, es decir, las asunciones exógenas en observables, de Jarrow y Turnbull (1995) es igual que Black y Scholes (1973), como la asunción de Merton (1974) en valores de la firma es equivalente al enfoque de Geske (1979).



#### Cuadro 5.1. Modelos de cuantificación del riesgo de crédito.

A continuación, se presentan cuatro métodos que proporcionan una base teórica sobre como medir el precio del riesgo de crédito en el mercado, así como ejemplos de aplicación.

##### 5.3.1. Método de valoración de opciones

Tanto Merton (1974) como Black y Scholes (1973) ya sugirieron que los títulos corporativos se pueden considerar como opciones sobre los activos de la compañía. Estos activos incluyen el valor del inmovilizado, el fondo de comercio, etc., en definitiva, partidas difíciles de valorar.

Supongamos el caso de una compañía sencilla del sector no financiero, con accionistas y negociación de bonos. Los titulares de los bonos, lo son por el valor de los activos hasta el nominal de la deuda, y los accionistas son titulares por el valor de los activos en exceso de este nominal. Lo anterior se traduce en que se puede considerar una acción, como una opción de compra sobre los activos, y cuyo strike será el nominal de la deuda. De este modo para un bono cupón cero, si suponemos tipos de interés constantes, el valor de una acción se puede determinar a partir de la fórmula de Black – Scholes de valoración de opciones de compra. El valor del bono sería la diferencia entre la opción de compra de la acción y el activo subyacente. Así, los titulares de los bonos se les puede considerar poseedores de acciones y deudores de la venta de una opción de compra a accionistas.

Recordemos la fórmula de Black – Scholes para una opción de compra:

$$C = AN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(A/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

C = valor de la opción call = valor de la acción en el modelo de Merton

A = valor actual del activo de la compañía,

$N(d)$  = densidad normal estándar función de d,

X = precio de ejercicio = valor nominal de la deuda,

r = tipo libre de riesgo constante,

T = vencimiento para la opción,

$\sigma$  = desviación típica anual de la rentabilidad de las acciones.

Entonces el valor del bono es A-C. Cabe hacer en este punto tres consideraciones:

- Primero, el valor del bono con riesgo converge al valor del bono libre de riesgo conforme aumenta el valor de activo de la compañía.
- Segundo, el valor del bono decrece conforme aumenta la volatilidad del activo.
- Tercero, la rentabilidad esperada sobre los activos no es un componente explícito del valor del bono.

Para analizar la primera observación nos fijamos en que un incremento en el valor del activo provoca un aumento en el valor de la acción y el valor de la deuda, hasta un límite. Lo más que un bono puede valer al vencimiento es  $X$ , el valor nominal de la deuda. Conforme el valor de los activos aumenta, el valor de la acción converge a

$$C = A - Xe^{-rT}. \quad (5.1.)$$

También observamos que conforme  $A$  crece mucho respecto a  $X$ ,  $d_1$  y  $d_2$  incrementan y el valor de la opción call (acción) aumenta hacia un límite superior de (5.1.). Luego el valor del bono es

$$A - C = Xe^{-rT}.$$

De este modo, para numerosos valores de activos, el bono está libre de riesgo y el precio del bono es el flujo de caja prometido descontado al tipo libre de riesgo. Vemos que este resultado se mantiene para activos relativamente “conservadores” con una reducida desviación típica o para activos muy arriesgados con una desviación típica alta. Para cualquier nivel de riesgo dado (la desviación típica de activos) el bono estará libre de riesgo para un número suficiente de activos.

El segundo punto trata con la volatilidad. Un incremento en la volatilidad hace aumentar el valor de una opción. Esto se puede ver tomando la derivada respecto a  $\sigma$  de la fórmula de valoración de la opción. Por consiguiente, en igualdad de condiciones, el valor del bono decrece cuando aumenta la volatilidad. Intuitivamente a mayor volatilidad en los activos, mayor probabilidad de que la compañía no pueda hacer frente a sus pagos y los titulares de los bonos reciban los activos de la firma como pago parcial de su prestación. Así, el primer punto no viola la intuición de este segundo punto.

En cuanto a la última consideración, ya hemos visto en el punto 2.4.4. que en la valoración de un Seguro de Vida al tipo libre de riesgo, consideramos las probabilidades martingala riesgo neutral como sigue:

$$S = \frac{\pi_x S_{px} + (1 - \pi_x) S_{qx}}{1 + r}$$

determinándose la probabilidad riesgo neutral como vimos,

$$\pi_x = p_x - \lambda \cdot \sqrt{p_x \cdot q_x}$$

es decir, en función de las probabilidades ciertas y el precio de mercado del riesgo asociado con la incertidumbre sobre el pago prometido. La misma intuición se mantiene en una fórmula más complicada de valoración de opciones de Black-Scholes. El precio de mercado del riesgo de activo de la compañía entra en la relación entre la medida de martingala,  $N(d)$  en la fórmula de valoración de la opción, y la densidad de probabilidad “cierta”.

Tenemos una representación alternativa del valor de un bono corporativo en el marco de la valoración de una opción. Recordemos la relación de paridad “put-call”

$$P = C + Xe^{-rT} - A$$

donde  $P$  es el precio de una opción de venta sobre los mismos activos,  $A$ , teniendo el mismo precio de ejercicio,  $X$ , y el mismo vencimiento,  $T$ , que la opción de compra,  $C$ . La expresión de paridad put-call se puede volver a escribir como

$$A - C = Xe^{-rT} - P. \quad (5.2.)$$

Obsérvese que el lado de la izquierda de esta expresión es el valor del bono, como se ha descrito arriba. La parte derecha es el precio del bono con riesgo menos una opción de venta. Así, el valor de un bono corporativo puede ser descompuesto en un bono libre de riesgo y una opción de venta sobre los activos de la compañía. Por conveniencia referiremos el valor del flujo de caja del bono, descontado a los tipos libres de riesgo, como valor de un bono sintético libre de riesgo. De esta manera, la descomposición implica dos términos: el valor de un bono sintético libre de riesgo y la opción de venta. Esta es una descomposición útil para determinar la sensibilidad respecto a los cambios en el tipo de interés y los cambios en la calidad de crédito. Cambios en el tipo de interés impactarán en ambos términos, pero el precio del bono libre de riesgo capturará sólo el puro valor del dinero en el tiempo. Cambios en la calidad crediticia, serán capturados por el valor de la opción de venta.

Es importante caer en la cuenta de que la forma de valorar una opción difiere del simple descuento del flujo de caja del pasivo a los tipos libres de riesgo, sino que ha de haber alguna medida del riesgo. Dicha medida se toma de manera adecuada en el presente método de descomposición. No es sin embargo, una buena medida del riesgo, usar la rentabilidad de la cartera de activo como tipo de descuento, ya que el rendimiento de la cartera de activo no es la clave del riesgo en pasivos. Las claves son la sobrecapitalización  $(A - X)$  y la volatilidad del rendimiento de activos.

Cuando hablamos de más de un periodo podemos recurrir a un modelo dinámico de estimación de la ETTI, como por ejemplo el de Hull y White. La diferencia con la ecuación (5.2.) anterior es que  $Xe^{-rT}$ , tendría que ser sustituido por

$$E_r[Xe^{-rT}],$$

tal como se ha establecido en el apartado anterior. Siendo como ya se ha visto  $E_r$ , la esperanza de riesgo neutral (martingala) sobre posibles tipos de interés. La ecuación (5.2.) anterior, quedaría como sigue:

$$A - C = E_r [Xe^{-rT}] - P. \quad (5.3.)$$

El valor de la put, P, dependerá de la sobrecapitalización actual,

$$A - E_r [Xe^{-rT}],$$

y de la volatilidad del activo, como se comentó arriba.

### 5.3.2. Modelo de Jarrow-Turnbull

Este modelo utiliza la información disponible en precios del mercado, más algún dato exógeno de análisis, para de ahí, suponiendo que el mercado está libre de arbitraje, deducir la probabilidad que el mercado está adjudicando, a través de precios, a la evolución estocástica (riesgo - neutro) de los distintos subyacentes. El modelo de Jarrow-Turnbull requiere de:

1. La ETTI sin riesgo actual, así como su evolución obtenida mediante un modelo dinámico de estimación que ajuste la ETTI actual, como puede ser el de Hull - White.
2. La ETTI actual de las deudas cuyo riesgo queremos analizar.

Esta última se sitúa por encima de la anterior, además, el diferencial crece con el tiempo a vencimiento.

Este modelo asume que dicho diferencial se debe exclusivamente al riesgo de contrapartida (riesgo de crédito), haciendo caso omiso de liquidez u otros posibles factores.

3. Tasa de recuperación asociada a la deuda en caso de insolvencia. Será un número comprendido entre 0 y 1. En caso de impago, por cada euro se recuperan  $\delta$  euros. Este es el único dato exógeno.

El intervalo de tiempo fijo lo denotamos como antes por  $\Delta t$ , que en los ejemplos será 1 año. La ETTI sin riesgo hoy la denotamos como hemos hecho con anterioridad por  $P(0, n)$ , e incorporamos la ETTI con riesgo (correspondiente a la deuda que pretendemos valorar), y que denotamos por  $P^c(0, n)$ : es el precio hoy del bono cupón cero con riesgo que vence en tiempo  $n\Delta t$ , cuyo nominal es 1 y también es un dato de mercado. El diferencial de precios lo denotamos por

$$\phi(0, n) = \frac{P^c(0, n)}{P(0, n)}$$

y debe cumplir que

$$0 \leq \phi(0, n) \leq \phi(0, n-1) \leq 1$$

es decir, el precio del bono con riesgo tiene que decrecer con el tiempo con respecto al bono sin riesgo, debido a la acumulación progresiva del riesgo.

Recordemos que hemos llamado  $R_i$  al tipo continuo anual sin riesgo para el período  $i\Delta t$ , siendo una variable aleatoria, cuya evolución la tenemos ya especificada a partir del modelo Hull – White que expusimos en el capítulo 3. A continuación introducimos el proceso de la cuenta bancaria,  $\beta(n)$ , la variable aleatoria definida mediante

$$\beta(n) = \exp\left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} R_j\right)\right),$$

Inicializándola con el dato adicional de que  $\beta(0) = 1$  tenemos

$$P(0, n) = Ep\left(\frac{1}{\beta(n)}\right)$$

Introducimos  $\tau^*$  como el tiempo aleatorio en el que ocurre el estado de quiebra<sup>54</sup>, el cual consideramos estado absorbente, es decir, que una vez se ha producido no es posible cambiar de estado. Los flujos de caja procedentes del bono  $P^c(0, n)$  serán  $\delta$  si  $\{\tau^* \leq n\}$ , y 1 si  $\{\tau^* > n\}$ . Así

$$P^c(0, n) = Ep\left(\frac{1}{B(n)}(\delta \cdot 1_{\{\tau^* \leq n\}} + 1_{\{\tau^* > n\}})\right)$$

siendo  $1_{\{\tau^* \leq n\}}$  la función indicadora del evento  $\{\tau^* \leq n\}$ .

A continuación, asumimos que el proceso estocástico de evolución de tipos  $\{R_i\}$  y el proceso del momento de quiebra, representado como  $\tau^*$  son estadísticamente independientes. Bajo esta asunción, podemos calcular

$$P^c(0, n) = Ep\left(\frac{1}{B(n)}\right) \cdot Ep(\delta \cdot 1_{\{\tau^* \leq n\}} + 1_{\{\tau^* > n\}}) = P(0, n) \cdot (\delta + (1 - \delta) \cdot c(0, n))$$

donde  $c(0, n) = Ep(\tau^* > n)$ . De aquí podemos deducir

$$\phi(0, n) = \frac{P^c(0, n)}{P(0, n)} = (\delta + (1 - \delta) \cdot c(0, n))$$

y ya es inmediato

$$c(0, n) = \frac{\phi(0, n) - \delta}{1 - \delta} \tag{5.4.}$$

<sup>54</sup> El término quiebra no debe ser interpretado demasiado literal. En nuestro contexto, se refiere a cualquier caso de “peligro” financiero que lleve a los propietarios de bonos a recibir menos de lo que se les prometió.

Como ejemplo vamos a considerar un título de renta fija cupón cero de duración 5 años, cuya tasa de recuperación vamos a suponer del 75%. Si suponemos que el precio de un bono cupon cero de las mismas características pero sin riesgo de crédito es  $P(0,5) = 0,831644$ , y que el precio del título cupón cero con riesgo,  $P^c(0,5)$  que nos ocupa es 0,821249, tendríamos un diferencial de precios de:

$$\phi(0,n) = \frac{P^c(0,n)}{P(0,n)} = \frac{P^c(0,5)}{P(0,5)} = \frac{0,821249}{0,831644} = 0,9875$$

obteniendo una probabilidad de default de

$$c(0,5) = \frac{\phi(0,5) - \delta}{1 - \delta} = \frac{0,9875 - 0,75}{1 - 0,75} = 0,95$$

## 5.4. PROCESO ESTOCÁSTICO ASOCIADO AL SPREAD POR RIESGO DE CRÉDITO

### 5.4.1. Resultados analíticos

Siguiendo a Lando (1998) consideraremos el tiempo hasta el default,  $\tau^*$ , a partir de un proceso de Cox. Consideramos  $N(t)$  como un proceso de Poisson en tiempo no homogéneo e intensidad  $\lambda(t)$ . La intensidad  $\lambda(t)$ , también denominada intensidad del proceso de Cox, es un proceso estocástico adaptado con

$$\int_0^t \lambda(s) ds < \infty \quad \forall t > 0,$$

Tendríamos que

$$N(t) := \max\{i \mid \tau_i \leq t\} = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{\tau_i \leq t\}}$$

La probabilidad de obtener exactamente n saltos sin conocer la realización del proceso sería:

$$\begin{aligned} P_t[N(T) - N(t) = n] &= E_t \left[ P \left[ N(T) - N(t) = n \mid \{\lambda(s)\}_{\{T \geq s \geq t\}} \right] \right] \\ &= E_t \left[ \frac{1}{n!} \left( \int_t^T \lambda(s) ds \right)^n \exp \left( - \int_t^T \lambda(s) ds \right) \right] \end{aligned}$$

Definimos el proceso

$$c(t,T) = E_t \left[ \exp \left( - \int_t^T \lambda(s) ds \right) \middle| F_t \right]$$

Para  $\tau > t$ ,  $c(t, T)$  será la probabilidad de supervivencia de la entidad desde  $t$  hasta  $T$ . Así en general tendremos que

$$1_{\{\tau > t\}} c(t, T) = E_t [1_{\{\tau > T\}}]$$

Definimos el factor para la reducción del tanto de incumplimiento,  $q'$ , como consecuencia de la tasa de recuperación,  $\delta$ , de manera que

$$E_t \left[ \exp \left( - \int_t^T q' \lambda(s) ds \right) \right] = \frac{P^c(t, T)}{P(t, T)} = \phi(t, T)$$

En primer lugar analizaremos el caso de independencia entre el proceso del tipo libre de riesgo, y el spread por riesgo de crédito. Supondremos que existe una probabilidad,  $Q$ , riesgo neutro, tal que para esta probabilidad, los diferenciales de precios,  $\phi(t, T)$ , por el numerario,  $\phi(0, t)$ ,

$$\frac{\phi(t, T)}{\phi(0, t)}$$

son martingala. Suponemos asimismo que la intensidad de default reducida,  $q' \lambda$ , cumple la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dq' \lambda(t) = (\bar{\theta}(t) - a q' \lambda(t)) dt + \bar{\sigma} dW(t) \quad (5.6)$$

A partir de un desarrollo similar al que seguimos para el tipo instantáneo llegamos a que

$$\phi(t, T) = \bar{A}(\tau) e^{-\bar{B}(\tau) q' \lambda(t)}, \quad \tau = T - t$$

donde como en el caso del tipo de interés libre de riesgo y el tanto de mortalidad

$$\bar{B}(\tau) = \frac{1 - e^{-a\tau}}{a}$$

$$\bar{A}(\tau) = \exp \left[ - \int_t^T \bar{\theta}(s) \bar{B}(\tau) ds - \frac{\sigma^2}{2a} (\bar{B}(\tau) - \tau) - \frac{\sigma^2}{4a} \bar{B}(\tau)^2 \right]$$

Supongamos ahora que existe cierta correlación,  $\rho$ , entre el tipo libre de riesgo y la tasa de default reducida. En este caso no podemos separar la evolución de ambos procesos. Siendo la difusión del tipo libre de riesgo

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t)$$

y la del spread por riesgo de crédito

$$dq' \lambda(t) = (\bar{\theta}(t) - aq' \lambda(t))dt + \bar{\sigma}dZ(t)$$

así como la correlación

$$dW(t)dZ(t) = \rho dt$$

llegamos a que el precio del bono con riesgo sería ahora

$$P^c(t, T) = P(t, T) \bar{A}(\tau) e^{-\bar{B}(\tau) q' \lambda(t)} \quad (5.7)$$

donde

$P(t, T)$  : precio del bono sin riesgo según la dinámica de la expresión 3.3

$$\tau = T - t$$

$$\bar{B}(\tau) = \frac{1}{a} \left[ 1 - e^{-a\tau} \right]$$

$$\bar{A}(\tau) = \exp \left[ - \int_t^T \tilde{\theta}(s) \bar{B}(\tau) ds - \frac{\sigma^2}{2a} (\bar{B}(\tau) - \tau) - \frac{\sigma^2}{4a} \bar{B}(\tau)^2 \right]$$

$\bar{\sigma}^2$  y  $a$  : parámetros correspondiente a la calibración de la tasa de incumplimiento reducida.

$$\tilde{\theta}(t) = \bar{\theta}(t) + \rho \cdot \bar{\sigma}(s) \cdot \sigma(s) \cdot B(\tau)$$

$$B(\tau) = \frac{1}{a} \left[ 1 - e^{-a\tau} \right]$$

$\sigma$  y  $a$  : parámetros correspondientes a la calibración del tipo instantáneo.

Al igual que ya hemos hecho en el caso del tipo continuo a corto definimos

$$q\lambda_t^1 = \int_t^{t+1} q' \lambda(t) dt$$

como el spread por riesgo de crédito vigente para el intervalo  $[t, t+1]$ .

Aquí el valor de la reducción sobre la tasa de default queda determinado como sigue

$$c(t, t+1) = \frac{E_t \left[ \exp(-q\lambda_t^1) \right] - \delta}{1 - \delta}$$

$$E_t \left[ \exp(-q\lambda_t^1) \right] = \delta + c(t, t+1) \cdot (1 - \delta)$$

con lo cual tenemos

$$q = -\log(\delta + c(t, t+1) \cdot (1 - \delta)) \cdot \frac{1}{\lambda_t^1}$$

De esta forma el valor de  $q$  será menor cuanto mayor sea la tasa de recuperación. Si  $\delta = 0$  el valor de  $q$  será 1.



En adelante, tomaremos el valor conjunto de  $q\lambda^1_t$ , como un spread por riesgo de crédito, que determina el diferencial de tipos de bonos con riesgo respecto a los de bonos sin riesgo. Usando el spread por riesgo de crédito,  $q\lambda^1_t$ , evitamos añadir una rama adicional que recoja la posibilidad de quiebra en el árbol trinomial. La medida que realmente implementaremos en nuestro modelo será la correspondiente a la expresión (5.6), con  $q\lambda^1_t$ .

#### 5.4.2. Implementación mediante árboles trinomiales

La implementación será diferente según exista correlación o no entre el tipo a corto,  $R_t$ , y el spread por riesgo de crédito,  $q\lambda^1_t$ . Si suponemos independencia entre  $q\lambda^1_t$  y el tipo  $R_t$  podemos generar árbol trinomial correspondiente a  $q\lambda^1_t$ , de forma independiente. Simplemente hemos de llevar a cabo los dos pasos expuestos para el tipo a corto suponiendo:

$$dq\lambda^1_t = (\bar{\theta}_t - aq\lambda^1_t)dt + \bar{\sigma}_t dW_t$$

El árbol trinomial con reversión a 0 del proceso auxiliar,  $S_t$ , no plantea ninguna diferencia respecto al correspondiente al tipo a corto y del tanto de mortalidad. En cuanto al paso 2 simplemente nos hemos de basar en el diferencial de precios de manera que

$$E[\exp(-q\lambda^1_t \cdot n)] = \phi(0, n),$$

Para determinar las cantidades  $\Omega_i$ , nos apoyaremos igualmente en los precios Arrow – Debreu. En este caso los pseudo - precios de Arrow – Debreu se determinan exactamente igual, pero sustituyendo el tipo a corto por  $q\lambda^1_t$ . El proceso sería como antes el que sigue:

- Inicializamos el algoritmo con  $Q_{0,0} = 1$ . Puesto que para  $i = 0$ ,  $j$  toma el valor 0 únicamente, resulta que  $\Omega_0 = q\lambda^1_0 = -\log \phi(0,1)$
- El siguiente paso consiste en calcular los pseudo - precios  $Q_{1,1}$ ,  $Q_{1,0}$  y  $Q_{1,-1}$ . De su definición, se deriva:

$$\left. \begin{aligned} Q_{1,1} &= Q_{0,0} \cdot p_1(1) \cdot \exp(-q\lambda^1_0) \\ Q_{1,0} &= Q_{0,0} \cdot p_2(0) \cdot \exp(-q\lambda^1_0) \\ Q_{1,-1} &= Q_{0,0} \cdot p_3(-1) \cdot \exp(-q\lambda^1_0) \end{aligned} \right\}$$

- Una vez se tiene un conjunto completo de pseudo - precios  $Q_{i,j}$  en un determinado paso de tiempo,  $i$ , ya podemos proceder al cálculo de la cantidad  $\Omega_i$ .

Aplicando Bayes determinamos:

$$\phi(0,2) = Q_{1,1} \exp(-(\Omega_1 + \Delta S_1)) + Q_{1,0} \exp(-\Omega_1) + Q_{1,-1} \exp(-(\Omega_1 - \Delta S_1))$$

Por lo que se obtiene la expresión

$$\Omega_1 = \log\left(\sum_{l=-1}^1 Q_{1,l} \cdot \exp(-l\Delta S_1)\right) - \log(\phi(0,2))$$

Quedaría perfectamente identificado el proceso como sigue

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i &= \log\left(\frac{\sum_{l=-1}^1 Q_{i,l} \cdot \exp(-l\Delta S_i)}{\phi(0,i+1)}\right) \\ Q_{i,l} &= \sum_{l'} Q_{i-1,l'} \cdot p_l(i-1,l') \cdot \exp(-q\lambda_{i-1,l}') \end{aligned} \right\}$$

Lo anterior sería suficiente de no existir correlación entre el tipo  $R_t$  y  $q\lambda_t^1$ . Si suponemos que existe una correlación de  $\rho$  entre ambos, hemos de generar conjuntamente el árbol  $(R_t, q\lambda_t^1)$ . El proceso siguiendo a Schönbucher (1999) sería en este caso en primer lugar construir un árbol trinomial para el tipo  $R_{i,j}$ , donde

$$dR_t = (\theta'_t - a' R_t)dt + \sigma'_t dW'_t$$

A continuación se determinan las probabilidades conjuntas de transición  $(R_{i,j}, q\lambda_{i,l}^1)$ . Para ello introduciremos el factor  $\varepsilon$ , de la siguiente manera si  $\rho < 0$

		$q\lambda_t^1$		
		Subida	mantenim.	bajada
$R_t$	Subida	$p_3^\lambda \cdot p_3^R - \varepsilon$	$p_2^\lambda \cdot p_3^R - 4\varepsilon$	$p_1^\lambda \cdot p_3^R + 5\varepsilon$
	mantenim.	$p_3^\lambda \cdot p_2^R - 4\varepsilon$	$p_2^\lambda \cdot p_2^R + 8\varepsilon$	$p_1^\lambda \cdot p_2^R - 4\varepsilon$
	bajada	$p_3^\lambda \cdot p_1^R + 5\varepsilon$	$p_2^\lambda \cdot p_1^R - 4\varepsilon$	$p_1^\lambda \cdot p_1^R - \varepsilon$

**Cuadro 5.1.: Probabilidades conjuntas de transición para rho<0**

Mientras que si  $\rho > 0$

		$q\lambda^1_t$		
		Subida	mantenim.	bajada
$R_t$	Subida	$p_3^\lambda \cdot p_3^R + 5\varepsilon$	$p_2^\lambda \cdot p_3^R - 4\varepsilon$	$p_1^\lambda \cdot p_3^R - \varepsilon$
	mantenim.	$p_3^\lambda \cdot p_2^R - 4\varepsilon$	$p_2^\lambda \cdot p_2^R + 8\varepsilon$	$p_1^\lambda \cdot p_2^R - 4\varepsilon$
	bajada	$p_3^\lambda \cdot p_1^R - \varepsilon$	$p_2^\lambda \cdot p_1^R - 4\varepsilon$	$p_1^\lambda \cdot p_1^R 5 + 5\varepsilon$

Cuadro 5.2: Probabilidades conjuntas de transición para  $\rho > 0$

Siendo

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{36}\rho & \rho > 0 \\ -\frac{1}{36}\rho & \rho < 0 \end{cases}$$

No obstante la implementación conjunta sólo puede llevarse a cabo cuando el valor de  $\varepsilon$  no es demasiado elevada, ya que de no ser así daría lugar a probabilidades de transición negativas.

Identificaremos  $p_{i,l} = p_i^R \cdot p_l^\lambda$ . Tenemos de esta manera una configuración tridimensional para cada nodo:

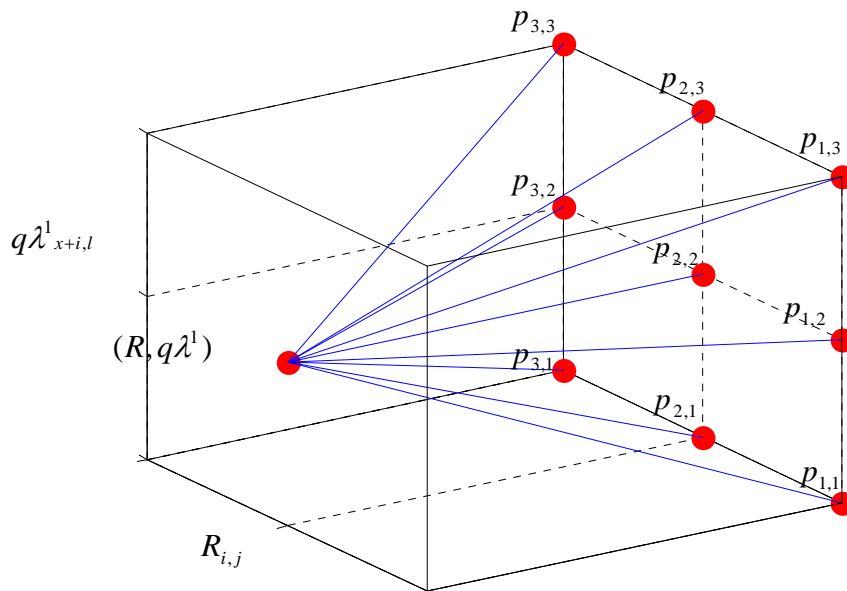


Figura 5.1. Transición del tipo libre de riesgo y spread por riesgo de crédito.

Al existir correlación, el proceso expuesto respecto al paso 2 para  $i \geq 1$  sería sustituido por:

- En primer lugar partimos de

$$E[\exp(-(R_n + q\lambda_n^1) \cdot n)] = P^c(0, n)$$

De esta forma se tendría en cuenta los tipos  $R_t$  en los precios Arrow – Debreu, como sigue. Como antes  $Q_{0,0} = 1$  y

$$\Omega_0 = q\lambda_0^1 = -\log \phi(1)$$

A continuación

$$Q_{i,j,l} = \sum_{\forall j',l'} p_{j,l}(i-1, j', l') \cdot Q_{i-1,j',l'} \cdot \exp(-(R_{i-1,j'} + q\lambda_{i-1,l'}^1))$$

Y de esta forma

$$P^c(0, i+1) = \sum_{j,l} Q_{i,j,l} \cdot \exp(-(R_{i,j} + \Omega_i + l\Delta S_i))$$

Así ya tenemos el algoritmo recursivo perseguido:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i &= \log \left( \frac{\sum_{j,l} Q_{i,j,l} \cdot \exp(-R_{i,j} + l\Delta S_i)}{P^c(0, i+1)} \right) \\ Q_{i,j,l} &= \sum_{\forall j',l'} p_{j,l}(j', l') \cdot Q_{i-1,j',l'} \cdot \exp(-(R_{i-1,j'} + q\lambda_{i-1,l'}^1)) \end{aligned} \right\}$$

Para ilustrar lo anterior supondremos:

t	P(0, t)	P <sup>c</sup> (0, t)
1	0,977469	0,967345
2	0,947188	0,927384
3	0,912773	0,884212
4	0,875619	0,839357
5	0,837634	0,794676

**Cuadro 5.3.: Curva cupón cero con y sin riesgo.**

Si partimos de unos parámetros de Vasicek para  $q\lambda_t^1$ , de  $\bar{a} = 0,4$  y  $\bar{\sigma} = 0,49452\%$ , y suponemos que no existe correlación, los valores de  $q\lambda_{i,l}^1$  son

J	0	1	2	3	4
1		0,017833	0,017790	0,017649	0,017508
0	0,010412	0,010727	0,010684	0,010543	0,010402
-1		0,003620	0,003577	0,003436	0,003295

Cuadro 5.4.: Valores temporales en el árbol del spread por riesgo de crédito a corto.

Gráficamente:

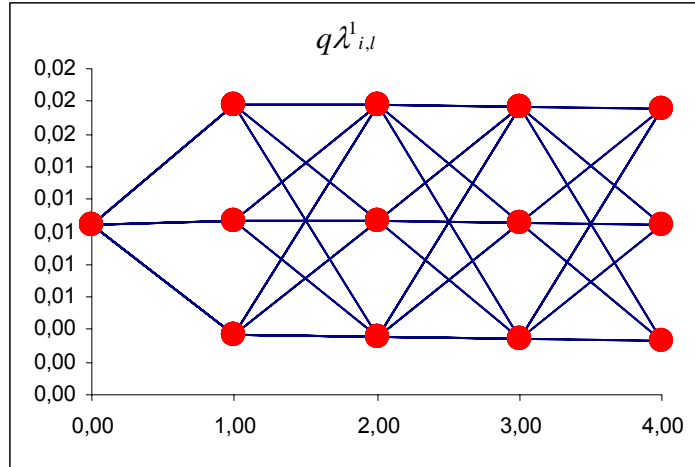


Gráfico 5.1.: Árbol de spread de riesgo de crédito a corto.

En cuanto a la valoración del bono con riesgo, se llevaría a cabo en nuestro caso con el siguiente árbol conjunto:

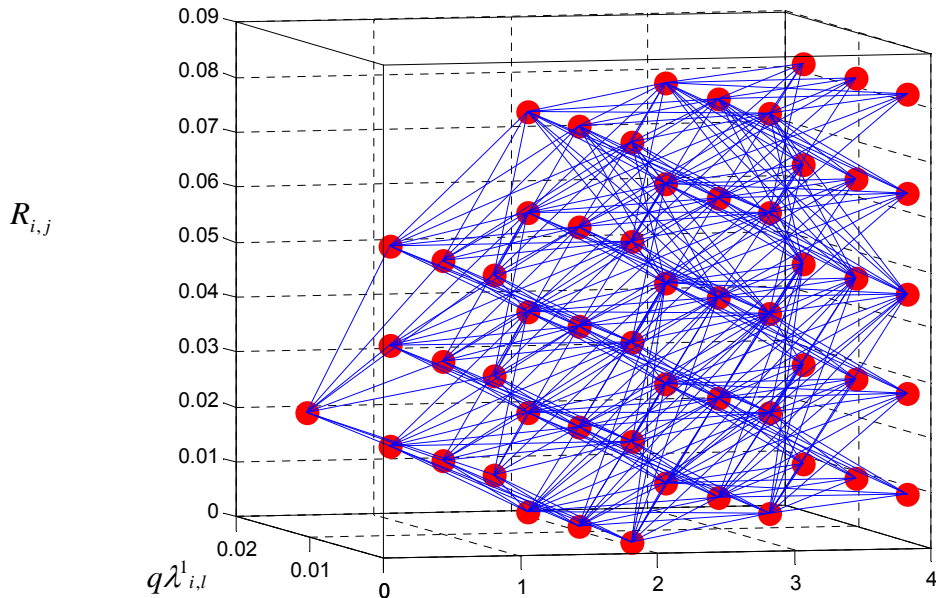


Gráfico 5.2.: Árbol conjunto del tipo libre de riesgo y el spread por riesgo de crédito a corto.

### 5.4.3. Calibración

Para poder calibrar el modelo necesitamos un derivado sobre el spread por riesgo de crédito, y una cotización de la correlación entre este spread y el tipo libre de riesgo.

En primer lugar introduciremos el concepto de derivados de crédito. Los derivados de crédito son instrumentos financieros over the counter (OTC), cuyo flujo de caja se halla vinculado al cambio en la calidad crediticia del subyacente. Desde su introducción, los mercados han crecido enormemente, pasando a ser un importante vehículo para que las instituciones financieras puedan protegerse o asumir riesgo crediticio.

Cabe destacar la figura del credit default swap (CDS). Un CDS consiste en un contrato entre dos partes, comprador y vendedor de protección, sobre el posible default también denominado evento de crédito, por parte del emisor de un título de referencia, conocido como nombre de referencia. Así el comprador de protección paga una prima periódica y constante hasta el vencimiento del contrato, también denominada spread del CDS, a cambio de una eventual contraprestación del vendedor de protección, en caso de que se produzca un default por parte del emisor del título de referencia. El CDS vence cuando se produzca el default o al término del plazo establecido en el contrato si este ocurre con anterioridad.

La contraprestación en caso de que se produzca el evento de crédito, consiste en la diferencia entre el nominal del título y su valor de mercado a la fecha del evento de crédito. La liquidación puede ser por diferencia entre los dos importes o por entrega física por parte del comprador de protección, del título a cambio de su valor nominal. Para su valoración introducimos el ya expuesto proceso de la cuenta bancaria, en tiempo continuo esta vez:

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(t)dt\right)$$

y suponemos como antes,  $\tau$ , el tiempo hasta el default.

Como ya se ha explicado el compromiso del comprador de protección supone el pago de una prima periódica postpagable. Los tiempos  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  en que se devenga la prima  $s(t_0)$  del CDS serán equidistantes,  $t_i = t_i + \Delta t$ , salvo si ocurre el default, en cuyo caso y para el período que media desde aquel en que se pagó la última prima,  $t_i^*$ , y la fecha del default,

$$\Delta \tau = \tau - t_i^*,$$

el comprador de protección habrá de pagar la prima proporcional. De este modo la valoración del compromiso del comprador de protección será:

$$C(t_0) = s(t_0) \cdot CDS^c(t_0)$$

donde

$$CDS^c(t_0) = Ep \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta(t_i)} \cdot \Delta t \cdot 1_{\{t_i \leq \tau\}} + \frac{1}{\beta(\tau)} \cdot \Delta \tau \cdot 1_{\{\tau \leq t_n\}} \middle| F_{t_0} \right]$$

En cuanto al compromiso del vendedor de protección, si suponemos que la tasa de recuperación, viene determinada exógenamente y es independiente del tiempo de default, su valor vendría dado por:

$$V(t_0) = Ep \left[ \frac{1}{\beta(\tau)} (1 - \delta) \cdot 1_{\{t_0 \leq \tau \leq t_n\}} \middle| F_{t_0} \right]$$

Dado que en  $t_0$ , ambos compromisos han de ser equivalentes,

$$V(t_0) = C(t_0),$$

el valor de la prima se determina inmediatamente

$$s(t_0) = \frac{V(t_0)}{CDS^c(t_0)}$$

Existen ya cotizaciones de derivados sobre CDSs, y podemos encontrar una descripción en Patel (2003), donde también se incluyen aplicaciones prácticas. En Hull y White (2002) y Schönbucher (2003) se adapta el modelo de Black para aplicarlo a opciones sobre CDSs.

Supondremos ahora que valoramos en  $t < t_1$ , es decir, antes del primer pago de prima del CDS, de la siguiente forma:

$$C(t) = s(t) \cdot CDS^c(t)$$

donde

$$CDS^c(t) = Ep \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta(t_i)} \cdot \Delta t \cdot 1_{\{t_i \leq \tau\}} + \frac{1}{\beta(\tau)} \cdot \Delta \tau \cdot 1_{\{\tau \leq t_n\}} \middle| F_t \right]$$

y

$$V(t) = Ep \left[ \frac{1}{\beta(\tau)} (1 - \delta) \cdot 1_{\{t_0 \leq \tau \leq t_n\}} \middle| F_t \right]$$

siendo ahora

$$s(t) = \frac{V(t)}{CDS^c(t)}$$

la prima del CDS que correspondería según la filtración hasta  $t$ ,  $F_t$ , respecto al tiempo hasta el default.

Consideremos también un derivado sobre el CDS, cuyo flujo de caja será

$$(s(t) - s^*)^+ CDS^c(t),$$

es decir, otorga el derecho pero no la obligación de comprar protección por la prima  $s^*$  en tiempo  $t$ .

El valor de este derivado es

$$CDSO(t) = 1_{\{\tau > t\}} Ep \left[ \frac{\beta(t)}{\beta(t_0)} (s(t_0) - s^*)^+ CDS^c(t_0) \cdot 1_{\{\tau > t_0\}} \middle| F_t \right]$$

Mediante el cambio a la medida de probabilidad  $Q$  expuesto por Schönbucher (2003) llegamos a

$$CDSO(t) = 1_{\{\tau > t\}} CDS^c(t) E_Q \left[ (s(t_0) - s^*)^+ \middle| F_t \right]$$

de manera que las primas  $s(t)$ , son martingalas. Suponiendo que la difusión es lognormal, es decir,

$$ds(t) = s(t)\sigma dW(t)$$

podríamos obtener explícitamente el valor de la opción anterior, a partir de la fórmula de Black:

$$CDSO(t) = 1_{\{\tau > t\}} CDS^c(t) [s(t)N(d_1) - s^*N(d_2)]$$

donde

$$d_{1,2} = \frac{\ln(s(t)/s^*) \pm \sigma^2 \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

En cuanto a la volatilidad  $\sigma$  de los spread  $s(t)$ , se determinada históricamente. Se seguiría un proceso similar al descrito en la calibración del tipo de interés. Puede verse un ejemplo en Hull y White (2002). Para ello y considerando:

$$\varphi_i = \ln(s_i) - \ln(s_{i-1})$$

obtenemos un estimador insesgado de la volatilidad de  $s_i$ ,  $\sigma^2_i$ , utilizando las  $m$  observaciones más recientes:

$$\sigma^2_i = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\varphi_{i-j} - \varphi)^2$$

siendo  $\varphi = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \varphi_{i-j}$ .

No obstante, si encontramos cotización de la correlación entre el tipo libre de riesgo y la probabilidad de default del nombre de referencia, se tendría en cuenta a efectos de la evolución futura de  $s(t)$ .



Finalmente en cuanto a la calibración, hemos de escoger una medida de bondad del ajuste. Si disponemos de  $n$  instrumentos tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \frac{|CDSO_j - M_j|}{CDSO_j}$$

siendo  $CDSO_j$  el precio de mercado del  $j$ -ésimo instrumento y  $M_j$  es el precio proporcionado por el modelo. El modelo quedaría calibrado para los parámetros que minimizaran esta distancia

$$\arg \min \left( \sum_{j=1}^n \frac{|CDSO_j - M_j(\bar{a}, \bar{\sigma})|}{CDSO_j} \right) \quad (5.8)$$

## 5.5. DIFUSIÓN DEL TIPO DE INTERÉS, SPREAD POR RIESGO DE CRÉDITO Y TANTO DE MORTALIDAD

### 5.5.1. Resultados analíticos

Si introducimos este spread por riesgo de crédito,  $q\lambda_t^1$ , el valor actual actuarial de un euro prometido en caso de supervivencia del asegurado, será ahora

$${}_1E^c_{x+t} = E \left[ \exp \left( - (R_t + \mu_{x+t}^1 + q\lambda_t^1) \right) \right] \quad (5.9)$$

correspondiente a la suma de los importes que recibiría el Tomador en caso de solvencia de la aseguradora:

$${}_1E^v_{x+t} = E \left[ \exp \left( - (\mu_{x+t}^1 + R_t + \lambda_t^1) \right) \right]$$

y en caso de quiebra de la aseguradora:

$${}_1E^w_{x+t} = E \left[ \exp \left( - (\mu_{x+t}^1 + R_t) \right) \cdot (1 - \exp \left( - \lambda_t^1 \right)) \cdot \delta \right]$$

Como ya se ha expuesto consideraremos el spread por riesgo de crédito para simplificar.

Suponiendo difusión en todos los términos del tanto de capitalización actuarial, e independencia entre el tanto de mortalidad y el resto de subyacentes considerados, el proceso para el valor actual actuarial en tiempo continuo sería:

$${}_{T-t}E_{x+t} = P^c(t, T) {}_{T-t}P_{x+t}$$

donde,  $P^c(t, T)$ , es el valor del bono con riesgo, según la dinámica de la expresión 5.7, y  ${}_{T-t}P_{x+t}$ , la probabilidad de supervivencia en  $T$ , para un Asegurado de edad  $x+t$ , según la expresión 4.1.

### 5.5.2. Implementación mediante árboles trinomiales

En cuanto a su implementación mediante árboles trinomiales, podemos partir del árbol conjunto  $(q\lambda^1_t / R_t)$ , y combinarlo con el correspondiente a  $\mu^1_t$ . Para ello obtenemos las probabilidades de transición conjuntas, suponiendo independencia entre  $\mu^1_t$  y el resto, si partimos de las probabilidades establecidas en los cuadros 5.1. y 5.2., simplemente como:

$$p^\mu \cdot p^{R,\lambda}$$

En adelante, para identificar la transición a la que se halla referida la probabilidad, emplearemos tres subíndices: el primero corresponderá al tipo  $R_{i,j}$ , el segundo a la medida  $\mu^1_{i,k}$  y el último para  $q\lambda^1_{i,l}$ , de manera que

$$P_{j,k,l} = p_{j,l}^{R,q\lambda} \cdot p_k^\mu$$

Dado que en este caso estamos tratando con cuatro dimensiones (tiempo, nivel de tipos a corto, nivel de tanto de mortalidad y nivel de spread de crédito), cada nodo se especificará  $(i, j, k, l)$ , siendo el primer índice el nivel temporal, el segundo corresponde al nivel del tipo a corto, el tercero al nivel desde el punto de vista de la mortalidad, y el último el nivel del spread por riesgo de crédito. El tipo a plazo en el nodo  $(i, j, k, l)$  se denotará por  $R_{i,j}$ , la medida de mortalidad será  $\mu^1_{i,k}$  y el spread por riesgo de crédito,  $q\lambda^1_{i,l}$ . De este modo el tanto de capitalización actuarial sería en el nodo  $(i, j, k, l)$ :

$$\gamma^1_{i,j,k,l} = R_{i,j} + \mu^1_{x+i,k} + q\lambda^1_{i,l}$$

Cada nodo tendría una configuración de transición cuatridimensional con 27 ramas, de la siguiente forma:

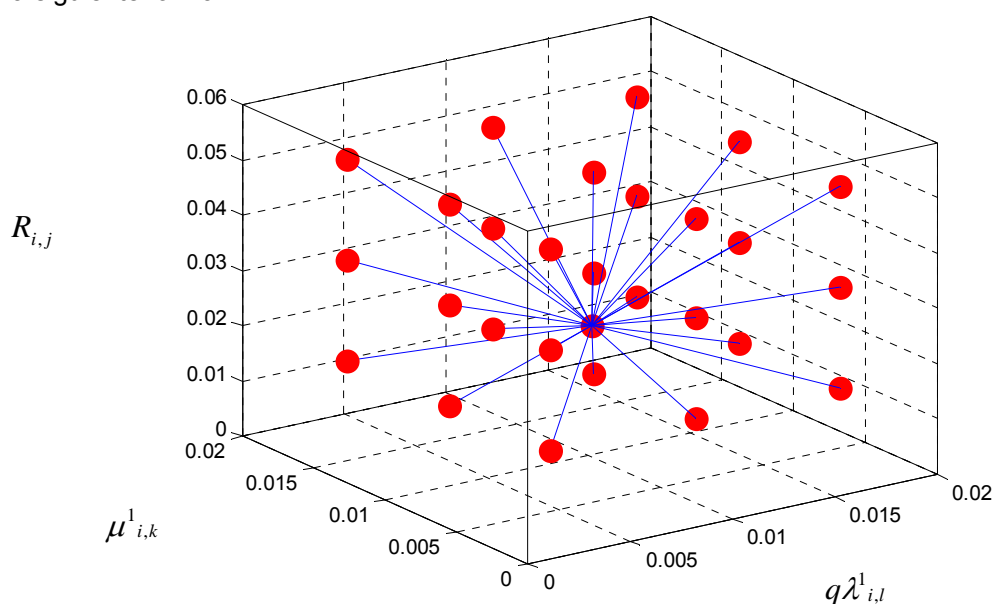


Figura 5.2. Transición de los tres subyacentes considerados a partir del nodo origen

# CAPÍTULO 6

## ESTIMACIÓN DEL VALOR RAZONABLE

### 6.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO

Este capítulo expone la metodología para el cálculo de las PTSV con difusión en los tipos de interés, el spread por riesgo de crédito y el tanto de mortalidad. Asimismo presenta un método simplificado de estimación del valor razonable correspondiente a las opciones de rescate y de participación en beneficios implícitas en gran parte de Pólizas de Seguros de Vida.

El apartado 6.2. sin considerar riesgo de crédito, explica como se valoran las PTSV a través del árbol trinomial, cuyas dimensiones serán el tiempo, el nivel de tipos de interés y el nivel del tanto de mortalidad. El tanto de capitalización actuarial tendría difusión en el tipo de interés, en el tanto de mortalidad y no consideraría spread por riesgo de crédito:

$$\gamma^1_{i,j,k} = R_{i,j} + \mu^1_{i,k}$$

En los apartados 6.3. y 6.4 se propone una metodología para estimar el valor razonable correspondiente a una póliza de seguro que incluye una opción de rescate y participación en beneficios, respectivamente.

El apartado 6.5. incorpora en la valoración el spread por riesgo de crédito, de forma que el tanto de capitalización actuarial vendría definido como:

$$\gamma^{c1}_{i,j,k,l} = R_{i,j} + \mu^1_{i,k} + q\lambda^1_{i,l}$$

En dos subapartados se expone la valoración de las opciones de rescate y participación en beneficios suponiendo difusión en todos los subyacentes.

### 6.2. VALORACIÓN DE LAS PTSV CON DIFUSIÓN DEL TIPO DE INTERÉS Y MEDIDA DE MORTALIDAD

La valoración de las PTSV bajo la probabilidad  $Q$ , riesgo – neutro si mantenemos la notación que usamos en el capítulo 2 sería

$$E_Q[V(t,T)|F_t] = E_Q[K(t,T) - \Pi(t,T)|F_t]$$

donde  $K(t,T)$  es el proceso de las prestaciones y gastos, y  $\Pi(t,T)$ , es el proceso de las primas.

Nuestra propuesta es valorar las PTSV en tiempo discreto a través del árbol trinomial para la difusión de los subyacentes considerados. Valorar con el árbol trinomial para la difusión de los tipos de interés, consiste básicamente en descontar desde el corte temporal en que tiene lugar el vencimiento de la Póliza hasta el de la fecha de valoración, el flujo de caja proporcionado por la Póliza de Seguro de Vida. Para este descuento se tendrá en cuenta el tipo  $R_{i,j}$  y el tanto de mortalidad,  $\mu^1_{i,k}$ , correspondiente a cada nodo. El transcurso desde un determinado nodo a otro se realizará, según las probabilidades de transición entre nodos.

Recordemos que los nodos en el árbol se especifican  $(i, j, k)$ , siendo el primer índice el nivel temporal, el segundo el nivel del nodo respecto al tipo de interés, donde  $j = 0$  es el nivel central, y el tercero el nivel del nodo respecto al tanto de mortalidad, donde  $k = 0$  es el nivel central. Para los primeros  $i$ 's el índice  $j$  va desde  $j = -i$  hasta  $j = i$ ; y el índice  $k$  va desde  $k = -i$  hasta  $k = i$ , pero más adelante para  $i$ 's posteriores ambos índices se hallan limitados para garantizar la estabilidad del árbol trinomial y todas las probabilidades de transición sean positivas (incluida  $p_2$ ).

El valor de las PTSV en el nodo  $(i, j, k)$ , de  $V(i, j, k)$ , será:

$$V(i, j, k) = \exp(-\gamma^1_{i,j,k} \cdot \Delta t) \cdot \left[ S_{i+1} + \sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^3 p_{s,r} V(i+1, j_s, k_r) \right] + F_i \cdot (1 - \exp(-\mu^1_{i,k} \cdot \Delta t)) \quad (6.1)$$

donde

$\gamma^1_{i,j,k} = R_{i,j} + \mu^1_{i,k}$ : tanto de capitalización actuarial con difusión en los tipos de interés.

$p_{s,r} = p_s^R \cdot p_r^\mu$ .

$S_{i+1}$ : flujos de caja por garantías, gastos o primas pagaderos a la supervivencia del asegurado en  $i+1$ . Las primas a cobrar se considerarán con signo menos.

$F_i$ : flujos de caja por garantías o gastos pagaderos al fallecimiento del asegurado entre  $i$  e  $i+1$ .

En este caso hemos establecido la hipótesis de fallecimiento al inicio del periodo considerado.

Si suponemos el fallecimiento al final del período considerado:

$$V(i, j, k) = \exp(-\gamma^1_{i,j,k} \cdot \Delta t) \cdot \left[ S_{i+1} + \sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^3 p_{s,r} V(i+1, j_s, k_r) \right] + \exp(-R_{i,j} \cdot \Delta t) \cdot F_i \cdot (1 - \exp(-\mu^1_{i,k} \cdot \Delta t))$$

Y por último si tiene lugar a mitad del período:

$$V(i, j, k) = \exp(-\gamma^1_{i,j,k} \cdot \Delta t) \cdot \left[ S_{i+1} + \sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^3 p_{s,r} V(i+1, j_s, k_r) \right] \\ + \exp(-R_{i,j} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta t) \cdot F_i \cdot (1 - \exp(-\mu^1_{i,k} \cdot \Delta t))$$

En adelante y para simplificar la exposición consideraremos el fallecimiento a comienzos del período.

Este proceso se repite hasta obtener el valor  $V(0,0,0)$ , que sería el valor actual en el árbol trinomial.

Los flujos de caja serán positivos si son de pago y negativos si son de cobro (primas pendientes de cobro). Esto es así debido a que las PTSV son una obligación para la compañía aseguradora, y como tal queda minorada por los flujos de cobro a los que tiene derecho.

Para ilustrar la valoración en el árbol en un contexto de Pólizas de Seguros, nos centraremos en la más simple PTSV, como es una Póliza de Seguro pura de Ahorro, lo que denominamos Capital Diferido. Como hipótesis técnicas, consideramos un interés técnico garantizado del 3%, los gastos de gestión son del 1% para adquisición (gadq) sobre la prima de tarifa, para administración (gadm) del 0,8% sobre el capital garantizado y del 0,2% para gastos de gestión de siniestros (ggs), también sobre el capital garantizado. La medida de mortalidad que consideraremos será la resultante de nuestro ajuste del modelo de Lee – Carter a la población andaluza.

El asegurado será una mujer de 70 años ( $x = 70$ ) en el año 2005, siendo este último a su vez el año de efecto. De esta manera nos centraremos en la tabla de mortalidad generacional resultante de nuestro ajuste, para una mujer nacida en el año 1935. Dado que el seguro dura 5 años ( $n = 5$ ), hemos de recurrir a los resultados de la medida de mortalidad para una edad a partir de 70 años

El valor de la prima de tarifa (todos los valores son tanto por uno del capital garantizado) será

$$\Pi''_{x:n} = E_{x,y} \cdot \frac{1 + gadm + ggs}{1 - gadq} \\ \Pi''_{70:5} = E_{70,2005} \cdot \frac{1 + 1\%}{1 - 1\%} = 0,812797$$

La PTSV a determinar según el ROSSP será a prima de inventario y al tipo de interés utilizado en la tarifa, siempre y cuando cumpla los requisitos establecidos en el artículo 33. Su expresión es la siguiente:

$${}_tV'_x = {}_{n-t}E_{x+t,y+t} \cdot (1 + gadm + ggs)$$

Si determinamos el valor de la PTSV a la fecha de efecto obtenemos:

$${}_0V'_{70} = {}_5E_{70,2005} \cdot (1 + gadm + ggs) = \frac{l_{75,2010}}{l_{70,2005}} \cdot v^5 \cdot (1 + 1\%) = 0,804669$$

En cambio, la valoración de la PTSV en el árbol trinomial partiría del flujo de caja nominal, que sería:

$$S_n = (1 + gadm + ggs)$$

$$S_5 = (1 + 1\%)$$

Lo que daría lugar a la siguiente valoración en el árbol:

$k$	$j$	1	2	3	4	5
	2			0,752883	0,821557	0,906367
	1		0,743256	0,791192	0,850558	0,923014
1	0		0,791728	0,831455	0,880584	0,939967
	-1		0,843357	0,873764	0,911669	0,957232
	-2			0,918224	0,943851	0,974813
	2			0,766259	0,832214	0,912824
	1		0,759379	0,805248	0,861592	0,929590
0	0	0,781374	0,808901	0,846226	0,892007	0,946664
	-1		0,861650	0,889287	0,923495	0,964051
	-2			0,934537	0,956095	0,981758
	2			0,779872	0,843010	0,919327
	1		0,775851	0,819554	0,872768	0,936213
-1	0		0,826447	0,861260	0,903579	0,953408
	-1		0,880341	0,905086	0,935475	0,970920
	-2			0,951140	0,968497	0,988753

**Cuadro 6.1. Valoración en el árbol conjunto para el tipo de interés libre de riesgo y el tanto de mortalidad de las PTSV.**

Hasta aquí se ha expuesto la forma de valoración más sencilla, que es cuando el flujo de caja coincide con los cortes temporales  $\Delta t$ . Esto no siempre es así, ya que es muy posible que la fecha de efecto de la Póliza, no coincida con la fecha del cálculo; o bien, que el seguro considere unos cortes temporales  $\Delta t$ , diferentes a los que hemos supuesto para implementar el árbol. Cuando la póliza que valoramos proporciona flujos que no coinciden con los cortes

temporales  $\Delta t$ , hemos de generar un árbol trinomial para un intervalo de tiempo que recoja los cortes temporales en los cuales caen los flujos<sup>55</sup>.

De ser variables las distancias entre los cortes temporales, es decir, con  $\Delta t_i$  dependientes del corte temporal  $t_i$ , tendríamos una distancia vertical entre nodos adyacentes y una esperanza condicionada también variables, ya que

$$\left. \begin{aligned} M_i &= (e^{-a\Delta t_i} - 1) \\ V_i &= \frac{\sigma^2 (1 - e^{-2a\Delta t_i})}{2a} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Las probabilidades de transición entre nodos no sufrirían ninguna modificación.

### 6.3. OPCIÓN DE RESCATE

En cuanto a opcionalidades implícitas en pólizas de seguros, podemos encontrar multitud de ellas, por la posibilidad de rescate anticipado de la Póliza, liberación del pago de primas en el caso de pago periódico, participación en beneficios, ...

Si nos centramos en una de las más importantes, como es la opción de rescate, existen dos tendencias en cuanto a su consideración en el ámbito del valor razonable:

- Una de ellas considera la opción de rescate como una cierta asimetría en la valoración que puede tomar el valor razonable, en la medida en que si bien este valor no se halla acotado en cuanto a sus valores máximos, si lo está en sus mínimos que no pueden ser inferiores al valor de rescate.
- La otra tendencia materializa la opción de rescate como un flujo probable de pago más, determinado según su probabilidad de ocurrencia, de modo que el resto de flujos de caja probables queda minorado. A partir de aquí, el valor razonable se determinaría con esta nueva corriente de flujos de caja probables.

El primer enfoque sería similar al que aborda la IAS 39 al establecer el “deposit floor” ó mínimo en la posible valoración del pasivo en la medida en que pueda ser cancelado anticipadamente por el poseedor del título a un precio determinado previamente. También cabría considerar el enfoque aportado por esta segunda tendencia, si tenemos en cuenta que la compañía aseguradora ha de mantener en su balance como PTSV una cantidad, que no puede ser inferior a la cuantía comprometida en concepto de rescate con el Tomador del seguro, con independencia de los tipos del mercado.

---

<sup>55</sup> Ver Hull y White (1996)

El segundo enfoque se basa en que el comportamiento de los Tomadores de Seguros de Vida, no se comportan según la lógica financiera, es decir, su comportamiento no depende de la evolución de los tipos de interés en el mercado. Existiendo incluso análisis del comportamiento de la opción de rescate, con variables explicativas diferentes al nivel de tipos de interés, y una buena calidad del ajuste.

Son muchas y muy variadas las ventajas e inconvenientes de tomar una u otra hipótesis, siendo asimismo los resultados muy diferentes en uno y otro caso. Si tenemos en cuenta que generalmente el valor de rescate se determina en muchas ocasiones como un porcentaje de las PTSV estimadas según la base técnica de la Póliza, al aplicar el segundo método obtendríamos un resultado mucho menor que el obtenido de aplicar el primero método. Cabe incluso la posibilidad de que al valorar la opción de rescate como una cadena de flujos que matizan el resto, la cuantificación resulte menor que la obtenida sin considerar dicha opción.

Independientemente de todo lo anterior, aquí no pretendemos defender uno u otro método, simplemente pretendemos la exposición de la metodología a aplicar en cualquier caso. Dado que el segundo enfoque únicamente supone considerar unos flujos probables en lugar de otros, nos extenderemos más en el primero.

Así si lo que estamos valorando es una Póliza de Seguro con opción de rescate a un tipo de interés garantizado, siendo el valor de rescate en tiempo  $i\Delta t$  de  ${}_i R_x$ ; el valor de la Póliza  $V(i, j, k)$  será como mínimo de  ${}_i R_x$ :

$$\left. \begin{aligned}
 V^R(i, j, k) &= \max[V(i, j, k); {}_i R_x] \\
 V(i, j, k) &= \exp(-\gamma^1_{i,j,k} \cdot \Delta t) \\
 &\cdot \left[ S_{i+1} + \sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^3 p_{s,r} V^R(i+1, j_s, k_r) \right] + F_i \cdot (1 - \exp(-\mu^1_{i,k} \cdot \Delta t))
 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Las implicaciones que tiene tomar este enfoque en cuanto a la opción de rescate en el cálculo, son de una doble vertiente:

1. Límite al valor de las PTSV en el nodo  $(i, j, k)$ .
2. Dado que en el valor de las PTSV en el nodo  $(i, j, k)$  influye el valor en los nodos  $(i+1, j_r, k_s)$ , al hallarse estos condicionados por el límite que establece el valor  ${}_{i+1} R_x$ , indirectamente también se halla afectado el valor en el nodo  $(i, j, k)$ . Esto sucede como paso previo a la comparación con el mínimo que representa  ${}_i R_x$ .



No sería necesario valorar de esta manera, si la póliza contiene lo que se denomina “cláusula antiarbitraje”, consistente en determinar el valor de rescate como el menor entre la PTSV y el valor de realización de los activos afectos a estas PTSV.

Si volvemos al ejemplo anterior, y consideramos que el Tomador del Seguro tiene la opción de rescate al 98% del valor de la PTSV valorada al interés técnico, tendríamos los siguientes valores de reserva y rescate:

<i>Final del año</i>	${}_tV'_x$	${}_iR_x$
1	0,839109	0,822327
2	0,876555	0,859024
3	0,917079	0,898737
4	0,961561	0,942330

**Cuadro 6.2. Valores de reserva y rescate.**

Para el ejemplo los resultados son:

$k$	$j$	1	2	3	4	5
	2			0,859167	0,898925	0,942253
	1		0,822513	0,859167	0,898925	0,942253
1	0		0,822513	0,859167	0,898925	0,942253
	-1		0,851173	0,877538	0,912100	0,957232
	-2			0,919854	0,944033	0,974813
	2			0,859167	0,898925	0,942253
	1		0,822513	0,859167	0,898925	0,942253
0	0	0,804595	0,826892	0,859167	0,898925	0,946664
	-1		0,866002	0,891038	0,923575	0,964051
	-2			0,935288	0,956128	0,981758
	2			0,859167	0,898925	0,942253
	1		0,822513	0,859167	0,898925	0,942253
-1	0		0,838686	0,867578	0,904859	0,953408
	-1		0,882770	0,905745	0,935519	0,970920
	-2			0,951425	0,968516	0,988753

**Cuadro 6.3. Valoración en el árbol conjunto para el tipo de interés libre de riesgo y el tanto de mortalidad de las PTSV incluyendo la opción de rescate.**

Por otra parte cabe la posibilidad de que los flujos probables que proporciona la póliza, como se ha comentado antes, no tengan un devengo en los cortes anuales. Asimismo es

posible que el rescate se pueda producir todos los meses y no exclusivamente en cada anualidad completa. En este caso habría que considerar una distancia temporal,  $\Delta t$ , tan pequeña como sea necesaria para que la valoración evalúe bien la opción de rescate, aunque con ello el árbol trinomial recombinante será mucho más abierto.

#### **6.4. OPCIÓN DE PARTICIPACIÓN EN BENEFICIOS**

En multitud de ocasiones se incluye en la póliza de seguro la cláusula de participación en beneficios (PB). La aseguradora ofrece al tomador un porcentaje de la rentabilidad obtenida de la inversión de las PTSV en la medida en que supera el interés técnico garantizado en Póliza.

La materialización de esta PB puede ser un extorno de prima, una reducción en el compromiso pendiente por parte del Tomador, o bien un incremento en las prestaciones garantizadas. Si bien en Pólizas de exteriorización de compromisos por pensiones, es corriente cualquiera de las dos primeras opciones, en caso de Pólizas de Seguro individuales, es muy habitual el tercero de los casos, es decir, incrementar las prestaciones garantizadas. En este último caso desde nuestro punto de vista, se verían incrementados los flujos probables de pagos correspondientes a la Póliza.

El incremento que se produce en los flujos probables de pagos de la Póliza por PB, tendría que incrementar consecuentemente el valor razonable de la PTSV, ya que hemos de considerar la totalidad de los flujos que proporciona el instrumento financiero.

También incrementaría el valor razonable cualquiera de las otras dos posibilidades de materialización de la PB, ya que si se materializa en un extorno de prima se puede considerar como un flujo probable de pago por la cuantía del extorno; y si se materializa en una reducción del compromiso pendiente para el Tomador, podría considerarse como un flujo probable de cobro menor por dicho concepto; de ambas posibilidades deviene un incremento en el valor razonable. Cualquiera de las modalidades de PB provoca una asimetría en el resultado de la operación de seguro para la compañía aseguradora, ya que cuando la rentabilidad de las inversiones en que se halla materializada la PTSV supera el interés técnico, corresponde a la aseguradora el beneficio que proporciona únicamente el resultado después de imputar la PB. Mientras que si no consigue una rentabilidad igual o mayor al interés técnico, la pérdida resultante es asumida íntegramente por la aseguradora.

Aquí nos centraremos en la PB que se materializa en un incremento en las prestaciones garantizadas por la Póliza. Para determinar el incremento que proporciona la PB en el valor razonable de la PTSV, hemos de tener en consideración la rentabilidad de las inversiones afectas.

Un problema surge en la determinación de la rentabilidad futura de las inversiones en que se materializa la PTSV. Además es posible que esas inversiones puedan ser sustituidas por otras si la aseguradora lo estima conveniente y así se halla establecido en los condicionados de la Póliza.

Para obviar toda esta problemática y simplificar la exposición, consideraremos a los fines de determinar esta rentabilidad, las plusvalías que puedan existir actualmente en el valor razonable de las inversiones afectas, y considerar a continuación una hipótesis diferente según la consideración o no en el valor razonable de las PTSV el spread por riesgo de crédito de la aseguradora. Si la determinación del valor razonable de las PTSV no considera el spread por riesgo de crédito, únicamente se tendría en cuenta la rentabilidad del activo libre de riesgo, mientras que si el valor razonable de las PTSV incluye el spread por riesgo de crédito de la aseguradora, consideraremos para estimar el PB futura, la rentabilidad del activo libre de riesgo más un spread por riesgo de crédito.

El principal motivo por el que este método no carece totalmente de rigor técnico, cuando la aseguradora cuenta con la posibilidad de elección discrecional del activo afecto, es que la aseguradora podría realizar las actuales inversiones con la consecuente plusvalía y sustituirlas por un activo libre de riesgo de similar flujo de caja. Lo anterior siempre y cuando la rentabilidad del activo libre de riesgo sea como mínimo igual al tipo de interés técnico garantizado, de acuerdo con el artículo 33 del ROSSP. De otro modo habría que modificar el tipo de interés técnico, determinándose las PTSV a contabilizar según el nuevo tipo de interés técnico.

Asimismo hemos de resaltar aquí, que el objetivo no es otro que valorar la asimetría en las posibles valoraciones posibles, con motivo del incremento que la PB proporciona en las prestaciones garantizadas, en determinados escenarios. Si consideramos el descuento del flujo de caja comprometido, sin incluir en el descuento un spread de crédito, no podríamos considerarlo en la cuantificación de la PB para cada escenario, ya que no estaríamos siendo coherentes.

Por todo lo anterior proponemos la siguiente metodología para la determinación del valor razonable correspondiente a la opción de PB, cuando esta supone un incremento en las prestaciones garantizadas:

- En primer lugar se determina para cada nodo del árbol trinomial, las consecuencias en términos de incremento de las prestaciones garantizadas según los condicionados y las hipótesis técnicas de la Póliza.
- A continuación se determina la cuantía de los flujos de caja en que se traduce la PB, incluyendo los que devienen por supervivencia y fallecimiento.

- Posteriormente descontamos a través del árbol trinomial y hasta el nodo origen de la PB, la totalidad de los flujos de caja proporcionados por dicha PB según el algoritmo

$$PB_{i,j,k} = \exp(-\gamma^1_{i,j,k} \cdot \Delta t) \cdot \left[ S^{PB}_{i+1} + \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 p_{r,s} V^{PB}(i+1, j_r, k_s) \right] + F^{PB}_i \cdot (1 - \exp(-\mu^1_{i,k} \cdot \Delta t))$$

donde

$S^{PB}_{i+1}$ : flujos de caja por garantías, gastos o primas pagaderos a la supervivencia del asegurado en  $i+1$  provenientes de la PB.

$F^{PB}_i$ : flujos de caja por garantías o gastos pagaderos al fallecimiento del asegurado entre  $i$  e  $i+1$  provenientes de la PB.

$V^{PB}(i+1, j_r, k_s)$ : valoración en el nodo  $(i+1, j_r, k_s)$  del árbol trinomial, del flujo de caja derivado de la PB generada en el nodo  $(i, j, k)$ .

$PB_{i,j,k}$ : descuento hasta el nodo origen, a través del árbol trinomial, del flujo de caja derivado de la PB generada en el nodo  $(i, j, k)$ .

- Y por último, consideramos estos valores descontados para cada nodo, como un flujo de caja con devengo en el nodo origen de la correspondiente PB, para descontar y agregar desde el final del árbol hasta el nodo origen  $(0, 0, 0)$  todo el flujo de caja:

$$V^{PB}(i, j, k) = \exp(-\gamma_{x+i,j,k}) \cdot \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 p_{r,s} \cdot V^{PB}(i+1, j_r, k_s) + PB_{i,j,k} \quad (6.4)$$

La mejor manera de explicar la metodología expuesta es a través de un ejemplo numérico.

Nos centraremos en el ejemplo anterior en el que supondremos que la participación en beneficios se determina a partir del 90% de la rentabilidad de las inversiones afectas y que supondremos equivalente a la del activo libre de riesgo.

Partiremos del árbol trinomial de tipos de interés que aparece en el cuadro 3.5. Asimismo suponemos idénticas hipótesis técnicas, es decir, un interés técnico garantizado del 3% (IT), los gastos de adquisición del 1% sobre la prima de tarifa, del 0,8% de administración sobre el capital garantizado y del 0,2% de gastos de gestión de siniestros también sobre el capital garantizado. La tabla de mortalidad será igualmente la resultante de nuestro ajuste a la población andaluza.

En cuanto a la PB, consideraremos que proporciona una prima de inventario, es decir sin considerar gastos de adquisición, que incrementa la garantía para supervivencia. Esta prima se considera con efecto al comienzo de la anualidad en que se devenga. Supondremos

asimismo que esta PB no proporciona futura PB, siendo la base del cálculo la PTSV determinada con el criterio fijado al respecto actualmente por el ROSSP. La prima de inventario del bono por PB se determinará como sigue:

$$pb(i, j) = {}_i V'_x \cdot (90\% \cdot R(i, j) - IT)^+{}^{56}$$

Hemos determinado la prima del bono en función del índice,  $j$ , debido a que la PB es independiente del nivel respecto al tanto de mortalidad.

El capital del bono será:

$$cb(i, j) = \frac{pb(i, j)}{\Pi'_{x+i+1:n-i-1} \bar{\pi}}$$

dado que  $\Pi'_{x+i:n-i} \bar{\pi} = {}_{n-i} E_{x+i} \cdot (1 + g_{adm} + g_{gs}) = {}_i V'_x$ , tenemos que

$$cb(i, j) = (90\% \cdot R(i, j) - IT)^+$$

La cuantía de los capitales por PB en nuestro caso será:

J	0	1	2	3	4
2			0,036251	0,040531	0,043274
1		0,014752	0,019870	0,024151	0,026894
0			0,003490	0,007770	0,010513
-1					
-2					

**Cuadro 6.4.: Árbol de cuantías del capital del bono considerando el nodo origen de la PB.**

Por otra parte el flujo de caja proporcionado por la PB en nuestro ejemplo, es de la misma estructura que el original, es decir,

$$S_n^{PB} = S_n \cdot cb(i, j)$$

por lo que para descontarlo hasta el nodo origen, simplemente hemos de hacer:

$$PB(i, j) = V(i, j) \cdot cb(i, j)$$

En nuestro ejemplo obtenemos:

k	j	0	1	2	3	4
	2			0,027293	0,033298	0,039222
	1		0,010965	0,015721	0,020541	0,024823
1	0			0,002902	0,006842	0,009882
	-1					
	-2					

<sup>56</sup> En adelante el operador  $()^+$ , hará referencia al máximo entre 0 y el resultado de la expresión incluida entre paréntesis.

	2		0,027777	0,033730	0,039502
	1	0,011203	0,016001	0,020808	0,025000
0	0		0,002953	0,006931	0,009953
	-1				
	-2				
	2		0,028271	0,034168	0,039783
	1	0,011446	0,016285	0,021078	0,025178
-1	0		0,003006	0,007021	0,010024
	-1				
	-2				

**Cuadro 6.5. Árbol de flujos probables de pagos procedentes de la PB descontados hasta el nodo origen de la PB.**

El último paso, consistente en descontar y acumular las anteriores cantidades hasta el nodo origen, según la expresión 6.4, determina los siguientes resultados para nuestro ejemplo:

$k$	$j$	0	1	2	3	4
	2			0,083375	0,066241	0,039222
	1		0,057017	0,052384	0,042024	0,024823
1	0		0,022081	0,020466	0,016890	0,009882
	-1		0,007751	0,004943	0,002055	
	-2			0,002276	0,000868	
	2			0,084856	0,067100	0,039502
	1		0,058254	0,053314	0,042569	0,025000
0	0	0,025165	0,022560	0,020830	0,017109	0,009953
	-1		0,007919	0,005031	0,002082	
	-2			0,002316	0,000879	
	2			0,086363	0,067970	0,039783
	1		0,059517	0,054261	0,043121	0,025178
-1	0		0,023049	0,021200	0,017331	0,010024
	-1		0,008091	0,005121	0,002109	
	-2			0,002357	0,000891	

**Cuadro 6.6. Valoración en el árbol conjunto para el tipo de interés libre de riesgo y el tanto de mortalidad, de la opción de participación en beneficios correspondiente a las PTSV.**

La valoración correspondiente a la PTSV incluida la opción de PB, corresponde a la suma de la valoración de la opción de PB como se ha expuesto, más la de la PTSV sin opciones.

Cuando no coincidan los cortes temporales de la Póliza con los cortes  $\Delta t$ , considerados para el árbol trinomial, procederíamos como ya se ha expuesto anteriormente, modificando la distancia temporal,  $\Delta t_i$ , así como la construcción del árbol trinomial recombinante según establece la expresión 6.2.

Hasta aquí hemos considerado el valor razonable libre de riesgo de crédito, y hemos sido coherentes con ello en la determinación de la opción de PB. Una vez incluyamos en la determinación del valor razonable de las PTSV el riesgo de crédito, modificaremos toda la metodología anterior, de manera que la opción de PB considerará el tipo libre de riesgo más un spread por riesgo de crédito.

## 6.5. VALORACIÓN DE LAS PTSV CON DIFUSIÓN EN EL TIPO DE INTERÉS, MEDIDA DE MORTALIDAD Y SPREAD POR RIESGO DE CRÉDITO

Introduciendo el riesgo de crédito bajo las asunciones previamente mencionadas, y suponiendo difusión en los tres subyacentes, tendríamos que sustituir la expresión (6.1) por

$$V^c(i, j, k, l) = \exp(-\gamma^c_{i,j,k,l} \cdot \Delta t) \cdot \left[ S_{i+1} + \sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^3 \sum_{t=1}^3 p_{s,r,t} V^c(i+1, j_s, k_r, l_t) \right] + (1 - \exp(-\mu^1_i \cdot \Delta t)) \cdot F_i$$

siendo  $\gamma^c_{i,j,k,l} = R_{i,j} + \mu^1_{i,k} + \lambda^1_{i,l}$ .

Las probabilidades de transición conjuntas, suponiendo independencia entre el tanto de mortalidad,  $\mu^1_{x+t}$ , y el resto se obtienen como ya se ha expuesto en el cuadro 5.5.

Proponemos otro ejemplo para ilustrar la valoración en el árbol con difusión en todos los subyacentes. Nos centraremos en un Seguro Mixto con el mismo capital para supervivencia y fallecimiento. Como hipótesis técnicas, consideramos un interés técnico garantizado del 2,75%, los gastos de gestión son:

- Gastos de adquisición (gadq) 1% de la prima de tarifa.
- Gastos de administración (gadm) del 0,8% del capital garantizado.
- Gastos de gestión de siniestros (ggs) del 0,2% del capital garantizado.

La medida de mortalidad que consideraremos será igualmente la resultante de nuestro ajuste del modelo de Lee – Carter a la población andaluza. Siendo el asegurado una mujer de 70 años ( $x = 70$ ) en el año 2005 ( $y = 2005$ ). El valor de la prima de tarifa (todos los valores en tanto por uno del capital garantizado) será

$$\Pi''_{x,y;n} = \left[ E_{x,y} + A_{x,y;n} \right] \cdot \frac{(1 + gadm + ggs)}{(1 - gadq)}$$

$$\Pi''_{70,2005;5} = \left[ E_{70,2005} + A_{70,2005;5} \right] \cdot \frac{(1 + 1\%)}{(1 - 1\%)} = 0,896237$$

La PTSV a determinar según el ROSSP, a prima de inventario y al tipo de interés utilizado en la tarifa, siempre y cuando cumpla los requisitos establecidos en el artículo 33 será:

$${}_tV'_{x,y} = \left[ E_{x,y} + A_{x,y;n} \right] \cdot (1 + gadm + ggs)$$

Si determinamos el valor de la PTSV a la fecha de efecto obtenemos:

$${}_0V'_{70,2005} = \left[ E_{70,2005} + A_{70,2005;5} \right] \cdot (1 + 1\%) = 0,887274$$

En cambio, la valoración de la PTSV en el árbol trinomial partiría del flujo de caja nominal, que sería en este caso para supervivencia al vencimiento:

$$S_n = (1 + gadm + ggs)$$

$$S_5 = (1 + 1\%)$$

y al comienzo de cada anualidad por fallecimiento:

$$F_t = (1 + gadm + ggs)$$

$$F_t = (1 + 1\%)$$

Los resultados para nuestro ejemplo teniendo en cuenta total ausencia de correlación y los árboles de transición de las tres medidas, así como sus probabilidades de transición son los que siguen:

<i>l</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	0	1	2	3	4
		2			0,781545	0,842214	0,917389
		1		0,777606	0,819175	0,870693	0,933748
	1	0		0,825205	0,858701	0,900172	0,950407
		-1		0,875857	0,900213	0,930683	0,967372
		-2			0,943810	0,962265	0,984648
		2			0,778768	0,840565	0,916730
		1		0,774253	0,816832	0,869318	0,933205
1	0	0		0,822483	0,856819	0,899081	0,949982
		-1		0,873817	0,898820	0,929888	0,967068
		-2			0,942936	0,961778	0,984467



					2			0,775953	0,838898	0,916065
					1		0,770844	0,814456	0,867927	0,932658
-1					0		0,819716	0,854910	0,897978	0,949555
					-1		0,871743	0,897407	0,929085	0,966762
					-2			0,942050	0,961285	0,984286
					2			0,792831	0,851868	0,923741
					1		0,790391	0,831027	0,880685	0,940216
1					0		0,838808	0,871147	0,910515	0,956994
					-1		0,890329	0,913283	0,941388	0,974080
					-2			0,957536	0,973344	0,991479
					2			0,790170	0,850307	0,923127
					1		0,787181	0,828807	0,879401	0,939719
0	0	0	0,811981		0		0,836241	0,869397	0,909519	0,956616
					-1		0,888459	0,912031	0,940692	0,973824
					-2			0,956812	0,972961	0,991347
					2			0,787472	0,848729	0,922508
					1		0,783917	0,826557	0,878103	0,939218
-1					0		0,833631	0,867622	0,908512	0,956236
					-1		0,886556	0,910760	0,939989	0,973566
					-2			0,956077	0,972573	0,991215
					2			0,804286	0,861636	0,930138
					1		0,803396	0,843056	0,890796	0,946731
1					0		0,852643	0,883780	0,920980	0,963628
					-1		0,905049	0,926550	0,952219	0,980836
					-2			0,971468	0,984555	0,998359
					2			0,801743	0,860164	0,929569
					1		0,800331	0,840963	0,889605	0,946280
-1	0				0		0,850236	0,882164	0,920081	0,963298
					-1		0,903351	0,925441	0,951624	0,980628
					-2			0,970897	0,984276	0,998277
					2			0,799165	0,858677	0,928996
					1		0,797215	0,838840	0,888401	0,945826
-1					0		0,847787	0,880525	0,919172	0,962965

-1	0,901624	0,924315	0,951023	0,980419
-2		0,970317	0,983995	0,998193

Cuadro 6.7. Valoración en el árbol de difusión de los tres subyacentes para las PTSV.

### 6.5.1. Opción de rescate

El riesgo de crédito minoraría la valoración de las PTSV si consideramos difusión únicamente en el tipo de interés, al modificar la expresión (6.3) como sigue:

$$V^{Rc}(i, j, k, l) = \max[V^c(i, j, k, l); R_x] \quad (6.5)$$

$$V^c(i, j, k, l) = \exp(-\gamma^{c1}_{i,j,k,l} \cdot \Delta t) \cdot \left[ S_{i+1} + \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 p_{s,r,t} V^{Rc}(i+1, j_r, k_s, l_t) \right] + (1 - \exp(-\mu^1_{i,k} \cdot \Delta t)) \cdot F_i$$

Para nuestro ejemplo consideraremos que el Tomador tiene el derecho de rescate al 92% de la PTSV determinada al interés técnico. Los valores de rescate, serían en este caso:

Final del año	$V'_x$	$R_x$
1	0,903585	0,831298
2	0,928410	0,854137
3	0,954318	0,877973
4	0,981454	0,902937

Cuadro 6.8. Valores de reserva y rescate.

Los resultados de aplicar la expresión 6.5. para nuestro ejemplo son los siguientes:

$l$	$k$	$j$	0	1	2	3	4
		2			0,858962	0,894496	0,917389
		1		0,837272	0,858962	0,894496	0,933748
	1	0		0,837272	0,861901	0,900172	0,950407
		-1		0,876465	0,900213	0,930683	0,967372
		-2			0,943810	0,962265	0,984648
		2			0,858962	0,894496	0,916730
		1		0,837272	0,858962	0,894496	0,933205
1	0	0		0,837272	0,860212	0,899081	0,949982
		-1		0,875369	0,898820	0,929888	0,967068
		-2			0,958674	0,961778	0,984467
		2			0,858962	0,894496	0,916065

				1	0,837272	0,858962	0,894496	0,932658
-1				0	0,837272	0,858962	0,897978	0,949555
				-1	0,872482	0,897407	0,929085	0,966762
				-2		0,942050	0,961285	0,984286
				2		0,858962	0,894496	0,923741
				1	0,837272	0,858962	0,894496	0,940216
1				0	0,844624	0,873326	0,910515	0,956994
				-1	0,890791	0,913283	0,941388	0,974080
				-2		0,957536	0,973344	0,991479
				2		0,858962	0,894496	0,923127
				1	0,837272	0,858962	0,894496	0,939719
0	0	0	0,824767	0	0,842480	0,871755	0,909519	0,956616
				-1	0,889164	0,912031	0,940692	0,973824
				-2		0,956812	0,972961	0,991347
				2		0,858962	0,894496	0,922508
				1	0,837272	0,858962	0,894496	0,939218
-1				0	0,840336	0,870163	0,908512	0,956236
				-1	0,887100	0,910760	0,939989	0,973566
				-2		0,956077	0,972573	0,991215
				2		0,858962	0,894496	0,930138
				1	0,837272	0,858962	0,894496	0,946731
1				0	0,856787	0,884914	0,920980	0,963628
				-1	0,905366	0,926550	0,952219	0,980836
				-2		0,971468	0,984555	0,998359
				2		0,858962	0,894496	0,929569
				1	0,837272	0,858962	0,894496	0,946280
-1	0			0	0,854775	0,883464	0,920081	0,963298
				-1	0,903771	0,925441	0,951624	0,980628
				-2		0,970897	0,984276	0,998277
				2		0,858962	0,894496	0,928996
				1	0,837272	0,858962	0,894496	0,945826
-1				0	0,852743	0,881994	0,919172	0,962965
				-1	0,902010	0,924315	0,951023	0,980419
				-2		0,970317	0,983995	0,998193

**Cuadro 6.9. Valoración en el árbol de difusión de los tres subyacentes para las PTSV incluyendo opción de rescate.**

## 6.5.2. Opción de participación en beneficios

En cuanto a la participación en beneficios, recordemos que nuestra propuesta ha sido considerar a efectos de determinar el valor razonable de la opción de PB, siempre que exista asignación discrecional por parte de la entidad aseguradora de los activos afectos a las PTSV, la plusvalía existente al momento de la valoración y la rentabilidad del activo libre de riesgo para el período restante hasta el vencimiento de la Póliza. De esta manera existía una cierta coherencia entre el descuento a través del árbol y la opción de PB, al tomar como referencia ambos al tipo libre de riesgo. Al incluir el spread de crédito correspondiente a la aseguradora, es más coherente tomar como referencia para determinar las primas por PB la rentabilidad del activo libre de riesgo más este spread de crédito.

Para ilustrarlo volveremos a nuestro ejemplo en el que supondremos igualmente que la participación en beneficios se determina como el exceso sobre el interés técnico del 90% de la rentabilidad de las inversiones afectas y que consideraremos equivalente a la del activo libre de riesgo más el spread por riesgo de crédito del escenario en que tenga lugar. Se aplicará sobre la PTSV determinada según el ROSSP como sigue:

$$pb(i, j, k, l) = {}_i V'_x \cdot (90\% \cdot (R_{i,j} + q\lambda_{i,l}^1) - IT)^+$$

siendo  $pb(i, j, k, l)$  la prima del bono generada en el nodo  $(i, j, k, l)$ .

Consideraremos que la prima generada por PB, se determina a prima de inventario, de manera que el capital garantizado por supervivencia se determinará:

$$cb(i, j, k, l) = \frac{pb(i, j, k, l)}{\Pi'_{x+i, y+in-i} \neg}$$

siendo  $\Pi'_{x+i, y+in-i} \neg = \lfloor {}_{n-i} E_{x+i, y+i} + A_{x+i, y+in-i} \neg \rfloor \cdot (1 + gadm + ggs) = {}_i V'_x$ , tenemos

$$cb(i, j, k, l) = (90\% \cdot (R_{i,j} + q\lambda_{i,l}^1) - IT)^+$$

Fijémosnos que el capital por PB es independiente del nivel del tanto de mortalidad. De este modo los resultados para el ejemplo serán teniendo en cuenta los niveles respecto del tipo de interés y el spread por riesgo de crédito:

$l$	$j$	0	1	2	3	4
	2			0,054508	0,058788	0,061532
	1		0,033010	0,038128	0,042408	0,045151
1	0		0,016629	0,021747	0,026027	0,028771
	-1		0,000249	0,005367	0,009647	0,012390
	-2					

	2		0,048112	0,052393	0,055136
	1	0,026614	0,031732	0,036012	0,038756
0	0	0,010233	0,015351	0,019632	0,022375
	-1			0,003251	0,005995
	-2				
	2		0,041717	0,045997	0,048740
	1	0,020218	0,025336	0,029616	0,032360
-1	0	0,003838	0,008956	0,013236	0,015979
	-1				
	-2				

**Cuadro 6.10. Árbol de cuantía de capitales proporcionados por la PB según el nodo origen, con difusión en los tres términos considerados del tanto de capitalización actuarial.**

Supondremos que la participación en beneficios, a su vez no genera más participación en beneficios y que en caso de rescate anticipado de la Póliza el Tomador no tiene derecho de rescate sobre la participación en beneficios generada. El paso siguiente será descontar hasta el nodo origen el flujo de caja procedente de la PB. El flujo de caja será para supervivencia al vencimiento y fallecimiento al comienzo de cada nodo probable hasta el vencimiento:

$$S^{PB}_n = (1 + g_{adm} + g_{gs}) \cdot cb(i, j, k, l)$$

$$F^{PB}_i = (1 + g_{adm} + g_{gs}) \cdot cb(i, j, k, l)$$

El flujo de caja derivado de la PB, es por tanto, proporcional al que originalmente garantiza la Póliza:

$$\left. \begin{aligned} S^{PB}_n &= S_n \cdot cb(i, j, k, l) \\ F^{PB}_i &= F_i \cdot cb(i, j, k, l) \end{aligned} \right\}$$

Lo anterior permite que el descuento del flujo de caja originado por la PB en el nodo  $(i, j, k, l)$  hasta el mismo nodo, se determine simplemente como el producto:

$$PB^c(i, j, k, l) = V^c(i, j, k, l) \cdot cb(i, j, k, l)$$

Los resultados del ejemplo son:

<i>l</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	0	1	2	3	4
		2			0,042600	0,049512	0,056448
		1		0,025668	0,031233	0,036924	0,042160
	1	0		0,013722	0,018674	0,023429	0,027344
		-1			0,004831	0,008978	0,011986

					-2	
					2	
				0,042449	0,049415	0,056408
			0,025558	0,031144	0,036866	0,042135
1	0	0	0,013677	0,018633	0,023401	0,027332
				0,004824	0,008971	0,011982
						-2
						2
				0,042296	0,049317	0,056367
			0,025445	0,031053	0,036807	0,042111
-1	0	0	0,013631	0,018592	0,023372	0,027319
				0,004816	0,008963	0,011979
						-2
						2
				0,038145	0,044632	0,050931
			0,021035	0,026370	0,031715	0,036439
1	0	0	0,008584	0,013373	0,017875	0,021413
					0,003061	0,005839
						-2
						2
				0,038017	0,044550	0,050897
			0,020950	0,026300	0,031669	0,036419
0	0	0	0,008558	0,013347	0,017855	0,021404
					0,003058	0,005838
						-2
						2
				0,037887	0,044467	0,050863
			0,020863	0,026228	0,031622	0,036400
-1	0	0	0,008531	0,013319	0,017836	0,021396
					0,003056	0,005836
						-2
						2
				0,033552	0,039633	0,045335
			0,016243	0,021360	0,026382	0,030636
1	0	0	0,003272	0,007915	0,012190	0,015398
						-1
						-2
						2
				0,033446	0,039565	0,045307
			0,016181	0,021307	0,026347	0,030621

-1	0	0	0,003263	0,007900	0,012178	0,015393
		-1				
		-2				
		2		0,033338	0,039496	0,045279
		1	0,016118	0,021253	0,026311	0,030607
-1	0	0	0,003254	0,007886	0,012166	0,015388
		-1				
		-2				

**Cuadro 6.11. Árbol de valoración de la opción de PB de las PTSV, con difusión en los tres subyacentes considerados.**

Por último se descuentan las anteriores cantidades según la siguiente expresión

$$V^{PBc}(i, j, k, l) = \exp(-\gamma^{c1}_{i,j,k,l} \cdot \Delta t) \cdot \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 p_{s,r,t} V^c(i+1, j_r, k_s, l_t) + PB^c_{i,j,k,l}$$

Los resultados para el ejemplo:

<i>l</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	0	1	2	3	4
		2			0,121372	0,095490	0,056448
		1		0,103548	0,091708	0,071946	0,042160
	1	0		0,065414	0,058984	0,046679	0,027344
		-1		0,025905	0,024870	0,020301	0,011986
		-2			0,005759	0,002254	
		2			0,121926	0,095694	0,056408
		1		0,104325	0,092173	0,072121	0,042135
1	0	0		0,065987	0,059323	0,046808	0,027332
		-1		0,026243	0,025061	0,020371	0,011982
		-2			0,005820	0,002269	
		2			0,122483	0,095899	0,056367
		1		0,105110	0,092642	0,072297	0,042111
	-1	0		0,066566	0,059664	0,046937	0,027319
		-1		0,026586	0,025253	0,020441	0,011979
		-2			0,005881	0,002284	
		2			0,112643	0,087605	0,050931
		1		0,093411	0,082026	0,063481	0,036439

1	0		0,054256	0,048387	0,037609	0,021413
	-1		0,020874	0,015244	0,011112	0,005839
	-2			0,005018	0,001897	
	2			0,113188	0,087806	0,050897
	1		0,094165	0,082472	0,063647	0,036419
0	0	0,053294	0,054791	0,048695	0,037723	0,021404
	-1		0,021161	0,015400	0,011164	0,005838
	-2			0,005071	0,001910	
	2			0,113738	0,088008	0,050863
	1		0,094928	0,082921	0,063814	0,036400
-1	0		0,055333	0,049007	0,037837	0,021396
	-1		0,021452	0,015558	0,011218	0,005836
	-2			0,005125	0,001922	
	2			0,103632	0,079525	0,045335
	1		0,082925	0,072042	0,054810	0,030636
1	0		0,043179	0,037690	0,028348	0,015398
	-1		0,017340	0,011177	0,004810	
	-2			0,004264	0,001532	
	2			0,104166	0,079721	0,045307
	1		0,083652	0,072465	0,054965	0,030621
-1	0		0,043675	0,037966	0,028446	0,015393
	-1		0,017586	0,011295	0,004843	
	-2			0,004310	0,001542	
	2			0,104704	0,079918	0,045279
	1		0,084389	0,072891	0,055121	0,030607
-1	0		0,044178	0,038245	0,028544	0,015388
	-1		0,017836	0,011415	0,004876	
	-2			0,004357	0,001553	

**Cuadro 6.12. Árbol de valoración de la opción de PB de las PTSV incluyendo riesgo de crédito, con difusión en los tres subyacentes considerados.**

Si bien al incorporar difusión en un nuevo subyacente, han crecido en complejidad los algoritmos de valoración resultantes, también es cierto que los resultados son más ajustados, ya que las asimetrías implícitas en el contrato de Seguro de Vida, se manifiestan más adecuadamente.



# CUARTA PARTE

## DETERMINACIÓN DE LAS NECESIDADES DE RECURSOS PROPIOS

### CAPÍTULO 7

#### EL VALOR RAZONABLE Y SOLVENCIA II

##### 7.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO

El objetivo de este capítulo es determinar las necesidades de recursos propios de la compañía, como consecuencia de su negocio asegurador, consistentes con el mercado. Se pretende estimar estas necesidades a partir del tratamiento oolítico de la mayoría de riesgos asumidos por la entidad aseguradora al suscribir los contratos de Seguros de Vida.

En el primer apartado se expone el concepto de Solvencia, y a grandes rasgos describe la evolución que ha sufrido los requerimientos de recursos propios por parte del supervisor en Europa. A continuación se presenta una clasificación de los requerimientos de recursos propios establecidos por otras legislaciones, así como sus características más importantes.

En el apartado 7.4. se explica como utilizar las conclusiones obtenidas en los capítulos previos para estimar las necesidades de recursos propios óptimos de la entidad aseguradora, así como, lo que se podría considerar el VAR del valor razonable de las PTSV por los cambios de sus diferentes subyacentes (tipos de interés, tanto de mortalidad y spread por riesgo de crédito).

##### 7.2. INTRODUCCIÓN A SOLVENCIA II

Como peculiaridad inherente a la actividad aseguradora podemos destacar la solvencia, desde el punto de vista de la capacidad de respuesta al riesgo presente y futura, tanto del riesgo propio de su actividad (riesgo técnico), como del resto del riesgo al que se halla sometida. Para garantizar esta capacidad, es necesario el establecimiento de unas necesidades de solvencia a las entidades aseguradoras, pudiendo distinguir entre solvencia estática y dinámica.

La primera, se refiere a la capacidad técnica y financiera para hacer frente en un determinado momento a los compromisos adquiridos, a través de las PTSV y su cobertura mediante activos aptos.

La segunda se refiere a la capacidad para hacer frente a futuros quebrantos derivados de otros riesgos a los que se halla sometida, y será cubierta mediante el patrimonio propio no comprometido y garantizada a través del margen de solvencia y fondo de garantía.

Para analizar la exigencia en términos de margen de solvencia en la Unión Europea, comenzaremos por la definición de solvencia de la aseguradora en el marco de las directivas comunitarias. Tenemos una triple conceptualización en función de su alcance:

- En primer lugar el "margen de solvencia" de las directivas europeas consiste en un conjunto de normas para el cálculo de una exigencia de fondos propios mínimos por una parte (mínimo de margen), y de los fondos propios aceptables para satisfacer esta exigencia por otra parte (margen disponible).
- La "garantía de solvencia financiera" se refiere al conjunto de normas destinadas a garantizar la solvencia técnico – financiera de la empresa. Estas normas hacen referencia al cálculo de las PTSV, a los activos representativos (solvencia estática), así como a la exigencia de margen de solvencia mencionada.
- La denominada "solvencia global", tiene que ver con la solvencia de una empresa en un sentido más amplio. Con respecto al concepto anterior, esta concepción tiene en cuenta factores que no son sólo financieros. El control de la solvencia global justifica la existencia de un conjunto mucho más variado de medios a disposición de las autoridades supervisoras.

La exigencia de margen de solvencia para las empresas de seguros No Vida se inicia en la denominada Primera Directiva del Seguro no Vida del año 1973, mientras que el margen de solvencia del Seguro de Vida data del año 1979. La Primera Generación de directivas en el mundo del Seguro armonizaba las normas nacionales de supervisión en el ámbito comunitario (y entre ellas de la exigencia del margen de solvencia). Posteriormente, a través de la Segunda Generación de Directivas (1988 y 1990 para los seguros No Vida y vida respectivamente), se pretendió armonizar las exigencias aplicadas para la denominada "libre prestación de servicios". Supuso un paso intermedio entre los mercados nacionales con regulaciones propias, y el mercado único europeo. De esta forma estas segundas directivas apenas tuvieron influencia en el margen de solvencia. Por último, la Tercera Generación de Directivas establecen el mercado único, con lo que la actividad aseguradora en el ámbito comunitario se halla sometida a las normas y supervisión financiera del Estado miembro en el que reside la sede social de la entidad, independientemente del país en el que se preste el servicio asegurador. En estas Terceras Directivas, de junio y noviembre de 1992 respectivamente para los Seguros No Vida y Vida, se incluyen recomendaciones sobre la necesidad de revisar las normas del margen de solvencia y fondo de garantía. Así la Comisión Europea encargó a la Conferencia Europea de Autoridades de Supervisión de Entidades Aseguradoras la elaboración de un informe. Esta última por mediación de un grupo técnico, denominado Grupo Müller,

emitió el informe conocido como Informe Müller, con sus conclusiones acerca de las posibilidades de mejora en el margen de solvencia y fondo de garantía comunitarios. A partir de aquí, la Comisión Europea desarrolla en enero de 2001 dos propuestas de directivas, las cuales no obstante, contradicen en algunos puntos el Informe Müller.

Estas propuestas de directivas, una vez aprobadas por el Comité de Seguros, fueron remitidas al Consejo de Europa, quien mediante el apoyo del Parlamento Europeo las adapta para emitir en junio de 2002 las Directivas 2002/13/CE sobre requisitos del margen de solvencia de las empresas de seguros distintos del seguro de vida y la 2002/12/CE para seguros de vida. La transposición de diversas disposiciones contenidas en ambas directivas a la normativa española se ha realizado recientemente a través de la publicación del Real Decreto 297/2004<sup>57</sup> y 298/2004<sup>58</sup>.

Por otra parte, la fase final de tramitación del proyecto Solvencia I se ha solapado con un nuevo proyecto denominado Solvencia II. Solvencia II es una de las consecuencias de la globalización y de la implantación del mercado único. Mientras que Solvencia I se basa en la continuidad del esquema tradicional de las Primeras Directivas, Solvencia II supone un cambio no solamente en los aspectos cuantitativos, sino y sobre todo, en los cualitativos para la determinación de los recursos propios mínimos necesarios de las entidades aseguradoras, así como en su supervisión. Es por ello que las entidades aseguradoras no sólo deben tener presente el impacto de las dos directivas del proyecto Solvencia I, sino que además deberán tener muy en cuenta las materializaciones del proyecto Solvencia II, que plantea un avance más importante. Esto ya se está abordando, al menos por las grandes compañías aseguradoras.

Hasta la fecha se han llevado a cabo diferentes actuaciones y estudios por parte de todos los organismos y asociaciones europeos involucrados en el proyecto de Solvencia II. Aquí haremos mención a dos de los que más trascendencia han tenido:

- Informe de la consultora KPMG, y
- Informe Sharma emitido por la Conferencia de Autoridades Supervisoras Europeas.

#### El informe KPMG

Cabe destacar de entre los estudios realizados al efecto el Informe elaborado por KPMG a encargo de la Comisión Europea. Su título es "Metodologías de valoración de la

---

<sup>57</sup> RD.297/2004 de 20 de febrero (BOE. Núm.45, 21 de febrero de 2004), por el que se modifica el Reglamento de ordenación y supervisión de los seguros privados, aprobado por el RD.2486/1998 de 20 de noviembre.

<sup>58</sup> RD.298/2004 de 20 de febrero (BOE. Núm.45, 21 de febrero de 2004), por el que se modifica el Plan de Contabilidad de las entidades aseguradoras y normas para la formulación de las cuentas de los grupos de entidades aseguradoras, aprobado por el RD.2014/1997, de 26 de diciembre.

posición financiera global de una entidad aseguradora desde la perspectiva de una supervisión prudencial”. Y si bien en el mismo se pone de manifiesto que sus conclusiones son responsabilidad de la consultora y no, necesariamente, deben coincidir con el punto de vista de la Comisión, supone no obstante, un buen punto de partida.

En este informe el alcance de Solvencia II se divide en tres pilares (similares a los que se han considerado en el proyecto Basilea II para la banca). Se incluye un cuadro resumen.

<b>Pilar I. Exigencia de Recursos Propios</b>	<b>Pilar II: Procesos de Supervisión</b>	<b>Pilar III: Disciplina de mercado</b>
Recursos propios mínimos según un modelo basado en el riesgo realmente asumido	Revisión de la exposición al riesgo de cada entidad.	Requerimientos de información a las entidades para garantizar transparencia en el mercado.
Posibilidad de aplicación de modelos internos de escenarios o probabilísticos, una vez validados por el supervisor.	Evaluación de los modelos internos de gestión de riesgos.	Facilidades por parte de las entidades para que los participantes en el mercado puedan acceder a información clave (recursos propios, exposición al riesgo, ...)
Requerimientos de recursos propios mínimos a nivel de grupos consolidados.	Valoración de las pruebas efectuadas sobre PTSV y activos individualmente considerados así como del mismatching.	
Normas prudentes sobre activos y pasivos de aseguradoras.	Evaluación de la honorabilidad y profesionalidad de la dirección.	Facilitarán el grado de sensibilidad de la exposición al riesgo, así como los escenarios clave utilizados en el análisis de activos y pasivos.

**Cuadro 7.1. Alcance del macroproyecto Solvencia II.**

Entre otras muchas cuestiones este informe manifiesta que la determinación de un futuro sistema de solvencia será necesario acordar una agrupación de riesgos que como mínimo debería contemplar las siguientes categorías de riesgo:

- Riesgos de suscripción
- Riesgos de mercado
- Riesgo de crédito

Asimismo, deberían contemplarse el riesgo operacional y el riesgo de mismatching. No obstante, se pone de manifiesto la dificultad existente para su medición y, en consecuencia, para establecer un margen de solvencia basado en los mismos. Sin embargo, podrían establecerse requerimientos adicionales de recursos propios como consecuencia de la existencia de estos dos tipos de riesgo.

### El informe Sharma

El segundo informe general redactado en el marco de Solvencia II es el informe de la Conferencia de Autoridades Supervisoras Europeas (también denominado "informe Sharma", nombre del Presidente del Grupo de trabajo). Este Grupo de trabajo, dispuso de la experiencia concreta de sus miembros, ya que cada autoridad supervisora nacional cuenta con información y elementos de análisis con los que ningún otro participante del sector puede contar en su totalidad.

Para desarrollar el informe el grupo basó su análisis en primer lugar en el estudio de las sociedades con graves dificultades (a través del cuestionario sobre las quiebras y situaciones próximas a la quiebra acontecidas durante los seis últimos años, así como numerosos estudios de casos detallados). A partir de aquí, el grupo examinó los instrumentos normativos a su disposición y los sometió a crítica en cuanto a su adecuación a los problemas revelados del análisis anterior.

Como conclusión principal del informe se determinó que el sistema prudencial ha de comportar toda una serie de instrumentos normativos, preventivos o correctivos, que permitan actuar en todas las etapas de manifestación posible de un problema: desde la fase más precoz en la que, por ejemplo, la mala gestión de una compañía sólo es perceptible en la actitud de los directivos o empleados de la compañía, hasta la fase última en la que una secuencia de causas y efectos ya ha provocado una grave degradación de la situación financiera

### Marco temporal de Solvencia II

En cuanto al marco temporal del proyecto Solvencia II, se pretende que exista una directiva europea para el año 2010. Con este objetivo la Comisión Europea dirigió al CEIOPS tres oleadas de preguntas ("calls for advice"), en junio 2004, diciembre 2004 y 2005, las cuales han sido secuencialmente atendidas en junio 2005, octubre 2005 y febrero 2006 respectivamente.

Las decisiones adoptadas por la Comisión y que serán plasmadas en la nueva directiva, irán acompañadas de un análisis del impacto que suponen, por parte del CEIOPS. Son los denominados Quantitative Impact Study. Recientemente a solicitud de la Comisión el

CEIOPS ha reportado sus conclusiones acerca del primer QIS. El QIS 1 iniciado el 31 de diciembre de 2004 culminó el último cuatrimestre de 2005, y versó sobre el impacto que supondría la determinación de los compromisos de las aseguradoras mediante el “Best Estimate” (BE). La propuesta de la Comisión consistía en determinar el BE, aplicando en la determinación del MVM, o margen del valor de mercado, el método de los percentiles ya aplicado por el regulador australiano.

A la fecha de realización de esta investigación el CEIOPS está llevando a cabo el QIS 2. El QIS 2 es más amplio, y cubre los aspectos más relevantes del Pilar 1 de Solvencia II, incluyendo la valoración de los activos, de las provisiones técnicas, así como de otros compromisos de la aseguradora. Para el estudio de este impacto se tomará como referencia el método de cálculo promulgado recientemente por el regulador suizo.

### **7.3. SISTEMAS DE DETERMINACIÓN DEL CAPITAL MÍNIMO**

Según la clasificación de la OCDE<sup>59</sup> pueden distinguirse dos clases de modelos para la determinación del nivel de solvencia:

- Modelos retrospectivos.
- Modelos prospectivos.

#### **7.3.1. Modelos retrospectivos**

Se basan en datos históricos para la determinación de los niveles de solvencia

Entre los modelos retrospectivos podemos a su vez distinguir dos enfoques, el europeo o comprensivo y el anglosajón o analítico. La diferencia entre ambos es la cantidad de factores tenidos en cuenta y la complejidad de la fórmula que utilizan.

##### **Enfoque europeo o comprensivo**

El enfoque europeo considera a la aseguradora como un todo indivisible, para determinar la cantidad de recursos necesarios en función de sus magnitudes agregadas. Los requisitos de solvencia se establecen como un porcentaje de una determinada magnitud contable, que considera una estrecha correlación con el grado de exposición al riesgo.

Como ejemplo del enfoque europeo tenemos el utilizado en España, que expondremos a continuación para el Seguro de Vida.

---

<sup>59</sup> Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, en su documento OECD (2002).

## Sistema de determinación del margen de solvencia español

El sistema de determinación del margen de solvencia es regulado en España en los artículos 58 y siguientes del Real Decreto 2486/1998, de 20 de noviembre, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados, modificado por el Real Decreto 297/2004, de 20 de febrero y es regulado también por la Ley 34/2003, de 4 de noviembre, de modificación y adaptación a la normativa comunitaria de la legislación de seguros privados.

Para ilustrar este sistema incluiremos algunos de los párrafos del artículo 62 del Real Decreto 2486/1998, así como las modificaciones a los mismos establecidos por el Real Decreto 297/2004:

*“Artículo 62. Cuantía mínima del margen de solvencia en los seguros de vida.*

*1. Para el ramo de vida, la cuantía mínima del margen de solvencia será la suma de los importes que resulten de los cálculos a que se refieren los dos párrafos siguientes:*

- a) Se multiplicará el 4 por 100 del importe de las PTSV por seguro directo, sin deducir el reaseguro cedido, y por reaseguro aceptado, por la relación que exista, en el ejercicio que se contemple, entre el importe de las PTSV, deducidas las correspondientes al reaseguro cedido y retrocedido, y el importe bruto de las mismas, sin que esta relación pueda ser, en ningún caso, inferior al 85 por 100.*
- b) Para los contratos cuyos capitales en riesgo sean positivos se multiplicará el 0,3 por 100 de los capitales en riesgo, sin deducir reaseguro cedido ni retrocedido, por la relación existente, en el ejercicio que se contemple, entre los capitales en riesgo deducido el reaseguro cedido y retrocedido y el importe bruto de dichos capitales, sin que esta relación pueda ser, en ningún caso, inferior al 50 por 100.”*

El Real Decreto 297/2004 da nueva redacción a la letra c) del número 2 y se añade un nuevo apartado 5 al artículo 62.

La letra c) del número 2, reproduce en su tenor literal lo establecido en el número 7 del artículo 28 de la Directiva 2002/12/CE sobre los seguros de vida, en relación con el margen de solvencia de los seguros de vida vinculados a la evolución de activos específicamente afectos o de índice o activos que se hayan fijado como referencia y para las operaciones de gestión de fondos colectivos de jubilación. El porcentaje del importe de las PTSV para la determinación del margen de solvencia se fija en función de que la entidad asuma el riesgo de inversión y, en

caso de que no se asuma, en relación con el período en que se cubran los gastos de gestión, así como con la asunción de riesgos para caso de muerte.

El nuevo número 5 se corresponde en su integridad con el número 4 ter del artículo 61.

El mencionado porcentaje del 4% sobre las PTSV, es fruto de unos estudios llevados a cabo hace más de cuarenta años. Se ajustó una distribución de probabilidad al ratio de resultados anuales entre las PTSV y se estimó que para garantizar una probabilidad de ruina menor del 1% durante tres años, bastaba con un patrimonio propio no comprometido equivalente al 4% de las PTSV.

Como ventaja principal de estos modelos tenemos la facilidad en su aplicación. No obstante, esa misma simplicidad, determina que es difícil su individualización al caso específico y particular de cada aseguradora, y por ello son muy sensibles a las variables usadas como fuente de estimación. A veces pueden llevar a conclusiones no deseables, por ejemplo: si la variable utilizada es la cuantía o volumen de reservas técnicas, una aseguradora prudente, que dote suficientemente sus reservas, tendrá, en consecuencia, un margen de solvencia mayor que una compañía que tienda a infradotar sus reservas técnicas. No obstante, este inconveniente puede disminuirse usando y comparando varios ratios diferentes, por ejemplo: un ratio basado en las primas y otro sobre la base de los siniestros.

### **Modelo anglosajón o analítico**

El enfoque anglosajón analiza los riesgos individuales a los que se halla sometida la aseguradora y determina la necesidad de recursos propios en función de los primeros.

El objetivo es eliminar los inconvenientes de los métodos de ponderación fija, no incorporando sólo dos o tres factores, sino todos los riesgos que se estima acontecen a la actividad aseguradora. Además, se ponen en correlación todos los riesgos, esto es, no se suman aritméticamente los valores que resulten para cada riesgo, sino que se incluyen en una fórmula más compleja que refleje la correlación o independencia de los riesgos, bajo el axioma matemático de que el todo es algo más y distinto de las partes que lo componen.

Con origen en los Estados Unidos han sido adoptados posteriormente, con algunas variaciones, por Japón y Canadá, entre otros. A continuación exponemos el modelo del RBC de Estados Unidos para el Seguro de Vida.



## El sistema RBC de Estados Unidos

El sistema denominado "Risk-Based Capital" fue introducido por la NAIC (National Association of Insurance Commissioners), a principios de los años noventa.

Como ya se ha explicado antes el sistema RBC consiste en asociar cada uno de los principales riesgos que tienen las compañías con las necesidades de capital, teniendo en cuenta de esta manera, las peculiaridades de cada compañía. No obstante, el sistema no determina la simple agregación de cada necesidad de capital individualizada por riesgo considerado, sino que utiliza un agregado en función de la correlación existente entre los distintos riesgos. De manera que la fórmula recoja la correlación entre riesgos mediante el cálculo de la covarianza. Este ajuste considera el riesgo acumulado de los distintos riesgos individuales, incrementando la importancia de los más significativos y reduciendo el resto.

La fórmula establecida por la NAIC para el cálculo del RBC para el caso de vida es la siguiente (para el caso de No Vida la manera de calcularlo es parecida):

$$RBC_{VIDA} = C_0 + C_{4A} + \sqrt{(C_{10} + C_{3A})^2 + C_{1cs}^2 + C_2^2 + C_{3b}^2 + C_{4b}^2}$$

donde cada  $C_i$  corresponde a una de las distintas categorías de riesgos considerados para el cálculo. Estas categorías son las siguientes:

$C_0$ , es el riesgo vinculado a los compromisos fuera del balance y a las filiales de seguro, se refiere a las necesidades de margen RBC de las filiales, y al vinculado a compromisos no registrados en el balance de la empresa.

$C_1$ , es el riesgo de colocación o riesgo de activo, se determina ponderando las colocaciones con coeficientes que van del 0% al 30%. Además existen unos factores de ajuste por fiscalidad. Se distinguen las siguientes partes:

- $C_{1cs}$ , riesgo de colocación o riesgo de activo para las acciones.
- $C_{10}$ , riesgo de colocación o riesgo de activo para otras colocaciones.
- $C_{3b}$ , riesgo adicional que hay que añadir a aquellas sociedades que operen con seguros sanitarios.

$C_2$ , es el riesgo de seguro, es decir, para desviaciones desfavorables de la mortalidad o la morbilidad. Este valor cubre a la vez el riesgo de desviación de la prestación real respecto de la prestación esperada y el de desconocimiento de la prestación esperada. La necesidad de margen RBC se calcula en función de las primas para los seguros de ahorro (porcentaje entre

el 7% y el 35%) y en función del capital de riesgo para los seguros de riesgo (porcentaje entre el 0,5% al 0,15%).

$C_3$ , es el riesgo vinculado al tipo de interés y se determina aplicando a las provisiones matemáticas de cada categoría un factor que va del 0,75% para contratos no redimibles de muy corta duración al 3% para contratos redimibles sin penalización de rescate o casi sin ella. Estos factores aumentan un 50% salvo para aquellas compañías que puedan demostrar que su activo y pasivo se ajustan convenientemente mediante la aplicación de pruebas basadas en proyecciones de movimientos efectivos ("cash flow test").

$C_4$ , es el riesgo comercial general y se refiere a aquellos riesgos no tenidos en cuenta en los puntos anteriores. Se distinguen dos apartados:

- $C_{4a}$  calculado como el 2% de las primas del seguro de vida.
- $C_{4b}$  referido a los gastos administrativos de las compañías que operan con seguros sanitarios.

Los modelos basados en el riesgo tienen el inconveniente de ser más difíciles de aplicar. Además, debe asegurarse que cualquier nueva variable que se introduce lleve a una más exacta estimación de los riesgos incurridos. Es necesario encontrar el equilibrio entre el número de factores del componente, la complejidad de la fórmula y la facilidad de su aplicación, así como encontrar la razón de correlación entre los distintos factores de riesgo que se quieren considerar.

### **7.3.2. Modelos prospectivos**

Los dos modelos descritos anteriormente tienen como inconveniente que son puramente retrospectivos, y no incorporan hipótesis sobre las tendencias futuras o datos del mercado que pueden alterar significativamente la solvencia.

En cambio los modelos prospectivos calculan las exigencias de solvencia sobre la base de datos históricos, pero también factorizando las hipótesis sobre los cambios en la compañía y el mercado. Los resultados obtenidos sólo son válidos si el modelo refleja a la compañía en relación con la situación del mercado de manera real y adecuada.

De este tipo de modelos tenemos el caso del regulador australiano o del regulador suizo. En lo que respecta a la determinación de los compromisos de la aseguradora, la diferencia fundamental entre ambos, como ya mencionamos en la introducción, radica en la

determinación del MVM. El primero lo determina por el método de los percentil es<sup>60</sup>, mientras que el segundo utiliza el método del coste del capital, que veremos a continuación.

### Swiss Solvency Test (SST)

El regulador suizo ha promulgado recientemente un nuevo método para la determinación de los recursos propios óptimos. Este modelo es prospectivo y por ello considera las hipótesis sobre posibles cambios en la compañía así como las expectativas de los intervinientes en el mercado.

En primer lugar define el Risk Bearing Capital, como la diferencia entre la valoración market consistent de los activos y el best estimate de las provisiones técnicas, al cual se le añade un Margin Value Market (MVM). El MVM se determina por el método del coste del capital, y representa el coste del capital regulatorio. Se justifica por el regulador suizo, para garantizar la protección de los Tomadores, por la compensación que un tercero exigiría por hacer frente al riesgo asegurador y resto de servicios inherentes, en el caso de que la aseguradora no pudiera cumplir con sus compromisos, como consecuencia del coste que supone el capital regulatorio.

A continuación establece una alerta temprana para el supervisor, que define como el Target Capital, que representa los recursos propios suficientes para financiar durante un año, la desviación desfavorable en el Risk Bearing Capital (con un nivel de confianza del 99%). La determinación de este Target Capital según el SST, se lleva a cabo como la suma de 4 componentes:

- Modelo estándar.
- Escenarios particularizados.
- Recargo por riesgo de crédito.
- Margin Value Market.

Modelo estándar: toma en consideración 23 factores de riesgo de mercado y 6 factores de riesgo de seguro, a cada uno de los cuales supone una distribución normal con su correspondiente matriz de correlaciones.

Escenarios particularizados: nivel de recursos propios necesarios para afrontar una serie de escenarios adversos no recogidos por el modelo estándar anterior. Considera:

- un grupo de escenarios adversos predefinidos;

---

<sup>60</sup> Determina el Best Estimate de las provisiones técnicas, así como la como la cuantificación que deja a su izquierda el 75 o 90% de las valoraciones posibles de los compromisos, en base a las expectativas de los intervinientes en el mercado respecto a las hipótesis técnicas (salvando el interés técnico, que sería el derivado de los mercados de capitales), quedando determinado el MVM como la diferencia entre esta cuantificación y el Best Estimate.

- un grupo de escenarios prescritos en base al riesgo concreto asumido por la aseguradora;
- el posible default del reasegurador.

Recargo por riesgo de crédito: refleja el impacto de todos los riesgos de crédito asumidos por el asegurador, salvando el posible quebranto del reasegurador, ya recogido en el punto anterior.

Margin Value Market: se determina como el valor actual del coste del capital regulatorio, asociado a la cartera de activo y pasivo de la aseguradora.

## **7.4. EL VALOR RAZONABLE Y EL MARGEN DE SOLVENCIA**

### **7.4.1. Necesidades de capital por riesgo de mercado**

Emplearemos las conclusiones alcanzadas en los capítulos anteriores para determinar las necesidades de capital como consecuencia del riesgo de mercado considerado desde una doble perspectiva:

- Exceso sobre el valor reconocido en balance de las PTSV y su valor razonable determinado como ya se ha expuesto.
- Las pérdidas posibles para un período de tiempo por variaciones en el valor razonable de las PTSV, debido a la exposición a modificaciones del subyacente.

Consideraremos como subyacente el tipo de interés libre de riesgo, el tanto de mortalidad y el spread por riesgo de crédito.

No nos detendremos mucho más en la determinación del valor razonable de las PTSV, y por tanto en la diferencia entre este y el valor reconocido en balance. A continuación determinaremos una estimación de las posibles pérdidas a las que se halla expuesta la aseguradora, como consecuencia de la modificación en el subyacente del valor razonable.

Desde el punto de vista del valor razonable del activo y el pasivo de una aseguradora podemos destacar los siguientes riesgos:

- Riesgo de interés. Es el riesgo que corre la empresa de que disminuya el resultado técnico financiero, o se deteriore el valor patrimonial de la compañía como consecuencia de un cambio en los tipos de interés
- Riesgo técnico. En este caso consideraremos la posibilidad de incrementos en el valor de los compromisos de la aseguradora como consecuencia de variaciones en la esperanza de vida, respecto a las estimaciones de la industria aseguradora.

- Riesgo de spread de crédito. Posibilidad de pérdidas de valor en los activos o incremento de los compromisos de la compañía, como consecuencia de alteraciones en la prima de riesgo de crédito.

#### **7.4.2. Sensibilidad del valor razonable de las PTSV por cambios en el subyacente**

Hemos considerado como subyacentes del valor razonable de las PTSV, el tipo de interés, el tanto de mortalidad y el spread por riesgo de crédito. Para estudiar la sensibilidad del valor razonable de las PTSV por cambios en estos subyacentes, consideraremos las posiciones que se relacionan tradicionalmente con los análisis de sensibilidad de los derivados financieros:

- Posición Delta. Recoge la sensibilidad del valor razonable de las PTSV ante cambios en los niveles del subyacente. Dado que las PTSV, suponen un compromiso para la compañía, la posición Delta, medirá el incremento en su valor razonable por modificaciones del subyacente.

Si consideramos el tipo de interés como subyacente, la posición Delta medirá como afecta al valor razonable de las PTSV una disminución en la ETTI.

Cuando el subyacente sea el tanto de mortalidad, la posición Delta se medirá de manera diferente si el Seguro de Vida es de Riesgo (cubre el fallecimiento) o de Ahorro (cubre la supervivencia). En el primer caso se considerarán incrementos y en el segundo decrementos de la curva de mortalidad. Tratándose de Seguros de Vida Mixtos (cubre tanto la supervivencia como el fallecimiento), dependerá de la cobertura que cobre mayor importancia.

Por último en cuanto al spread por riesgo de crédito, la posición Delta medirá la sensibilidad del valor razonable de las PTSV ante incrementos en la calidad crediticia de la aseguradora.

- Posición Gamma. Mide el cambio esperado en la posición Delta a partir de cambios en los niveles del subyacente.
- Posición Vega. Medida de sensibilidad del valor razonable de las PTSV por cambios en la volatilidad del subyacente.

El valor razonable de las opcionalidades implícitas en las PTSV, que representan una asimetría en sus posibles valoraciones, crecerá ante volatilidades más elevadas del subyacente.

- Posición Theta. Mide el riesgo de modificación del valor razonable como consecuencia de la aproximación a la fecha de vencimiento de la póliza.

Las opcionalidades mencionadas anteriormente disminuirán su valor conforme se acerca el vencimiento de la póliza.

Para ilustrar la medición de las posiciones anteriores más importantes, referidas al valor razonable de las PTSV, consideraremos los resultados para nuestro ejemplo.

### **Posición Delta**

Consideraremos para determinar la posición Delta respecto a los tipos de interés, la sensibilidad del valor razonable de las PTSV ante un movimiento paralelo a la baja de 100 puntos básicos en la ETTI.

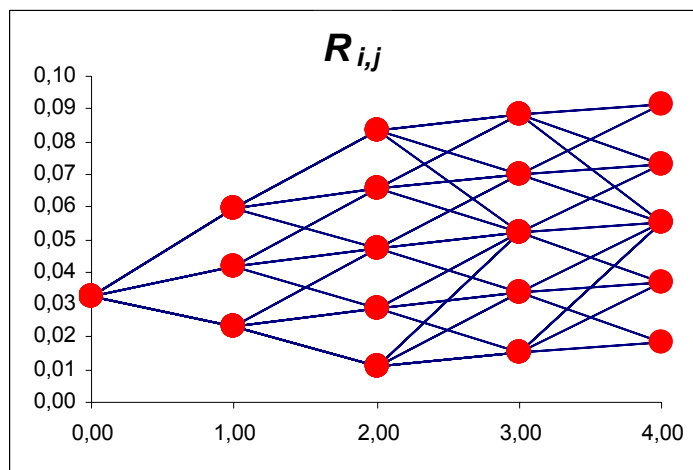
Dado que la ETTI de nuestro ejemplo es considerablemente baja, supondremos que originalmente es 100 puntos básicos más alta y compararemos los resultados con los obtenidos previamente para nuestro ejemplo.

La curva cupón cero en este caso será la siguiente:

t	P(0, t)
0	1
1	0,967743
2	0,928432
3	0,885796
4	0,841285
5	0,796782

**Cuadro 7.2.: Curva cupón cero incrementada en 100 p.b.**

Manteniendo los mismos parámetros de Vasicek obtenemos el siguiente árbol trinomial para el tipo a corto:



**Gráfico 7.1.: Árbol del tipo de interés a corto, según la ETTI del cuadro 7.2.**

De ser así las anteriores valoraciones para nuestro ejemplo del capítulo anterior sobre un Seguro Mixto, pasarían a ser:

Capitalización actuarial	Sin opciones	Rescate	PB	Rescate & PB
$\gamma^{c^1}_{i,j,k,l} = \mu^1_{i,k} + q\lambda^1_{i,l} + R_{i,j}$	0,774363	0,807910	0,847473	0,881020

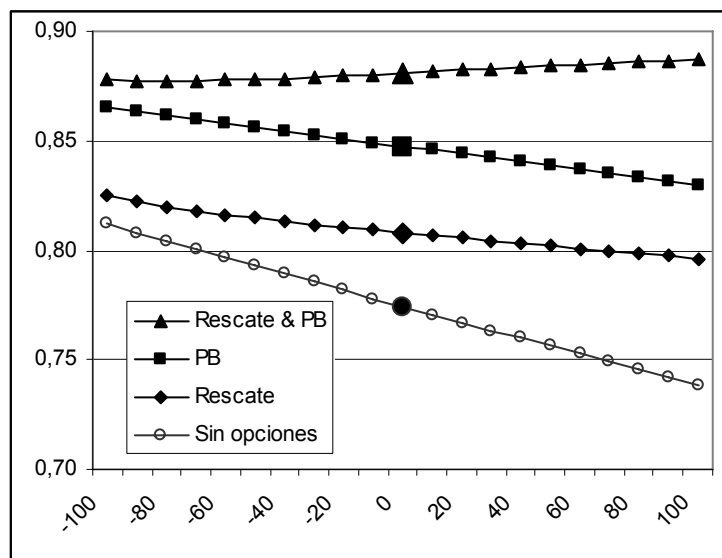
**Cuadro 7.3. Resumen de valoraciones efectuadas respecto al valor razonable de las PTSV a partir de la ETTI incrementada en 100 p.b..**

La sensibilidad del valor razonable de las PTSV sería considerando la ETTI del gráfico 7.3. como la original, la que sigue:

Capitalización actuarial	Sin opciones	Rescate	PB	Rescate & PB
$\gamma^{c^1}_{i,j,k,l} = \mu^1_{i,k} + q\lambda^1_{i,l} + R_{i,j}$	4,85793%	2,08649%	2,10060%	<0,3359%>

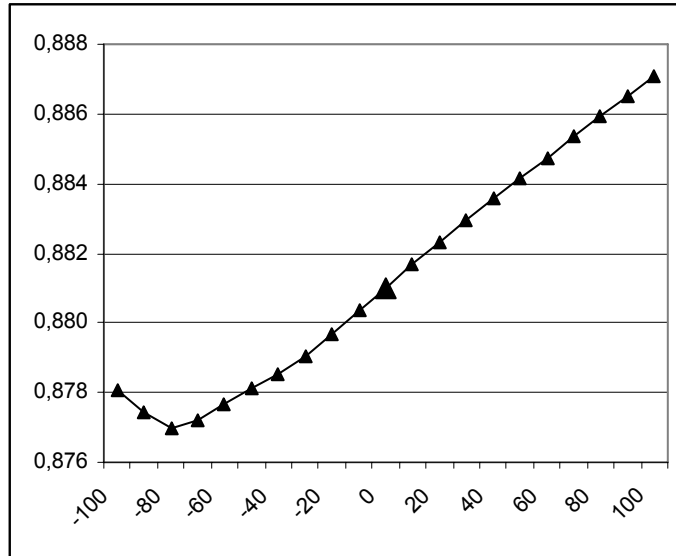
**Cuadro 7.4. Sensibilidad del valor razonable de las PTSV ante un descenso paralelo de 100 p. b. en la ETTI.**

Si representamos gráficamente las distintas valoraciones considerando variaciones paralelas de 10 p.b. en la ETTI, tendríamos



**Gráfico 7.2.: Posición Delta de las distintas valoraciones de las PTSV respecto de los tipos de Interés.**

Si nos centramos en la valoración incluyendo las opciones de rescate y PB tenemos



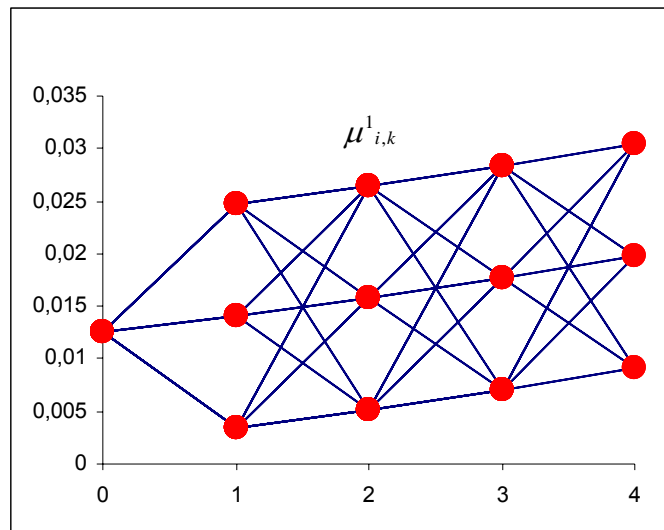
**Gráfico 7.3.: Posición Delta de la valoraciones de las PTSV respecto de los tipos de interés con rescate y PB.**

Exactamente igual se haría para el tanto de mortalidad y el spread por riesgo de riesgo de crédito.

**Posición Vega**

Para ilustrar la sensibilidad del valor razonable de las PTSV ante variaciones en la volatilidad del subyacente, nos centraremos en el tanto de mortalidad como subyacente.

Supondremos que la situación es la del ejemplo y pretendemos analizar la sensibilidad del valor razonable ante el incremento en la volatilidad del tanto de mortalidad. Para ello supondremos que la volatilidad,  $\sigma$ , pasa a ser de un 0,67846%. El árbol trinomial recombinante para la medida de mortalidad  $\mu^1_{i,k}$  sería ahora:





**Gráfico 7.4.: Árbol del tanto de mortalidad suponiendo que el valor de  $\sigma$  asciende a un 0,67846%.**

El resumen de valoraciones sería ahora:

	Sin opciones	Rescate	PB	Rescate+PB
$\gamma^{c1}_{i,j,k,l} = \mu^1_{i,k} + q\lambda^1_{i,l} + R_{i,j}$	0,811981	0,824781	0,865275	0,878075

**Cuadro 7.5. Resumen de valoraciones efectuadas respecto al valor razonable de las PTSV para un parámetro  $\sigma$  del tanto de mortalidad de 0,67846%.**

Así la sensibilidad del valor razonable de las PTSV ante un incremento del parámetro de volatilidad  $\sigma$ , hasta 0,67846%, será:

	Sin opciones	Rescate	PB	Rescate+PB
$\gamma^{c1}_{i,j,k,l} = \mu^1_{i,k} + \lambda q^1_{i,l} + R_{i,j}$	0,00000%	0,00192%	0,00000%	0,00180%

**Cuadro 7.6. Sensibilidad del valor razonable de las PTSV cuando el parámetro  $\sigma$  del tanto de mortalidad pasa de un 0,45231% a un 0,67846%.**

Llevaríamos a cabo el mismo proceso para analizar la sensibilidad del valor razonable de las PTSV por incrementos en la ETV o la volatilidad asociada al spread por riesgo de crédito.



## QUINTA PARTE: CONCLUSIONES

### CAPÍTULO 8 CONCLUSIONES

#### 8.1. MODELO PROPUESTO

Hemos propuesto un proceso de estimación de los compromisos del asegurador debidos a contratos de Seguros de Vida, de forma consistente con el mercado. También se ha expuesto una metodología para la cuantificación de los requerimientos de solvencia, según la metodología del valor razonable.

##### 8.1.1. Estimación del valor razonable de las PTSV

###### 8.1.1.1. Subyacentes considerados

Los subyacentes al valor razonable de las PTSV considerados, han sido los siguientes:

- Tipo de interés libre de riesgo.
- Tanto de mortalidad.
- Spread por riesgo de crédito de la aseguradora.

###### 8.1.1.1.1. Tipo de interés libre de riesgo

Una vez disponemos de la ETTI vigente en la fecha de valoración, aplicamos el modelo de Hull – White con un factor de riesgo, para recoger las expectativas del mercado acerca de la evolución futura de la ETTI. Este modelo calibrable a mercado, permite replicar la ETTI. Para replicar también la ETVs tendríamos que recurrir al modelo de dos factores.

Dado que nos interesa trabajar con tiempo discreto, aplicamos el algoritmo robusto de dos pasos propuesto por Hull y White, para la implementación numérica de este modelo mediante árboles trinomiales recombinantes. Este modelo considera que el tipo de interés libre de riesgo a corto plazo sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dR_t = (\theta(t) - aR_t)dt + \sigma dW_t$$

La consideración en tiempo discreto de este modelo a través de árboles trinomiales, simplifica y facilita su implementación. En uno de los ejemplos ilustrativos que incluimos obtenemos el siguiente árbol trinomial recombinante:

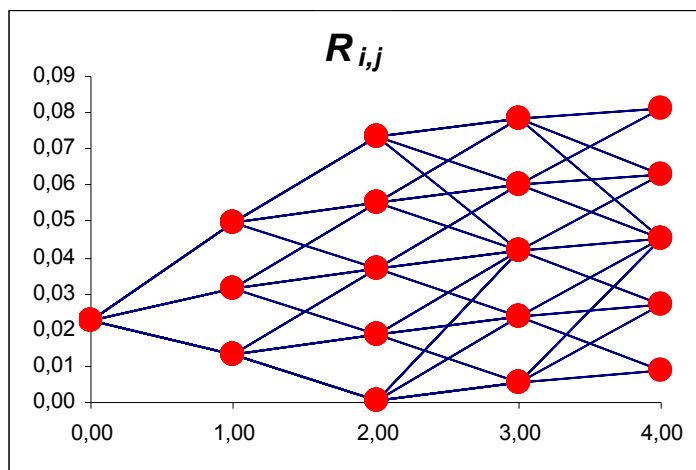


Gráfico 3.1.: Árbol del tipo de interés a corto plazo.

### 8.1.1.1.2. Tanto de mortalidad

Tratándose de Seguros de Vida, el riesgo técnico se centra fundamentalmente en el riesgo biométrico, considerado como el riesgo derivado de la realización del suceso fallecimiento o supervivencia del Asegurado.

Podemos dividir el riesgo biométrico en dos partes:

1. Riesgo sistemático o de desconocimiento de la esperanza matemática de la realización del suceso.
2. Riesgo no sistemático o de desviación de la realización del suceso respecto a su esperanza matemática.

Este trabajo se ha centrado en el riesgo sistemático o de desconocimiento de la esperanza matemática de la realización del suceso, ya que el riesgo no sistemático se puede reducir ampliando la cartera asegurada.

En cuanto a la valoración consistente con el mercado para este componente del modelo, nos encontramos con que no existe un mercado en el que se negocie activamente como subyacente, una medida de la realización del mencionado suceso, hemos de recurrir a su ajuste histórico.

En este trabajo de investigación se han expuesto los modelos de graduación de tablas de mortalidad dinámicas de Heligman y Pollard, y de Lee – Carter, aplicándose en la graduación de la mortalidad para la población andaluza. Si bien proponemos el modelo de Lee – Carter, el modelo de Heligman y Pollard ha servido de contraste de los resultados obtenidos.

El modelo de Lee – Carter considera la probabilidad de fallecimiento a un año,  $q_{x,y}$ , como sigue:

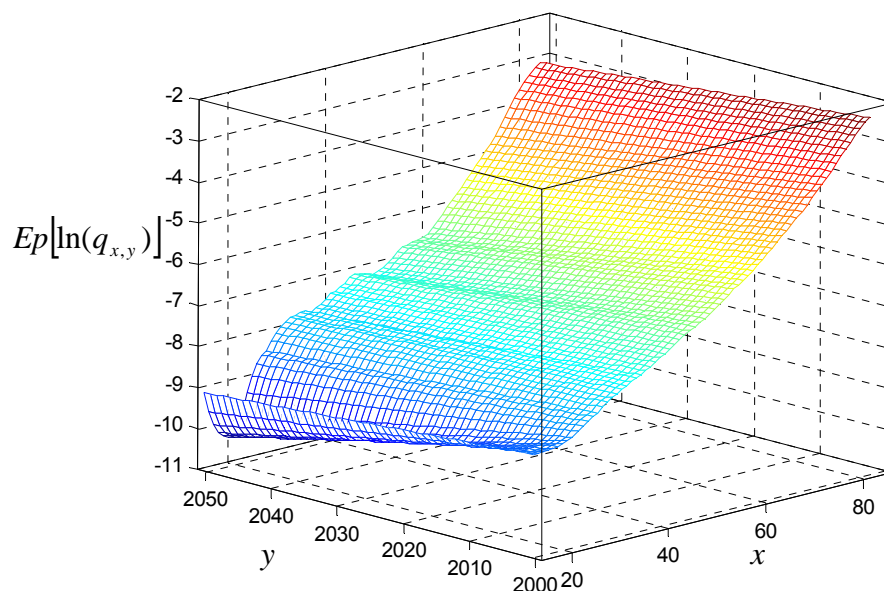
$$\ln(q_{x,y}) = a_x + b_x k_y + \varepsilon'_{xy},$$

Los parámetros  $a_x$  y  $b_x$  dependen de la edad,  $x$ , quedando caracterizada la mortalidad en el año  $y$  mediante el factor no observable,  $k_y$ , de manera que el factor  $b_x$  recoge la dinamicidad del proceso. En general, suele ajustar bien para el factor  $k_y$  un modelo ARIMA(0, 1, 0) con constante negativa:

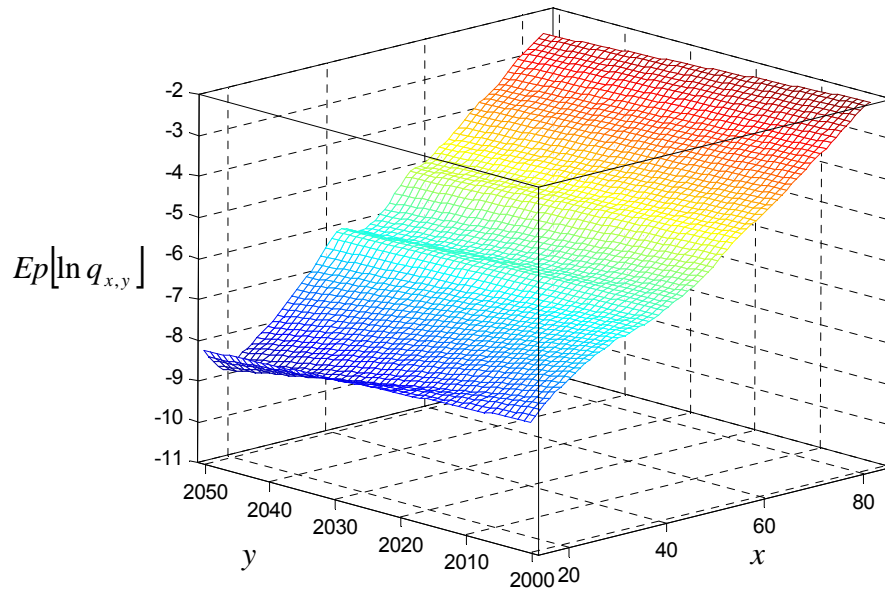
$$k_y = c + k_{y-1} + \varepsilon_y$$

Entre las ventajas más importantes del modelo, podemos destacar la rapidez en su aplicación. Si bien en nuestro ajuste de la mortalidad andaluza, ha sido algo más lento debido al problema de la sobre-estimación de la mortalidad masculina para edades jóvenes. No obstante, este problema es independiente del modelo escogido, debiendo realizar los ajustes oportunos también para el modelo de Helligman y Pollard.

Consideraremos que el error  $\varepsilon'_{x,y}$  se relaciona con el riesgo de desviación de la siniestralidad real respecto de la esperada, mientras que el error  $\varepsilon_y$  se corresponde con el riesgo de desconocimiento de la siniestralidad esperada en el año futuro  $y$ . Los resultados de nuestro ajuste de la mortalidad a la población andaluza han sido, como expusimos en el capítulo 4 los siguientes:

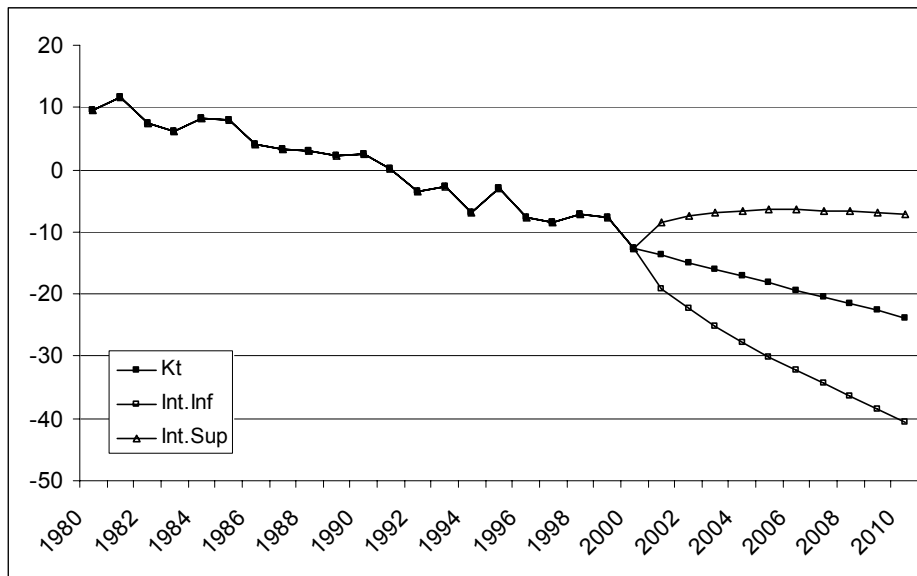


**Gráfico 4.13: Resultados proyectados de  $\ln(q_{x,y})$  obtenidos mediante el modelo de Lee-Carter suavizado. Mujeres.**

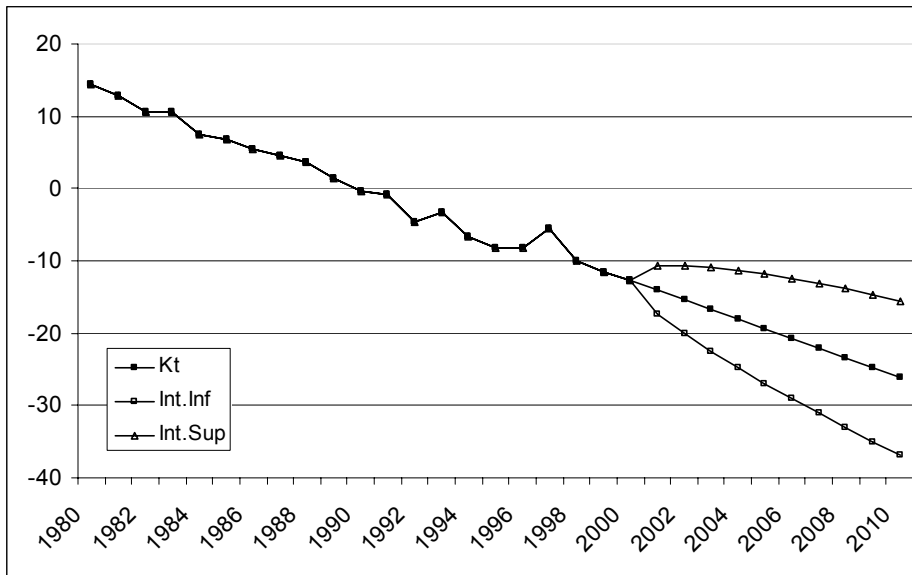


**Gráfico 4.12.: Resultados proyectados de  $\ln(q_{x,y})$  obtenidos mediante el modelo de Lee-Carter suavizado. Hombres.**

Los resultados anteriores, proporcionan la esperanza matemática del suceso fallecimiento a un año. No obstante si nos centramos en la caracterización de la mortalidad para el año  $y$ , a partir del valor del parámetro  $k_y$ , junto a su esperanza matemática hemos obtenido los intervalos de confianza al 95% siguientes:

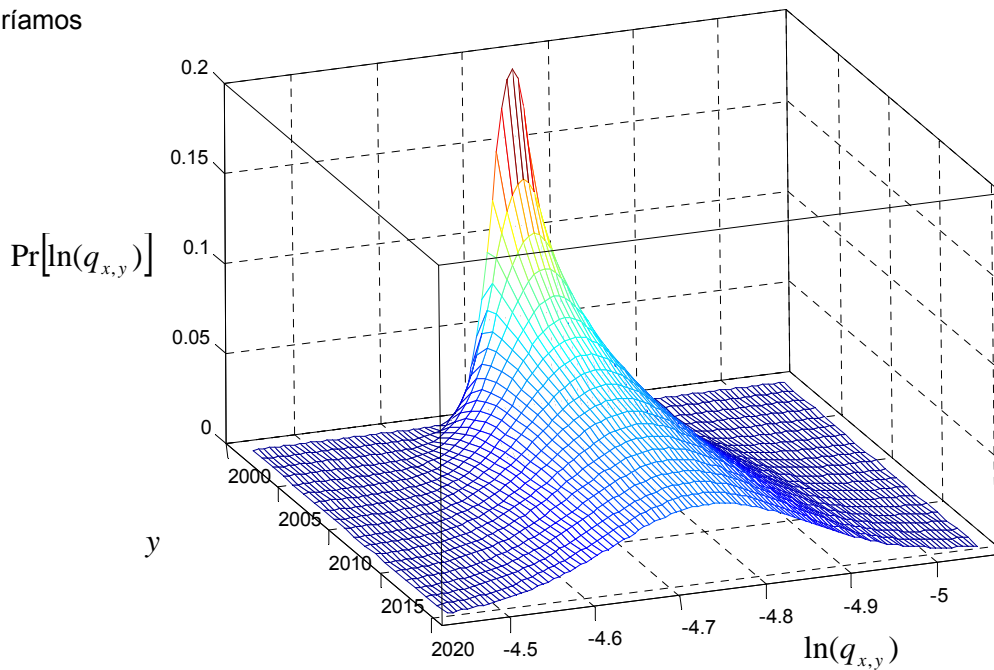


**Gráfico 4.14.: Intervalos de confianza para el  $k_t$  correspondiente al modelo Lee - Carter. Hombres.**



**Gráfico 4.15.: Intervalos de confianza para el  $k_t$  correspondiente al modelo Lee – Carter. Mujeres.**

Esto nos induce a considerar la esperanza matemática del suceso fallecimiento como un proceso estocástico. Si representamos la distribución de probabilidad correspondiente a  $\ln(q_{x,y})$ , de una mujer de 70 años de edad en los años 2001 y siguientes, teniendo en cuenta como modelo para el parámetro,  $k_y$ , el  $ARIMA(0,1,0)$  con constante negativa expuesto, tendríamos



**Gráfico 4.16.: Distribución de la esperanza matemática de la medida de mortalidad para una mujer de 70 años en los años 2001 y siguientes.**

Para reconocer este riesgo de desconocimiento de la prestación esperada, nuestra propuesta es considerar que el tanto de mortalidad, sigue un proceso estocástico de Ornstein – Uhlenbeck. Para ello definimos el tanto de mortalidad a un año como

$$\mu^1_{x,y}(t) = \int_t^{t+1} \mu(s) ds$$

siendo

$$\mu(t) = \left[ -\frac{\partial \ln({}_{T-t}P_{x+t,y+t})}{\partial t} \right]_{T=t} : \text{tanto instantáneo de mortalidad,}$$

$${}_{T-t}P_{x+t,y+t} = \frac{l_{x+T,y+T}}{l_{x+t,y+t}} : \text{probabilidad de supervivencia en } T, \text{ de un asegurado de edad } x+t,$$

en  $t$ .

Consideraremos que en tiempo continuo esta medida sigue el siguiente proceso estocástico:

$$d\mu^1_{x,y}(t) = (\theta(t) - \bar{a} \cdot \mu^1_{x,y}(t))dt + \bar{\sigma}dW_t$$

Proponemos un algoritmo para su resolución numérica a través de árboles trinomiales, que desarrollamos en el capítulo 4. Para el ejemplo de una señora de 70 años en el 2005, cuya estructura temporal para el tanto de mortalidad, de nuestro ajuste a la población andaluza es la siguiente para los próximos 14 años:

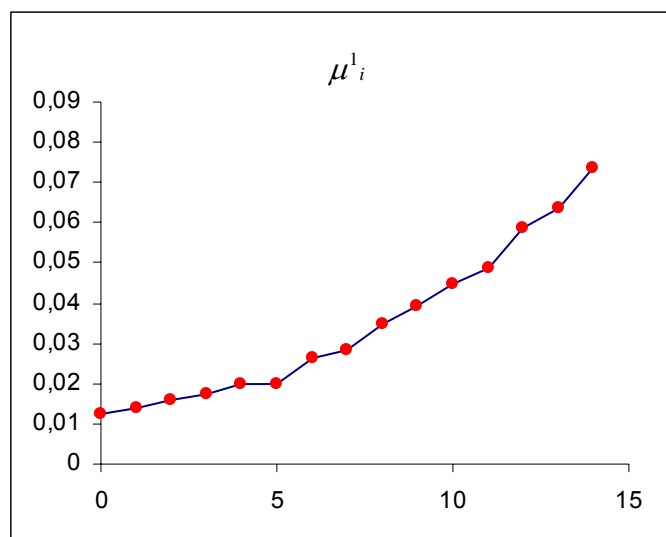


Gráfico 8.1.: Tanto de mortalidad a cada plazo.



Tendría el siguiente árbol trinomial recombinante según las hipótesis de nuestro modelo:

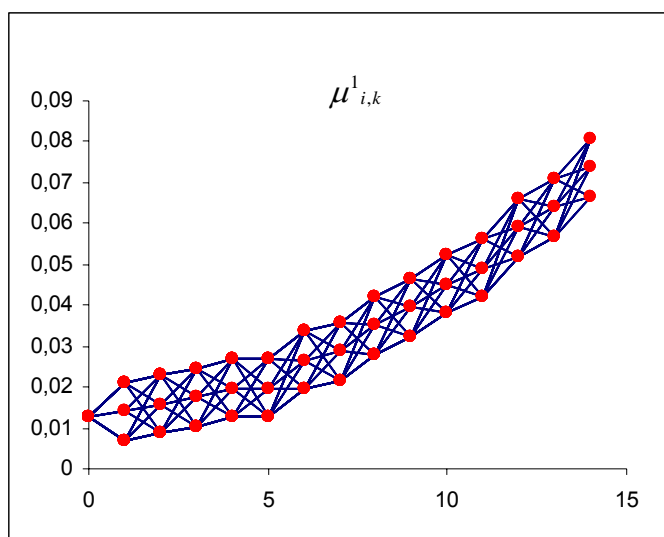


Gráfico 8.2.: Árbol del tanto de mortalidad a cada plazo.

La difusión sobre la medida de mortalidad, tiene por finalidad introducir en la cuantificación de las PTSV, la probabilidad usada en la valoración a mercado, para estimar así las opcionalidades implícitas por asimetrías en la posible valoración futura de las PTSV.

En cuanto a la calibración de este subyacente, exponemos en el capítulo 4, el proceso que se seguiría si disponemos de GAOs (Guaranteed Annuity Options) como instrumentos calibrantes.

Dado que a fecha de elaboración de la presente investigación, no se dispone de suficientes instrumentos calibrantes, exponemos como se calibraría el modelo en cuanto al riesgo técnico sistemático, a partir de la volatilidad manifestada en el ajuste de las tablas de mortalidad.

### 8.1.1.1.3. Spread por riesgo de crédito

Se han expuesto varios métodos para introducir en el análisis el riesgo de crédito. No obstante, en nuestro objetivo de proporcionar un modelo de estimación del Fair Value de las PTSV, estocástico con tres factores de riesgo, se ha considerado igualmente para esta subyacente un proceso estocástico afín unifactorial.

Para este subyacente, hemos considerado el modelo propuesto por Schönbucher y que considera para el spread por riesgo de crédito un proceso estocástico cuya evolución se rige por la siguiente EDE:

$$dq\lambda_t^1 = (\theta_t - aq\lambda_t^1)dt + \sigma dW_t$$

En cuanto a la posibilidad de correlación entre el tipo a corto y el spread por riesgo de crédito, queda resuelto cuando esta correlación no es demasiado elevada mediante la propuesta de Schönbucher, descrita en el apartado 5.4.

Igualmente su resolución numérica a través de árboles trinomiales recombinantes se ha descrito en el apartado 5.4.

Para determinar los spread de la aseguradora a cada plazo, usaríamos:

- la emisión de deuda de la aseguradora a cada plazo, y de ahí extraer los diferenciales de precios respecto a la deuda sin riesgo de crédito, o bien,
- si es posible del mercado de CDSs.

Asimismo se ha expuesto en el capítulo 5, un método de estimación de la prima correspondiente a una opción sobre CDSs, y la calibración de nuestro modelo a partir de su precio de cotización.

En el ejemplo del capítulo 5, obtenemos para el spread por riesgo de crédito de la aseguradora el siguiente árbol trinomial recombinante:

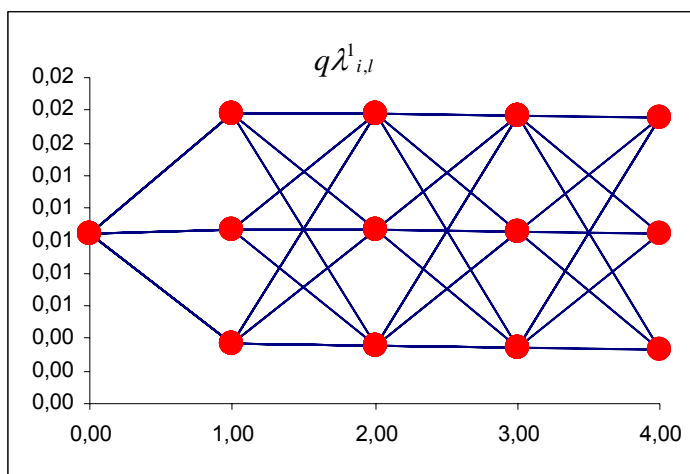


Gráfico 5.1.: Árbol de spread de riesgo de crédito a corto.

### 8.1.1.2. Difusión del valor actual actuarial

El modelo de evolución de la función valor actual actuarial aplicado ha sido

$${}_{T-t}E_{x+t} = P^c(t, T) {}_{T-t}P_{x+t}$$

donde  $P^c(t, T)$ : el valor del bono con riesgo, según la dinámica de la expresión 5.7, y  ${}_{T-t}P_{x+t}$ , la probabilidad de supervivencia en  $T$ , para un Asegurado de edad  $x+t$ , según la expresión 4.1. El factor de descuento actuarial propuesto tiene por tanto, tres factores de riesgo, que podemos representar por  ${}_{T-t}E_{x+t}(r(t), \mu_x(t), q\lambda(t))$ .

La medida realmente implementada numéricamente mediante árboles trinomiales, ha sido la función valor actual actuarial a corto plazo en tiempo discreto:

$$E^c_{x+i,j,k,l} = \exp\left(-\left(R_{i,j} + \mu^1_{i,k} + q\lambda^1_{i,l}\right) \cdot \Delta t\right)$$

o lo que es lo mismo, se ha implementado el tanto de capitalización actuarial modificado siguiente:

$$\gamma^c_{i,j,k,l} = R_{i,j} + \mu^1_{i,k} + q\lambda^1_{i,l}$$

ya que

$$E^c_{x+i,j,k,l} = \exp\left(-\gamma^c_{i,j,k,l} \cdot \Delta t\right)$$

Así obtenemos árboles trinomiales recombinantes de cuatro dimensiones, en los cuales cada nodo tiene la forma del cuadro 5.2., con 27 ramas:

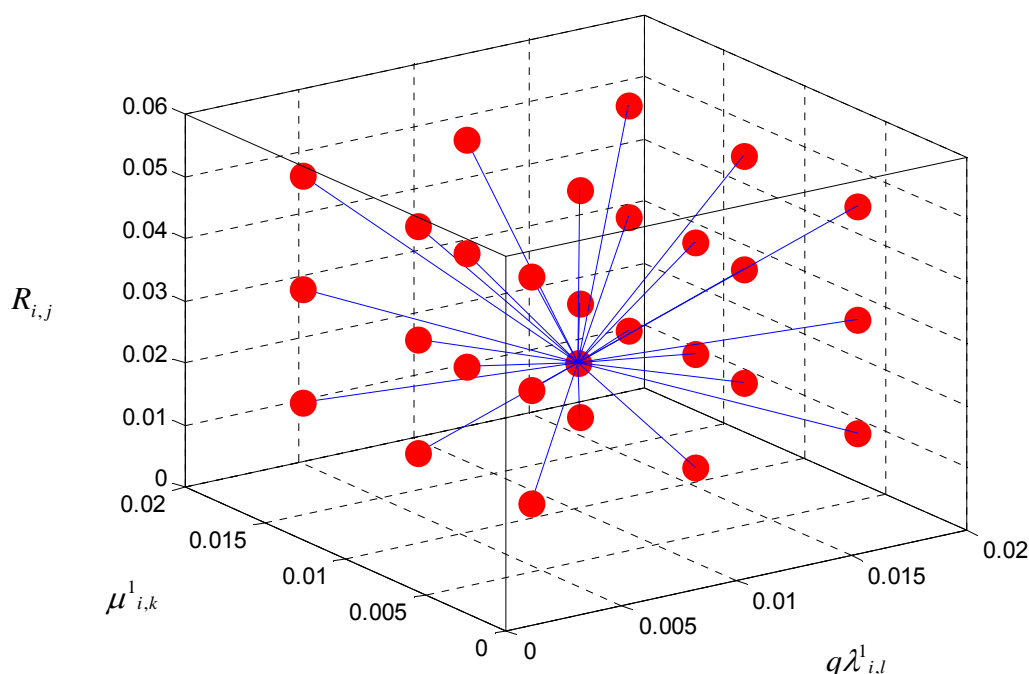


Figura 5.2. Transición de los tres subyacentes considerados a partir del nodo origen

### 8.1.1.3. Estimación del valor razonable de las PTSV

Se ha propuesto la determinación del valor razonable de las PTSV a través del árbol trinomial anterior. La determinación del valor razonable, se lleva a cabo iterativamente a través del descuento desde el corte temporal en que tiene lugar el vencimiento de la Póliza, hasta la fecha de valoración, del flujo de caja proporcionado por la Póliza de Seguro de Vida.

La expresión a aplicar en este caso es la que sigue:

$$V^c(i, j, k, l) = \exp(-\gamma^c_{i,j,k,l} \cdot \Delta t) \cdot \left[ S_{i+1} + \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 p_{s,r,t} V^c(i+1, j_r, k_s, l_t) \right] + (1 - \exp(-\mu^1_{i,k} \cdot \Delta t)) \cdot F_i$$

siendo

$S_{i+1}$  : flujos de caja por garantías, gastos o primas pagaderos a la supervivencia del asegurado en  $i+1$ . Las primas a cobrar se considerarán con signo menos.

$F_i$  : flujos de caja por garantías o gastos pagaderos al fallecimiento del asegurado entre  $i$  e  $i+1$ . En este caso hemos establecido la hipótesis de fallecimiento al inicio del periodo considerado.

El valor razonable de las PTSV sería el valor que el árbol trinomial en el nodo origen,  $V^c(0,0,0,0)$ .

#### Opción de rescate

Las hipótesis que se están barajando en cuanto a la valoración de la opción de rescate en el marco del Valor Razonable, son dos:

- se puede considerar como un conjunto de flujos de caja probables que matizan el resto, o bien,
- como un suelo a los posibles valores que puede tomar el valor razonable de las PTSV en el futuro.

En la presente investigación exponemos el segundo método de valoración, en cuyo caso la expresión a aplicar sería:

$$V^{Rc}(i, j, k, l) = \max \left[ V^c(i, j, k, l); R_x \right]$$

$$\left. \begin{aligned} &V^c(i, j, k, l) = \exp(-\gamma^c_{i,j,k,l} \cdot \Delta t) \cdot \\ &\cdot \left[ S_{i+1} + \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \sum_{t=1}^3 p_{s,r,t} V^{Rc}(i+1, j_r, k_s, l_t) \right] + (1 - \exp(-\mu^1_{i,k} \cdot \Delta t)) \cdot F_i \end{aligned} \right\}$$

Al tomar esta alternativa, la opción de rescate se ha de valorar como implícita, es decir, que su determinación ha de ser inherente a la del total del valor razonable de las PTSV, ya que para su determinación requiere la información del valor razonable de las PTSV en cada nodo,  $V^c$ .

Así el valor razonable de las PTSV incluida la opción de rescate sería el valor que tome el nodo origen en este caso,  $V^{Rc}(0,0,0,0)$ .

#### Opción de participación en beneficios

Esta opción puede presentar múltiples formas, desde una disminución en el compromiso pendiente del Tomador, hasta un incremento en la cuantía de los capitales garantizados, pasando por un extorno de primas para el Tomador. De cualquier modo, supone una asimetría en los resultados de la operación de seguro para la entidad aseguradora, debido a que si la rentabilidad de los activos afectos a las PTSV supera el interés técnico, tiene lugar una mejora en la situación del Tomador, mientras que en caso contrario, no se produce un menoscabo en la misma. La manera de valorar será diferente según la modalidad de participación en beneficios (PB) imputada. Para ilustrar una de ellas, en el presente trabajo se ha expuesto el caso de incremento en los capitales garantizados.

El árbol trinomial recombinante combinado de los tres subyacentes considerados, permite determinar los resultados que esta opción proporciona según los diferentes escenarios futuros. La determinación de la asimetría resultante se obtiene de forma natural, como exponemos en el capítulo 6.

#### **8.1.2. El valor razonable y la estimación de los recursos propios**

La propuesta del presente trabajo para la determinación de los recursos propios debidas al riesgo derivado del negocio asegurador, es obtenerla entre otros, a partir de los dos análisis que siguen:

- Diferencia entre el valor razonable de las PTSV y su valor contabilizado.
- Resultado de las pruebas de stress, del valor razonable de las PTSV, por variación en los niveles del subyacente o incremento en su volatilidad.

El primero es el más evidente y supone la diferencia entre la valoración a mercado y la correspondiente según el Plan Contable de Entidades Aseguradoras. Mientras no se lleve a cabo la contabilización a valor razonable tendrá que ser tenido en cuenta.

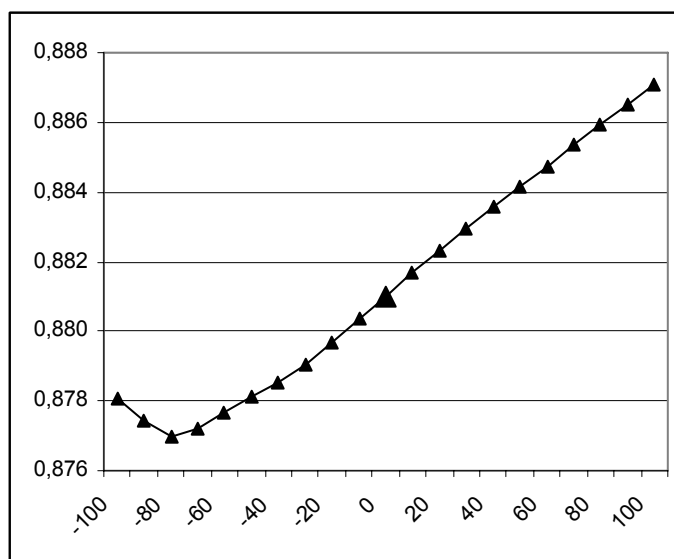
En cuanto al segundo análisis se han considerado en el apartado 7.4.2. cuatro posiciones:

- Posición Delta. Sensibilidad del valor razonable de las PTSV por cambios en los niveles del subyacente.

- Posición Gamma. Mide el cambio esperado en la posición Delta a partir de cambios en los niveles del subyacente.
- Posición Vega. Sensibilidad del valor razonable de las PTSV por cambios en la volatilidad del subyacente.
- Posición Theta. Mide el riesgo de cambios en el valor razonable de las PTSV como consecuencia de la aproximación a la fecha de vencimiento de la póliza.

Estas cuatro posiciones se deberán considerar en cuanto a los tres subyacentes incluidos en el análisis: tipos libres de riesgo, tanto de mortalidad y spread por riesgo de crédito de la aseguradora.

En el ejemplo del capítulo 7 la posición delta respecto de los tipos de interés libres de riesgo de las PTSV, incluyendo opción de rescate y opción de participación en beneficios, viene dada por el siguiente gráfico:



**Gráfico 7.3.: Posición Delta respecto de los tipos de Interés de las PTSV incluyendo opciones de rescate y participación en beneficios.**

## 8.2. VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL MODELO PROPUESTO

### Ventajas del modelo

Entre las ventajas de la metodología expuesta podemos destacar:

- El ajuste de tablas de mortalidad dinámicas sin margen de seguridad implícito, a la zona de procedencia de la población objeto de aseguramiento, incorpora no solamente las probabilidades de supervivencia y fallecimiento reales asociadas a dicha población, sino también la dinamicidad que se observa en su esperanza de vida. La rapidez y

flexibilidad en la aplicación del modelo de Lee – Carter, lo constituye como apto para calibrar nuestro modelo respecto al riesgo biométrico.

- La aplicación a los subyacentes al valor razonable de las PTSV de los conocidos como modelos estocásticos afines, con reversión a la media y con la estructura del modelo de Hull – White (o Vasicek extendido) permite:
  - obtener expresiones analíticas de las magnitudes empleadas en la valoración;
  - la reversión a la media consigue la deseada convergencia para la valoración;
  - replicación de la estructura temporal de los tipos de interés libres de riesgo de mercado, medida mortalidad ajustada a la población objeto de aseguramiento, y spread por riesgo de crédito de la entidad aseguradora.
  
- El árbol recombinante tridimensional propuesto para la implementación numérica, permite establecer los escenarios futuros en los cuales:
  - la entidad debería de realizar imputaciones adicionales con la finalidad de cubrir el valor de rescate garantizado, ó
  - la entidad asigna una mayor garantía a la póliza fruto de las realizaciones de participación en beneficios futuras.

así como las probabilidades de ocurrencia de dichos escenarios, que está valorando el mercado, si el modelo ha sido calibrado a mercado, o bien, la probabilidad real si ha sido ajustado en base a información histórica.

- Se ha expuesto como determinar el VAR del valor razonable correspondiente a las provisiones técnicas, según las posiciones:
  - Delta: incremento en el valor razonable debido a modificaciones en la ETTI, curva de mortalidad y en su caso spread de crédito.
  - Vega: incremento en el valor razonable como consecuencia de variaciones en la ETV, en la volatilidad correspondiente a la curva de mortalidad y en su caso de la curva de spread de crédito.
  - Etc.

#### Inconvenientes del modelo

Como inconvenientes destacamos:

- Cualquier modelo para la valoración consistente con el mercado, requiere de instrumentos financieros líquidos para que pueda ser adecuadamente calibrado.

- Actualmente no encontramos problema para calibrar el modelo de Hull – White para los tipos de interés a corto, ya que tras un proceso de filtrado previo podemos extraer del mercado la ETTI, y además en el mercado español tenemos entre otros el caplet como instrumento financiero ampliamente negociado.
- En cuanto al modelo para el spread por riesgo de crédito, si bien es posible calibrar a partir de los CDSs, el diferencial de precios para cada plazo, es difícil encontrar instrumentos “plain vanilla” suficientemente líquidos, para calibrar los parámetros de volatilidad del modelo de Schönbucher. Asimismo es complicado encontrar cotizaciones de la correlación entre los tipos de interés y el spread por riesgo de crédito del nombre de referencia<sup>61</sup>.
- Para nuestra propuesta sobre la evolución estocástica del tanto de mortalidad, los únicos antecedentes que conocemos de instrumentos financieros cotizados, son el EIB/BNP longevity bond (2004) y el Swiss Re catastrophe bond (2003). El primero toma como subyacente una cohorte masculina de 65 años de edad, de origen inglés y galés, mientras que el segundo se halla referenciado a los índices de mortalidad de cinco países: Estados Unidos, Reino Unido, Francia, Italia y Suiza. Si bien el primero tenía una duración de 25 años, a finales de 2005 fue retirado por falta de inversores. En cuanto al último su duración se fijó en 3 años. Por lo tanto, no encontramos en la actualidad suficientes instrumentos financieros calibrantes.

Cuando no disponemos de instrumentos financieros calibrantes hemos de recurrir a la estimación por ajuste histórico de la volatilidad.

- Por otra parte, uno de los problemas más importantes que presenta el modelo de Hull – White, es que se puede dar lugar a subyacentes negativos. Es por ello que hay que vigilar los resultados obtenidos y ajustar las diferencias oportunas.
- En cuanto al modelo propuesto por Schönbucher para incluir en la valoración la posible correlación entre el tipo libre de riesgo y la probabilidad de default, este no sería aplicable cuando esta correlación es elevada, ya que daría lugar a probabilidades de transición negativas.
- En cuanto a la inclusión en el análisis del spread por riesgo de crédito del activo afecto a las PTSV (para la opción de PB), se debe de incluir en el modelo el tratamiento de la correlación entre el spread por riesgo de crédito de la aseguradora y del activo afecto a las PTSV.

---

<sup>61</sup> Aseguradora en el caso de las PTSV, o el emisor del título afecto a estas PTSV.



- Como inconvenientes generales para cualquier modelo, podemos destacar, que los cálculos para un horizonte temporal demasiado largo serán extremadamente sensibles a las asunciones subyacentes del modelo:
  - Si el modelo considera una distribución inadecuada o se halla calibrado incorrectamente, se pueden obtener resultados erróneos y magnificados a lo largo del horizonte temporal considerado. Por ello se tienen que vigilar muy estrechamente estos resultados con la finalidad de determinar incoherencias. Es lo que Panning (1999) denomina “riesgo de estimación”.
  - Asimismo en el largo plazo, el modelo debería de incorporar como la aseguradora reaccionará a diversos grupos de escenarios. Así por ejemplo, si bien es cierto que en los escenarios en los que exista excedente negativo, la aseguradora puede tener problemas, cuando ocurra lo contrario la aseguradora podría incrementar la cuantía del activo afecto. Panning (1999) denomina al impacto de estas decisiones futuras, “modificación adaptativa del riesgo”.



## CAPÍTULO 9

### BIBLIOGRAFÍA

ALONSO, A.M., PEÑA, D. y RODRIGUEZ, J. (2005). "Proyecciones de la población española." Documento de trabajo. Serie de Estadística y Econometría. Universidad Carlos III de Madrid.

ALTMAN, E. I. (1989). "Measuring corporate bond mortality and performance." *Journal of Finance*. Volumen 44.

AMERICAN ACADEMY OF ACTUARIES FAIR VALUE WORK GROUP (2002). "Fair Valuation of Insurance Liabilities: Principles and Methods." Accounting Policies and Procedures Task Force. Washington, D.C.

BABEL, D. F., GOLD, J. Y MERRILL, C.B. (2002). "Fair Value of Liabilities: The Financial Economics Perspective." *North American Actuarial Journal*. Volumen 6.

BABEL, D. F. Y. MERRILL., C. B. (1998). "Economic Valuation Models for Insurers: Reply." *North American Actuarial Journal*. Volumen 2(3).

BABEL, D. F. Y. MERRILL., C. B. (1997). "Two Paradigms for the Market Value of Liabilities: Discussion." *North American Actuarial Journal*. Volumen 1(4).

BALBÁS, A, GUTIÉRREZ, S. GIL FANA, J.A. (1989). "Análisis Matemático para la Economía I. Cálculo Diferencial" Madrid. Ed. AC.

BALBÁS, A, GUTIÉRREZ, S. GIL FANA, J.A. (1989). "Análisis Matemático para la Economía II. Cálculo Integral y Sistemas Dinámicos" Madrid. Ed. AC.

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (2003). "The New Basel Capital Accord." Consultative Document, Bank for International Settlements, April.

BENJAMIN, B. Y. SOLIMAN., A. (1995). "Mortality on then Move". Oxford, Actuarial Education Service.

BETZUEN, A. (1989). "Planes y Fondos de Pensiones. Su Cálculo y Valoración". Ediciones Deusto. Bilbao.

- BETZUEN, A. (1997). "An approach to people's in employment mortality through smoothing splines". Edimburgo, Heriot-Watt University.
- BIFFIS, E. Y. MILLOSOVICH., P. (2006). "The fair value of guaranteed annuity options." Scandinavian Actuarial Journal. Volumen 2006(1).
- BLACK, F., DERMAN, E. y TOY, W. (1990). "One- factor model of interest rates and its application to Treasury bond options." Financial Analysts Journal. Volumen 46.
- BLACK, F., y KARASINSKI, P. (1991). "Bond and option pricing when short rates are lognormal." Financial Analysts Journal. Volumen 47.
- BLACK, F. Y SCHOLES, M. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities." Journal of Political Economy. Volumen 81.
- BLACK, F. y COX., J. (1976). "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions." Journal of Finance. Volumen 31.
- BOYLE, P. P. (1980). "Recent models of the term structure of interest rates with actuarial applications." Transactions of the 21st Congress of Actuaries T4.
- BOX, G. y JENKINS, G. (1976). "Time series analysis: Forecasting and Control." Cambridge University Press.
- BRACE, A., GATAREK, D. y MUSIELLA, M. (1997). "The Market Model of Interest Rate Dynamics". Mathematical Finance. Volumen 7 (3).
- BRENNAN, M. y SCHWARTZ, E. (1979). "A continuous time approach to the pricing of bonds." Journal of Banking and Finance. Volumen 3.
- BRENNAN, M. y SCHWARTZ, E. (1980a). "Analyzing convertible bonds." Journal of Financial and Quantitative Analysis. Volumen 15 (4).
- BRENNAN, M. y SCHWARTZ, E. (1980b). "Conditional predictions of bond prices and returns." Journal of Finance. Volumen 2.
- BRENNAN, M. y SCHWARTZ, E. (1982). "An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency." Journal of Financial and Quantitative Analysis. Volumen 17.

BUREAU, C. M. I. (1999). "Continuous Mortality Investigation Reports CMIR 17." The Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, UK.

CAIRNS, A. J. G. (2004). "A Family of Term – Structure Models for Long – Term Risk Management and Derivative Pricing." *Mathematical Finance*. Volumen 14(3).

CAIRNS, D. (2005). "Financial instruments - fair value option." *Accountancy*. Volumen 136(1343).

CARTER, L. Y. LEE, R. (1992). "Modelling and forecasting U. S. mortality." *Journal of the American Statistical Association*. Volumen 87(419).

CHAN, K. C. et. al. (1992). "An empirical comparison of alternative models of the term structure of interest rates." *The Journal of Finance*. Volumen 47.

CHANCE, D. (1990). "Default Risk and the Duration of Zero Coupon Bonds." *Journal of Finance*. Volumen 45(1).

CHEN, L. (1996). "Interest Rate Dynamics." *Derivatives Pricing, and Risk Management*. Berlin-Heidelberg: Springer Verlag.

CHEN, R.-R. Y SCOTT L. (1992). "Pricing interest rate options in a two-factor Cox- Ingersoll-Ross model of the term structure." *Review of Financial Studies*. Volumen 5(4).

CONSTANTINIDES, G. (1992). "A theory of the nominal term structure of interest rates." *The Review of Financial Studies*. Volumen 5.

CONTRERAS, D. ET. AL. (1996). "Análisis factorial de la estructura temporal de los tipos de interés en España." *Revista Española de Financiación y Contabilidad XXV* 86.

COX, J. C. (1975). "Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions." Working Paper. Stanford University (reimpreso en *Journal of Portfolio Management* 1996. Volumen 22).

COX, J. C. E INGERSOLL, J. E. (1985). "Theory of the term structure of interest rates." *Econometría*. Volumen 53.

CUMMINS, J. D. Y DANZON, P. M. (1997). "Price, financial quality, and capital flows in insurance markets." *Journal of Financial Intermediation*. Volumen 6.

DAHL, M. (2004). "Stochastic Mortality in Life Insurance: Market Reserves and Mortality Linked Insurance Contracts." Insurance: Mathematics and Economics. Volumen 35

DARLINGTON, A. ET. AL. (2001). "How safe is safe enough? An introduction to risk management." The Staple Inn Actuarial Society, Documento de trabajo.

DAS, S. (2000). "Credit derivatives and credit linked notes." Singapore ; New York, Wiley.

DAS, S. Y TUFANO, P. (1995). "Pricing Credit Sensitive Debt When Interest Rates, Credit Ratings and Credit Spreads are Stochastic." Journal of Financial Engineering. Volumen 5.

DEBÓN, A., MONTES, F. Y SALA, R. (2003). "Graduación de tablas de mortalidad. Aplicaciones actuariales." Departament d'Estadística i Investigació Operativa. Valencia, Universitat de València.

DE LA PEÑA, J. I. (2003). "La base técnica financiera del modelo inmunizador de seguros de vida en España." Anales del Instituto de Actuarios Españoles. Tercera Época. Número 9.

DELBAEN, F. y HAEZENDONCK, J. (1989). "A Martingale Approach to Premium Calculation principles in an Arbitrage Free Market." Insurance: Mathematics & Economics. Volumen 8.

DENUIT, M., DEVOLDER, P., y GODERNIAUX, A-C (2004). "Securitization of longevity risk: pricing survival bonds with Wang transform in the Lee-Carter framework." Preprint, Université Catholique de Louvain.

DOTHAN, L. U. (1978). "On the term structure of interest rates." Journal of Financial Economics. Volumen 6.

BLAKE, D., DOWD, K., Y CAIRNS, A (2004). "Long-Term Value at Risk." Journal of Risk Finance. Volumen 5(2).

DUFFIE, D. (2005). "Credit risk modelling with affine processes." Journal of Banking and Finance. Volumen 29.

DUFFIE, D. Y KAN, R. (1996). "A yield - factor model of interest rates." Mathematical Finance. Volumen 64.

DUFFIE, D. Y SINGLETON, K. (1999). "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds." Review of Financial Studies. Special 1999. Volumen 12(4).

ERNST & YOUNG. (1993). "Fair value accounting study: a national survey of chief financial and chief investment officers in 216 financial services institutions." New York, Ernst & Young.

FELIPE, M. Y GUILLÉN, M. (1999). "Evolución y Predicción de las Tablas de Mortalidad Dinámicas para la población Española". Fundación Mapfre Estudios.

FERNÁNDEZ, J. (1997). "Modelos 'Clásicos' de la estructura temporal de los tipos de interés." <http://www.ie.edu/jfnavas/articulos00htm>.

FINANCIAL ACCOUNTING STANDARDS BOARD. (2002). "Guarantor's accounting and disclosure requirements for guarantees, including indirect guarantees of indebtedness of others : an interpretation of FASB statements no. 5, 57, and 107 and rescission of FASB interpretation no. 34." Norwalk, Conn., The Board.

FONG, H.G. y VASICEK, O. A. (1982). "Term structure modelling using exponential splines." Journal of Finance. Volumen 37.

FONG, H.G. y VASICEK, O. A. (1991). "Fixed income volatility management." Journal of Portfolio Management. Summer.

FONG, H.G. y VASICEK, O. A. (1992a). "Omission impossible." Risk. Volumen 5 (2)

FONG, H.G. y VASICEK, O. A. (1992b). "Interest rate volatility as a stochastic factor." Working Paper, Gifford Fong Associates.

FRACHE, S. y KATZ, G. (2004). "Aplicación del cálculo estocástico al análisis de la estructura temporal de las tasas de interés." Nota Docente 01/2004.

GAGE, T. Y MODE, C. (1993). "Some laws of mortality: how well do they fit?" Human Biology. Volumen 65(3).

GESKE, R. (1979). "The Valuation of Compound Options." Journal of Financial Economics. Volumen 7.

GIRARD, L. (2002). "An Approach to Fair Valuation of Insurance Liabilities using the Firm's Cost of Capital." North American Actuarial Journal. Volumen 6.

GOMPERTZ, B. (1825). "On the nature of the function of then law of human mortality an on a new mode of determining the value of life contingencies." Transactions of The Royal Society. Volumen 115.

HABERMAN, S. y RENSHAW, A. (1996). "Generalized linear models and actuarial science." The Statistician. Volumen 45 (4).

HABERMAN, S. y RENSHAW, A. (2001). "On the forecasting or mortality reduction factors." Actuarial Research Report. Volumen 135.

HEATH, D., ET.AL. (1992). "Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation." Econométrica. Volumen 60.

HELIGMAN, L. Y POLLARD, J. (1980). "The age pattern of mortality." Journal of the institute of Actuaries. Volumen 107.

HO, T. S. Y. y LEE, S. B. (1986). "Term structure movements and the pricing of interest rate contingent claims." The Journal of Finance. Volumen 41.

HUGHSTON, L. P. (2000). "The new interest rate models : recent developments in the theory and application of yield curve dynamics." London, Risk.

HULL, J. Y WHITE, A. (1990). "Pricing interest rate derivative securities." Review of Financial Studies. Volumen 3.

HULL, J. (2000). "Options, futures, and other derivatives." Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall.

HULL, J. Y WHITE, A. (2001). "Valuing Credit Default Swaps II: Modelling Default Correlations." Journal of Derivatives. Volumen 8.

HULL, J. Y WHITE, A. (2002). "The Valuation of Credit Default Swap Options." Working Paper.

HUNT, J., KENNEDY, J. y PELSSER, A. (2000). "Markov functional interest rate models" Finance & Stochastics. Volumen 4.

IAA COMMENTS TO THE IASC INSURANCE ISSUES PAPER (2000). "General Overview of a Possible Approach to Insurance Liabilities: Valuation and Capital Requirements." International Actuarial Association website.

INTERNATIONAL ACCOUNTING STANDARD BOARD (IASB) (1998). "International Accounting Standard nº 39: Financial Instruments: Recognition and measurement." December.



IASB (2003a). "Disclosures of risks arising from and other disclosures relating to financial instruments." Active Projects, 15 August.

IASB (2003b). "International Accounting Standard 39 Financial Instruments: Recognition and Measurement." December.

IASB (2003c). "Fair value hedge accounting for a portfolio hedge of interest rate risk." Exposure draft of proposed Amendment to IAS 39 Financial Instruments: Recognition and Measurement, August.

IASB (2003d). "Insurance contracts (exposure draft and basis for conclusions (ED5))." July.

IASB (2004a). "ED7 financial instruments: disclosures." June

IASB (2004b). "The fair value option." Exposure draft of proposed Amendment to IAS 39 Financial Instruments: Recognition and Measurement, July

IASB (2004c). "Fair value hedge accounting for a portfolio hedge of interest rate risk." Amendment to IAS 39 Financial Instruments: Recognition and Measurement, April.

IASB (2005). "The fair value option." Amendment to IAS 39 Financial Instruments: Recognition and Measurement, June

International Actuarial Association (2004). "Changes in Accounting Policy while under International Financial Reporting Standards." Preliminary Exposure Draft.

JAMSHIDIAN, F. (1997). "LIBOR and Swap Market Models and Measures" Finance & Stochastics. Volumen 1.

JARROW, R. A., LANDO, D. Y TURNBULL, S. M. (1997). "A Markov model for the term structure of credit risk spreads." Review of Financial Studies. Volumen 10.

JARROW, R. A. Y TURNBULL, S. M. (1995). "Pricing Options on Financial Securities Subject to default Risk." Journal of Finance. Volumen 50.

JOINT WORKING GROUP (2000). "Accounting for Financial Instruments. Draft Standard." IASC. London.

JONES, E. S., MASON, S. Y ROSENFELD, E (1984). "Contingent Claims Analysis of Corporate Capital Structures: An Empirical Investigation." Journal of Finance. Volumen 39.

LANDO, D. (1998). "On Cox Processes and Credit Risky Securities." Review of Derivatives Research. Volumen 1.

LANGETIEG, T. C. (1980). "A multivariate model of the term structure of interest rates." Journal of Finance. Volumen 35.

LEE, R. (2000). "The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications." North American Actuarial Journal.

LITTERMAN, R. E IBEN, T. (1991). "Corporate bond valuation and then term structure of credit spreads." Journal of Portfolio Management. Spring.

LONGSTAFF, F. Y SCHWARTZ. E. S. (1992). "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model." Journal of Finance. Volumen 47.

MAKEHAM, W (1860). "On the law of mortality." Journal of the institute of Actuaries. Volumen 13.

MERTON, R. C. (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates." Journal of Finance. Volumen 29.

MERTON, R. C. (1973). " Theory of rational option pricing." Bell Journal of Economics and Management Science. Volumen 29.

MIKOSCH, T. (1999). Elementary Stochastic Calculus with Finance in View. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. World Scientific Publishing Co.

MILEVSKY, M. A. y PROMISLOW, S. D. (2001). "Mortality Derivatives and the Option to Annuities." Insurance: Mathematics and Economics.

MILLER, M. H. (1988). "The Modigliani-Miller Propositions After Thirty Years." The Journal of Economic Perspectives. Volumen 2.

MODIGLIANI, F. y MILLER, M.H. (1958). "The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment." American Economic Review. Volumen 48.

MOLLER, T. (1998). "Risk - Minimizing Hedging Strategies for Unit-Linked Life Insurance Contracts." ASTIN Bulletin. Volumen 28.

MOLLER, T. (2004). "Stochastic Orders in Dynamic Reinsurance Markets." Finance &

Stochastics. Volumen 8.

MUSIELA, M. Y RUTKOWSKI, M. (1997). "Martingale methods in financial modelling." Berlin ; New York, Springer.

NAVARRO, L. (2003). Métodos numéricos para la valoración de derivados sobre tipos de interés. Departamento de economía financiera, Universidad de Valencia.

NIELSEN, L. T., SAÀ-REQUEJO J. Y SANTA-CLARA, P (1993). "Default Risk and Interest Rate Risk: The Term Structure of Default Spreads." Working Paper.

NIETO, U. Y VEGAS, J. (1993). "Matemática Actuarial." Madrid, Mapfre.

OECD (2002). "Insurance Solvency Supervision". OECD Country Profiles

OLIVIER, P. y JEFFERY, T. (2004). "Stochastic mortality models." Presentation to the Society of Actuaries of Ireland. Disponible en [http://www.actuaries.ie/Resources/events\\_papers/PastCalendarListing.htm](http://www.actuaries.ie/Resources/events_papers/PastCalendarListing.htm)

PALACIOS, H. (1996). "Introducción al Cálculo Actuarial." Madrid, Mapfre.

PANJER, H. B. ET. AL. (1998). "Equilibrium Pricing." Financial Economics: With Applications to Investments, Insurance and pensions, The Actuarial Foundation. Volumen 4.

PANNING, W. (1999). "The strategic uses of Value at Risk: long term capital management for property/casualty insurers" North American Actuarial Journal. Volumen 1999.

PATEL, N. (2003). "Flow business boos." Risk February.

PELSSER, A. (2000). "Efficient methods for valuing interest rate derivatives." London New York, Springer.

PÉREZ, J. L. (1986). "Seguro de Personas. Tratado General de Seguros." Madrid, Consejo General de Agentes y Corredores de Seguros de España.

PRIETO, E. (2006). "Matemática de la Financiación. Teoría matemática de las estructuras financieras." Madrid. Ed. Gabinete Financiero del Profesor.

REITANO, R. (1997). "Two paradigms for the market value of liabilities." North American Actuarial Journal. 1(4):104-124.

RICHARD, S. F. (1978). " An arbitrage model of the term structure of interest rates." Journal of Financial Economics. Volumen 6.

SCHAEFER, S. M. y SCHWARTZ, E. S. (1984). "A two - factor model of the term structure: an approximate analytical solution." Journal of Financial and Quantitative Analysis. Volumen 19 (3)

SCHÖNBUCHER, P. J. (1999). "A Tree Implementation of a Credit Spread Model for Credit Derivatives." Technical report. University of Bonn..

SCHÖNBUCHER, P. J. (2003). A note on Survival Measures and the Pricing of Options on Credit Default Swaps. Working paper.

SCHRAGER, D. F. (2006). "Affine stochastic mortality." Insurance: Mathematics & Economics. Volumen 38(1).

SHIMKO, D., TEJIMA, N. Y VAN DEVENTER, D. (1993). "The Pricing of Risky Debt when Interest Rates are Stochastic." Journal of Fixed Income. Volumen 3.

SHREVE, S. (1997). Stochastic Calculus and Finance. Versión Preliminar, no publicada.

SONDERMANN, D. (1991). "Reinsurance in Arbitrage - free Markets." Insurance: Mathematics and Economics. Volumen 10.

STEFFENSEN, M. (2001). "On Valuation and Control in Life and Pension Insurance." PH.D. thesis, University of Copenhagen.

THIELE, P. (1972). "On mathematical formula to spress the rate of mortality throughout the whole of life." Journal of the institute of Actuaries 16.

VANDERHOOF, I. T. Y ALTMAN E. I. (2000). The fair value of insurance business. Boston, Kluwer Academic Publishers.

VASICEK O. A. (1982). "An equilibrium characterisation of the term structure." Journal of Financial Economics. Volumen 5 (2).

VEGAS, A. (1982). Estadística, Aplicaciones Económicas y Actuariales. Madrid, Pirámide.

VICENTE MERINO, A. (2000). "La influencia de los fenómenos demográficos en la solvencia y estabilidad de los sistemas de protección social." Revista de Hacienda Pública Española.

YU-HONG, Z. Y ALLWRIGHT, J. C. (1999). "The solution of an affine problem and its application in control." IEEE Transactions on Automatic Control. Volumen 44(4).

ZHU, H. (2004). An empirical comparison of credit spreads between the bond market and the credit default swap market. Basel, Switzerland, Bank for International Settlements.



**ANEXO I.: POLÍTICAS CONTABLES INTRODUCIDAS POR LA NIIF 4**

<u>Obliga a</u>	<u>Permite mantener, aunque no introducir</u>	<u>Permite</u>
Eliminar la provisión para catástrofes y de estabilización	Valoración de pasivos de seguros sin descontar financieramente.	Valorar pasivos de seguros según los tipos de interés vigentes en el mercado.
Realizar la prueba de idoneidad de los pasivos de seguros registrados.		Valorar activos a Fair Value con cargo a la cuenta de pérdidas de ganancias.
Llevar a cabo la prueba de la pérdida del valor de los activos de reaseguros.	Valoración de futuras comisiones de gestión, por valor superior al de mercado.	No valorar derivados implícitos, cuando se ajusten a la definición de contratos de seguros.
Mantener pasivos de seguros hasta que sean liquidados o venzan.		La contabilidad tácita, para evitar asimetrías por cambios en la política contable.
No compensación de pasivos de seguros con activos de reaseguro.	Políticas contables no uniformes para los pasivos de seguros de las filiales.	Reconocer márgenes de inversión futuros, aunque considera así los estados financieros menos relevantes y fiables.
Separar los componentes de depósito de pasivos de seguro.	Valoración de pasivos de seguros con prudencia excesiva.	Valorar según contabilidad local pasivos de seguros adquiridos, manteniendo un activo intangible por la diferencia con el Fair Value.
Separar derivados implícitos que no cumplan la definición de contrato de seguro.		Valorar separadamente el componente garantizado y la participación discrecional dentro de un pasivo de seguro.

**Cuadro A.I. Políticas contables introducidas por la NIIF 4.**





**ANEXO II.: INFORMACIÓN ADICIONAL A REVELAR SEGÚN LA NIIF 4**

<u>Explicación de los importes reconocidos</u>	<u>Naturaleza y alcance de los riesgos de contratos de seguro.</u>
Desglose de la información que permita entender los importes reconocidos por contratos de seguro.	Objetivos, políticas y procesos de gestión del riesgo por contratos de seguro, así como los métodos utilizados en dicha gestión.
Desglose de políticas contables aplicados para contratos de seguro en cuanto a su activo, pasivo, ingresos, gastos y flujos de caja.	Información sobre el riesgo de seguro, incluyendo la sensibilidad respecto a este riesgo.
Si la aseguradora es cedente, además revelará el resultado por reaseguro cedido.	Información sobre concentraciones del riesgo de seguro, así como la política seguida por la dirección para su concreción.
Hipótesis de mayor efecto en la medición de activos, pasivos, ingresos y gastos por contratos de seguro.	Comparación entre la siniestralidad real y la esperada para el ejercicio.
Efecto de cambios en hipótesis para contratos de seguro.	Información sobre el riesgo de crédito, liquidez y de mercado, equivalentes a los exigidos por la NIIF 7, con ciertos matices.
Conciliación de los cambios en pasivos de seguro, activos de reaseguro y en su caso costes de adquisición diferidos derivados.	En caso de no valorar a Fair Value derivados implícitos, facilitará el riesgo de mercado asumido en los mismos.

**Cuadro A.II. Información adicional a revelar según la NIIF 4.**



**CUADERNOS DE LA FUNDACIÓN**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS DEL SEGURO**

110. El Fair Value de las provisiones técnicas de los seguros de vida
109. EL Seguro como instrumento de gestión de los M.E.R. (Materiales Especificados de Riesgo)
108. Mercados de absorción de riesgos
107. La exteriorización de los compromisos por pensiones en la negociación colectiva
106. La utilización de datos médicos y genéticos en el ámbito de las compañías aseguradoras
105. Los seguros contra incendios forestales y su aplicación en Galicia
104. Fiscalidad del seguro en América Latina
103. Las NIIF y su relación con el Plan Contable de Entidades Aseguradoras
102. Naturaleza jurídica del Seguro de Ssistencia en Viaje
101. El Seguro de Automóviles en Iberoamérica
100. El nuevo perfil productivo y los seguros agropecuarios en Argentina
99. Modelos alternativos de transferencia y financiación de riesgos “ART”: situación actual y perspectivas futuras
98. Disciplina de mercado en la industria de seguros en América Latina
97. Aplicación de métodos de inteligencia artificial para el análisis de la solvencia en entidades aseguradoras
96. El Sistema ABC-ABM: su aplicación en las entidades aseguradoras
95. Papel del docente universitario: ¿enseñar o ayudar a aprender?
94. La renovación del Pacto de Toledo y la reforma del sistema de pensiones: ¿es suficiente el pacto político?
92. Medición de la esperanza de vida residual según niveles de dependencia en España y costes de cuidados de larga duración
91. Problemática de la reforma de la Ley de Contrato de Seguro

90. Centros de atención telefónica del sector asegurador
89. Mercados aseguradores en el área mediterránea y cooperación para su desarrollo
88. Análisis multivariante aplicado a la selección de factores de riesgo en la tarificación
87. Dependencia en el modelo individual, aplicación al riesgo de crédito
86. El margen de solvencia de las entidades aseguradoras en Iberoamérica
85. La matriz valor-fidelidad en el análisis de los asegurados en el ramo del automóvil
84. Estudio de la estructura de una cartera de pólizas y de la eficacia de un Bonus-Malus
83. La teoría del valor extremo: fundamentos y aplicación al seguro, ramo de responsabilidad civil autos
81. El Seguro de Dependencia: una visión general
80. Los planes y fondos de pensiones en el contexto europeo: la necesidad de una armonización
79. La actividad de las compañías aseguradoras de vida en el marco de la gestión integral de activos y pasivos
78. Nuevas perspectivas de la educación universitaria a distancia
77. El coste de los riesgos en la empresa española: 2001
76. La incorporación de los sistemas privados de pensiones en las pequeñas y medianas empresas
75. Incidencia de la nueva Ley de Enjuiciamiento Civil en los procesos de responsabilidad civil derivada del uso de vehículos a motor
74. Estructuras de propiedad, organización y canales de distribución de las empresas aseguradoras en el mercado español
73. Financiación del capital-riesgo mediante el seguro
72. Análisis del proceso de exteriorización de los compromisos por pensiones
71. Gestión de activos y pasivos en la cartera de un fondo de pensiones
70. El cuadro de mando integral para las entidades aseguradoras

69. Provisiones para prestaciones a la luz del Reglamento de Ordenación y Supervisión de los Seguros Privados; métodos estadísticos de cálculo
68. Los seguros de crédito y de caución en Iberoamérica
67. Gestión directiva en la internacionalización de la empresa
65. Ética empresarial y globalización
64. Fundamentos técnicos de la regulación del margen de solvencia
63. Análisis de la repercusión fiscal del seguro de vida y los planes de pensiones. Instrumentos de previsión social individual y empresarial
62. Seguridad Social: temas generales y régimen de clases pasivas del Estado
61. Sistemas Bonus-Malus generalizados con inclusión de los costes de los siniestros
60. Análisis técnico y económico del conjunto de las empresas aseguradoras de la Unión Europea
59. Estudio sobre el euro y el seguro
58. Problemática contable de las operaciones de reaseguro
56. Análisis económico y estadístico de los factores determinantes de la demanda de los seguros privados en España
54. El corredor de reaseguros y su legislación específica en América y Europa
53. Habilidades directivas: estudio de sesgo de género en instrumentos de evaluación
52. La estructura financiera de las entidades de seguros, S.A.
50. Mixturas de distribuciones: aplicación a las variables más relevantes que modelan la siniestralidad en la empresa aseguradora
49. Solvencia y estabilidad financiera en la empresa de seguros: metodología y evaluación empírica mediante análisis multivariante
48. Matemática Actuarial no vida con MapleV
47. El fraude en el Seguro de Automóvil: cómo detectarlo

46. Evolución y predicción de las tablas de mortalidad dinámicas para la población española

45. Los Impuestos en una economía global

42. La Responsabilidad Civil por contaminación del entorno y su aseguramiento

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1997  
Fundación MAPFRE Estudios

41. De Maastricht a Amsterdam: un paso más en la integración europea

39. Perspectiva histórica de los documentos estadístico-contables del órgano de control: aspectos jurídicos, formalización y explotación

38. Legislación y estadísticas del mercado de seguros en la comunidad iberoamericana

37. La responsabilidad civil por accidente de circulación. Puntual comparación de los derechos francés y español

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1996  
Fundación MAPFRE Estudios

36. Cláusulas limitativas de los derechos de los asegurados y cláusulas delimitadoras del riesgo cubierto: las cláusulas de limitación temporal de la cobertura en el Seguro de Responsabilidad Civil

35. El control de riesgos en fraudes informáticos

34. El coste de los riesgos en la empresa española: 1995

33. La función del derecho en la economía

32. Decisiones racionales en reaseguro

31. Tipos estratégicos, orientación al mercado y resultados económicos: análisis empírico del sector asegurador español

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1995  
Fundación MAPFRE Estudios

30. El tiempo del directivo

29. Ruina y Seguro de Responsabilidad Civil Decenal

28. La naturaleza jurídica del Seguro de Responsabilidad Civil

- 27. La calidad total como factor para elevar la cuota de mercado en empresas de seguros
- 26. El coste de los riesgos en la empresa española: 1993
- 25. El reaseguro financiero
- 24. El seguro: expresión de solidaridad desde la perspectiva del derecho
- 23. Análisis de la demanda del seguro sanitario privado
- 22. Rentabilidad y productividad de entidades aseguradoras
- 21. La nueva regulación de las provisiones técnicas en la Directiva de Cuentas de la C.E.E.

Nº Especial Informe sobre el Mercado Español de Seguros 1994  
Fundación MAPFRE Estudios

- 20. El Reaseguro en los procesos de integración económica
- 19. Una teoría de la educación
- 18. El Seguro de Crédito a la exportación en los países de la OCDE (evaluación de los resultados de los aseguradores públicos)

Nº Especial Informe sobre el mercado español de seguros 1993  
FUNDACION MAPFRE ESTUDIOS

- 16. La legislación española de seguros y su adaptación a la normativa comunitaria
- 15. El coste de los riesgos en la empresa española: 1991
- 14. El Reaseguro de exceso de pérdidas
- 12. Los seguros de salud y la sanidad privada
- 10. Desarrollo directivo: una inversión estratégica
- 9. Técnicas de trabajo intelectual
- 8. La implantación de un sistema de *controlling* estratégico en la empresa
- 7. Los seguros de responsabilidad civil y su obligatoriedad de aseguramiento
- 6. Elementos de dirección estratégica de la empresa
- 5. La distribución comercial del seguro: sus estrategias y riesgos

4. Los seguros en una Europa cambiante: 1990-95
3. Dirección y Gestión de la Seguridad
2. Resultados de la encuesta sobre la formación superior para los profesionales de entidades aseguradoras (A.P.S.)
1. Filosofía empresarial: selección de artículos y ejemplos prácticos